مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (4) 2021
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (4) 2021

فضاءات α –نيوثر

الدكتـــــور عدنان ظريف*

(تاريخ الإيداع 28/4/ 2021– تاريخ النشر 15/ 9/ 2021)

□ ملخّص □

نقدم في هذا البحث مفهوماً جديداً هو مفهوم فضاء α –نيوثر مستفيدين من مفهوم المجموعة $\alpha-$ مفتوحة حيث إن فضاء α–نيوثر هو فضاء تبولوجي (E,τ) كل مجموعة $\alpha-$ مفتوحة من نقاطه تكون مجموعة $\alpha-$ متراصة فيه. ويعد هذا المفهوم تعميم لمفهوم فضاء نيوثر المعروف. ثم ندرس أهم خواص فضاء α–نيوثر والعلاقة بينه وبين الفضاءات الآتية: فضاء نيوثر، فضاء $\alpha-kc$، الفضاء α متراص والفضاء غير المترابط كلياً.

الكلمات المفتاحية: مجموعة $\alpha-$ مفتوحة ، فضاء نيوثر ، فضاء $\alpha-kc$، فضاء α متراص، فضاء غير المترابط كلياً.

*أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (4) 2021
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (4) 2021

On α-Noether Spaces

Dr.AdnanK.Zarif*

(Received 28/4/2021.Accepted 15/9/2021)

□ABSTRACT □

In this paper, a new concept of Noether space is presented, taking advantage of the concept of the α-open set, where α-Noether space is a topological space (E,τ) in which each α-open set from its points is α-compact set in it. This concept is a generalization of the known Noether space concept. Then we study the important properties of α-Noether space and the relationship between it and the following spaces: Noether space, $\alpha - kc$-space, α-compact space and externally disconnected space.

Keywords: *α-Open Set, Noether Space, $\alpha - kc$-Space, α-Compact Space, Externally Disconnected Space.*

*Associate Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

مقدمة:Introduction

يعد فضاء نيوثر من الفضاءات الهامة والقيمة نسبيا وتبرز أهميته في كونه صلة وصل بين التبولوجيا والجبر التبادلي حيث إنه يساعد في دراسة الحلقات التبديلية دراسة كاملة واستنتاج أهم خواصها الأساسية، انظر [1].

إن نشأة مفاهيم جديدة في الفضاءات التبولوجية كمفهوم المجموعة المفتوحة من النوع α (α−مفتوحة) هذا المفهوم الذي قدمه الباحث الرياضي Njasted عام 1965 فتح آفاقاً واسعة وجديدة أمام الباحثين في مجال التبولوجيا لتعريف مفاهيم مرتبطة بمفهوم المجموعة α−مفتوحة مثل: فضاء α−متراص، فضاء α−مترابط، تابع α−مستمر، تابع α−مفتوح، تابع α−مغلق، تابع α−هوميومورفيزم وموضوعات الفصل من النوع α وغيرها انظر ([7,8,9,10,11]).

في هذا العمل سنستفيد من مفهوم المجموعة α مفتوحة ونعرف فضاء α− نيوثر وسنبين أنه تعميم لفضاء نيوثر المعروف، ثم ندرس الخصائص الأساسية لفضاء α− نيوثر وعلاقته بفضاء نيوثر وفضاء $\alpha-kc$ والفضاء α متراص والفضاء غير المترابط كلياً.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث في كونه يقدم تعمم لمفهوم فضاء نيوثر بمفهوم جديد هو فضاء α− نيوثر ويدرس علاقته به ويقدم العديد من الخصائص الجديدة حول هذا المفهوم الجديد.

نهدف في هذا البحث إلى توجيه البوصلة باتجاه أحد المفاهيم القديمة المهمة وشبه المنسية بغية تعميمه آملين أن نقدم إضافة مفيدة في أكثر من منحى من مناحي الرياضيات.

طرائق البحث ومواده:Methodology

إن بحثنا هذا يندرج في إطار الرياضيات المجردة ويكتسب صيغة نظرية تخص التبولوجيا والجبر التبادلي. ولهذا سنعتمد على الأدبيات والمراجع العلمية المرتبطة بهذا المنحى. **تم إجراء هذا البحث في قسم الرياضيات−كلية العلوم− جامعة تشرين في الفترة الواقعة بين آذار 2021 و تموز 2021.**

مفاهيم أساسية ونتائج مساعدة

سنفرض في جميع التعاريف الآتية أن (E,τ) فضاء تبولوجي كيفي وأن A مجموعة كيفية من نقاطه (أي أن $A \subseteq E$) ونرمز لداخلية A وللصاقتها بالرمزين $\mathrm{int}A$، $\mathrm{cl}A$ على الترتيب.

تعريف1: مجموعة α− مفتوحة [2]

يقال عن المجموعة A إنها مجموعة α− مفتوحة في (E,τ) إذا حققت العلاقة الآتية:

$$A \subseteq \mathrm{int}[\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, A)]$$

يرمز بـ $O_\alpha(E)$ لأسرة جميع المجموعات α− مفتوحة في (E,τ) .

تعريف2: المجموعة α− مغلقة [2]

يقال إن المجموعة A مجموعة α− مغلقة في فضاء تبولوجي (E,τ) إذا كانت متممتها E/A مجموعة α − مفتوحة في (E,τ).

يرمز لأسرة جميع المجموعات α− مغلقة في (E,τ) بالرمز $\mathcal{F}_\alpha$.

تعريف3: التبولوجيا من النوع α [2]

إن أسرة المجموعات $\alpha-$ مفتوحة في فضاء تبولوجي (E,τ) تشكل تبولوجيا على E يرمز لها بالرمز τ_α أي أن $\tau_\alpha = O_\alpha(E)$.

نتيجة 1:[2]

في أي فضاء تبولوجي (E,τ) تتحقق العلاقة $\tau \subseteq \tau_\alpha$.

تعريف4: الفضاء $\alpha-$ متراص [4]

يقال عن الفضاء التبولوجي (E,τ) إنه فضاء $\alpha-$ متراص إذا كانت كل تغطية $\alpha-$ مفتوحة له تحتوي على تغطية جزئية منتهية.

نتيجة 2:[4]

كل فضاء $\alpha-$ متراص هو فضاء متراص ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة.

نتيجة 3:[4]

كل مجموعة $\alpha-$ مغلقة في فضاء $\alpha-$ متراص هي مجموعة $\alpha-$ متراصة.

تعريف5: فضاء **ولانسكي** أو فضاء **kc [5]**

يقال عن فضاء تبولوجي (E,τ) إنه فضاء ولانسكي أو فضاء **kc** إذا كانت كل مجموعة متراصة فيه مجموعة مغلقة.

تعريف6: فضاء **kc-** α **[11]**

يقال عن فضاء تبولوجي (E,τ) إنه فضاء **kc-**α إذا كانت كل مجموعة مفتوحة α-متراصة فيه مجموعة $\alpha-$ مغلقة.

نتيجة 4:[11]

كل فضاء **kc-**α هو فضاء **kc** ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة.

تعريف7: المجموعة α ـ مجاورة [3]

لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,τ) ولتكن $x \in A$ نقطة ما. يقال إن المجموعة α ـ مجاورة للنقطة x في (E,τ) إذا وجدت مجموعة α ـ مفتوحة في (E,τ) مثل G_c بحيث يكون: $x \in G_0 \subseteq \Delta$. يرمز بالرمز $V_\alpha(x)$ لأسرة جميع مجاورات x من النوع α وبالرمز $O_\alpha(x)$ لأسرة جميع المجاورات المفتوحة من النوع α.

تعريف8: فضاء هوسدورف ($-T_2\alpha$) [7]

يقال إن (E,τ) فضاء α ـ **هوسدورف** ($-T_2$ spaceα) إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من نقاط (E,τ) توجد مجاورتان مفتوحتان من النوع α مثل G_x للنقطة x و G_y للنقطة y بحيث يكون $G_x \cap G_y = \phi$.

تعريف9: التابع α ـ مستمر [6]

ليكن $f:(E,\tau)\to(X,\sigma)$ تابعاً كيفياً، يقال إن التابع f تابع α ـ مستمر على E إذا كانت الصورة العكسية وفق f لكل مجموعة مفتوحة (مغلقة) في (X,σ) هي مجموعة α ـ مفتوحة (α ـ مغلقة) في (E,τ) .

تعريف10: التابع α ـ مفتوح [6]

يقال إن التابع $f:(E,\tau)\to(X,\sigma)$ تابع α ـ مفتوح إذا كانت الصورة المباشرة وفق f لكل مجموعة مفتوحة في الفضاء (E,τ) هي مجموعة مفتوحة في الفضاء (X,σ) .

تعريف11: التابع α ـ مغلق [6]

يقال إن التابع $f:(E,\tau)\to(X,\sigma)$ تابع α ـ مغلق إذا كانت الصورة المباشرة وفق f لكل مجموعة مغلقة في الفضاء (E,τ) هي مجموعة α ـ مغلقة في الفضاء (X,σ) .

تعريف12: التابع k− تطبيق [13−14]

يقال إن التابع $f:(E,\tau)\to(X,\sigma)$ هو k ـ تطبيق إذا كانت الصورة المباشرة وفق f لكل مجموعة متراصة في الفضاء (E,τ) هي مجموعة متراصة في الفضاء (X,σ) والصورة العكسية وفق f لكل مجموعة متراصة في (X,σ) هي مجموعة متراصة في (E,τ).

تعريف13:التابع (k ـ α)− تطبيق [11]

يقال إن التابع $f:(E,\tau)\to(X,\sigma)$ هو (k ـ α)− تطبيق إذا كانت الصورة المباشرة وفق f لكل مجموعة α−متراصة في (E,τ) هي مجموعة α−متراصة في (X,σ) والصورة العكسية وفق f لكل مجموعة α−متراصة في (X,σ) هي مجموعة α−متراصة في (E,τ).

تعريف14: فضاء نيوثر(Noether spase) [1]

يقال عن الفضاء التبولوجي (E,τ) إنه فضاء **نيوثر** إذا كان كل مجموعة مفتوحة في (E,τ) مجموعة متراصة فيه.

تمهيدية 1: [8]

ليكن $f:(E,\tau)\to(X,\sigma)$ تابعاً α−مستمراً عندئذ تكون الصورة المباشرة وفق f لكل مجموعة α−متراصة في (E,τ) هي مجموعة متراصة في (X,σ) .

تمهيدية 2: [11]

ليكن (X,Z_X) فضاء تبولوجيا جزئيا من فضاء تبولوجي(E,τ) ولتكن A مجموعة α−متراصة في الفضاء التبولوجي الجزئي (X,Z_X) عندئذ تكون A مجموعة α−متراصة في الفضاء (E,τ) .

تمهيدية 3: [11]

إذا كانت $X\neq\phi$ مجموعة α−مفتوحة في فضاء تبولوجي(E,τ) وكانت A مجموعة من نقاط الفضاء التبولوجي الجزئي (X,τ_X) عندئذ إذا كانت المجموعة A مجموعة α−متراصة في الفضاء الكلي (E,τ) فإن A تكون α−متراصة في الفضاء الجزئي (X,τ_X) .

تمهيدية 4: [11]

إذا كانت $X_1, X_1, ..., X_n$ مجموعات α–متراصة في فضاء تبولوجي (E, τ) تكون المجموعة $X = \cup_{i=1}^{n} X_i$ مجموعة α–متراصة في الفضاء (E, τ) .

تمهيدية 5: [11]

ليكن (E, τ) فضاء $\alpha - T_2$ ولتكن $\{X_i; \tau_{X_i}\}_{i \in I}$أسرة كيفية من المجموعات α–متراصة في الفضاء (E, τ) عندئذ تكون المجموعة $X = \cap_{i \in I} X_i$ مجموعة α–متراصة في الفضاء (E, τ) .

تمهيدية 6: [11]

إذا كانت $X \neq \phi$ مجموعة α–مفتوحة (α–مغلقة) في فضاء تبولوجي (E, τ) وكانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي الجزئي (X, τ_X) عندئذ يلزم ويكفي كي تكون المجموعة A مجموعة α– مفتوحة (α–مغلقة) في الفضاء الجزئي (X, τ_X) أن تكون المجموعة A مجموعة α– مفتوحة (α–مغلقة) في الفضاء الكلي (E, τ) .

تعريف15: الفضاء غير المترابط كليا [2]

يقال عن الفضاء التبولوجي (E, τ) إنه فضاء غير مترابط كلياً إذا كان من أجل كل مجموعة G مفتوحة في (E, τ) تتحقق العلاقة الآتية $cl G \in \tau$ أي أن لصاقة أية مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء هي مفتوحة فيه.

النتائج والمناقشة:

نقدم في هذه الفقرة تعريفاً لفضاء جديد نسميه فضاء α–نيوثر وندرس العلاقة بينه وبين بعض الفضاءات الأخرى مثل فضاء نيوثر، فضاء $\alpha - kc$، الفضاء α متراص والفضاء غير المترابط كلياً.

تعريف16: فضاء α–نيوثر (α Noether spase–)

يقال عن الفضاء التبولوجي (E, τ) إنه فضاء **نيوثر** إذا كانت كل مجموعة α–مفتوحة في (E, τ) مجموعة α–متراصة فيه.

نتيجة 5:

كل فضاء α– **نيوثر** هو فضاء **نيوثر**.

البرهان:

ليكن (E, τ) فضاء α– **نيوثر** ولتكن A مجموعة مفتوحة كيفية في هذا الفضاء عندئذ تكون A مجموعة α– **مفتوحة في** (E, τ)، وبما أنه فضاء α– **نيوثر** فإن المجموعة A تكون α– **متراصة فيه، لذلك فبحسب النتيجة** (5) **نجد أن** A مجموعة متراصة في (E, τ) وهذا يعني أن الفضاء (E, τ) فضاء نيوثر.

ملاحظة 1:

ليس من الضروري أن يكون كل فضاء نيوثر هو فضاء α– **نيوثر**، نوضح ذلك في المثال الآتي.

مثال 1

نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية N التبولوجيا الآتية:

$\tau = \{N, \ \phi, \{7\}\}$

عندئذ نجد بسهولة أن:

$$\tau_\alpha = \{T \subseteq N; 7 \in T\} \cup \{\phi\}$$

واضح أن الفضاء (N,τ) فضاء نيوثر ولكنه ليس فضاء $\alpha-$ **نيوثر** لأن المجموعة $\boldsymbol{N}$ هي مجموعة $\alpha-$ مفتوحة في (N,τ)، والأسرة الآتية: $\tau_1 = \{G_n = \{7,n\}; n \in N\}$ تشكل تغطية $\alpha-$ مفتوحة لها في الفضاء (N,τ) إلا أن هذه التغطية لا تحوي أية تغطية جزئية منتهية.

نتيجة 6:

كل فضاء $\alpha-$ نيوثر هو فضاء $\alpha-$ متراص.

لأنه إذا فرضنا أن (E,τ) فضاء $\alpha-$ نيوثر عندئذ بحسب كون $\boldsymbol{E}$ مجموعة $\alpha-$ مفتوحة في (E,τ) لأنها مجموعة مفتوحة فيه تكون E مجموعة $\alpha-$ متراصة وهذا يعني أن الفضاء (E,τ) هو فضاء $\alpha-$ متراص.

ملاحظة 2:

ليس من الضروري أن يكون كل فضاء $\alpha-$ متراص هو فضاء $\alpha-$ **نيوثر** .

مثال 2

لنأخذ الفضاء (N,τ) حيث التبولوجيا τ معرفة وفق الصيغة الآتية:

$$\tau = \{T \subseteq N;\ 3 \notin T\} \cup \{N\}$$

واضح أن الفضاء (N,τ) هو فضاء $\alpha-$ متراص لأن أية تغطية $\alpha-$ مفتوحة سيكون أحد عناصرها $\boldsymbol{N}$، لأن

أية أسرة مجموعات $\alpha-$ مفتوحة لـ $\boldsymbol{N}$ في هذا الفضاء لن تشمل **3** إن لم يكن $\boldsymbol{N}$ أحد عناصرها، وبالتالي فإن أية تغطية $\alpha-$ مفتوحة للفضاء (N,τ) ستحتوي على تغطية جزئية منتهية على سبيل المثال الأسرة $\{\boldsymbol{N}\}$. وبذلك نجد أن الفضاء (N,τ) فضاء $\alpha-$ متراص لكنه ليس فضاء $\alpha-$ نيوثر لأنه لو أخذنا المجموعة $\boldsymbol{A}=\{4,5,....\}$ لوجدنا أنها مجموعة مفتوحة في (N,τ) لأن $3 \notin A$ وبالتالي فإن $\boldsymbol{A}$ مجموعة $\alpha-$ مفتوحة ثم إن الأسرة $\{G_n=\{n\};\ n=4,5,...\}$ تشكل تغطية $\alpha-$ مفتوحة للمجموعة $\boldsymbol{A}$ في الفضاء (N,τ) وهذه التغطية لا تحوي أية تغطية جزئية منتهية وبالتالي فإن المجموعة $\boldsymbol{A}$ ليست مجموعة $\alpha-$ متراصة في (N,τ) لذلك فالفضاء (N,τ) ليس فضاء $\alpha-$ نيوثر.

نتيجة 7:

لتكن A مجموعة $\alpha-$ مغلقة كيفية في فضاء $\alpha-$ نيوثر عندئذ تكون A مجموعة $\alpha-$ متراصة.

البرهان:

البرهان ينتج مباشرة من النتيجتين(3) و(6).

مبرهنة 1:

ليكن (E,τ) فضاء T_2 ، إن الشرط اللازم والكافي كي يكون (E,τ) فضاء **نيوثر** هو أن يكون فضاء α – نيوثر.

البرهان:

$\Leftarrow$: لنفرض أن A مجموعة $\alpha-$ مفتوحة كيفية في (E,τ) عندئذ نجد أن $A \subseteq \text{int}[\text{cl}(\text{int}\,A)]$ ولكن المجموعة $\text{int}\,A$ مجموعة مفتوحة في (E,τ) الذي هو فضاء نيوثر فرضاً، فإن المجموعة $\text{int}\,A$ مجموعة متراصة في (E,τ) وبما أن (E,τ) فضاء T_2 و $\text{int}\,A$ مجموعة متراصة فيه فإن $\text{int}\,A$ مجموعة مغلقة فيه لذلك فإن $cl(\text{int}\,A) = \text{int}\,A$ وبالتالي فإن $\text{int}[cl\,\text{int}\,A)] = \text{int}(\text{int}\,A) = \text{int}\,A$ لذلك فإن $A \subseteq \text{int}\,A$ وهذا يعني أن A مجموعة مفتوحة في (E,τ) وبالتالي فإن $\tau_\alpha \subseteq \tau$ وبحسب النتيجة(1) لدينا $\tau \subseteq \tau_\alpha$ ولذلك فإن $\tau = \tau_\alpha$.

إذا A مجموعة مفتوحة في فضاء نيوثر لذلك تكون A مجموعة متراصة فيه ولكن بملاحظة أن $\tau = \tau_\alpha$ كما أثبتنا أعلاه يصبح التراص والتراص من النوع $\alpha-$ متكافئين في حالتنا هذه لذا فإن المجموعة A تكون α–متراصة في (E,τ) وهذا يعني أن (E,τ) فضاء α–نيوثر.

$\Rightarrow$: محقق دوما بحسب النتيجة(5).

نتيجة 8:

إذا كان (E,τ) فضاء T_2 وفضاء نيوثر فإن العلاقة الآتية تكون محققة:

$$\tau = \tau_\alpha = \mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha$$

البرهان:

يمكن استنتاج البرهان من المبرهنة(1) لأننا أثبتنا أن $\tau = \tau_\alpha$ وأن A المجموعة α–مفتوحة الكيفية هي مجموعة مغلقة وبالتالي $\alpha-$ مغلقة.

مبرهنة 2:

ليكن (E,τ) فضاء $\alpha-$ نيوثر وفضاء $\alpha-kc$ عندئذ يكون (E,τ) فضاء غير مترابط كلياً.

البرهان:

لتكن A مجموعة مفتوحة كيفية في (E,τ) عندئذ نجد أن A مجموعة $\alpha-$ مفتوحة فيه وبما أنه فضاء $\alpha-$ **نيوثر** فإن المجموعة A مجموعة $\alpha-$ متراصة في (E,τ) وبالتالي فبحسب النتيجة(2) تكون A مجموعة متراصة فيه ولكن (E,τ) فضاء $\alpha-kc$ لذلك فبحسب النتيجة(4) يكون (E,τ) فضاء kc و A مجموعة متراصة فيه لذلك تكون A مجموعة مغلقة في (E,τ) لذا نجد أن $clA=A$ وبالتالي فإن $clA \in \tau$ وهذا يعني أن الفضاء (E,τ) غير مترابط كلياً.

ملاحظة 3:

ليس من الضروري أن يكون كل فضاء غير مترابط كلياً فضاء $\alpha-$ **نيوثر** أو فضاء $\alpha-kc$.

مثال 3

لنأخذ الفضاء (N,τ) حيث التبولوجيا τ معرفة وفق الصيغة الآتية:

$$\tau = \{N, \phi, \{4,5\}\}$$

نلاحظ أن :

$$\tau_\alpha = \{T \subseteq N; \{4,5\} \subseteq T\} \cup \{\phi\}$$

واضح أن $clN=N\in\tau$ ، $cl\phi=\phi\in\tau$، $cl\{4,5\}=N\in\tau$ لذلك فالفضاء (N,τ) غير مترابط كلياً. ونبين أنه ليس فضاء $\alpha-$ **نيوثر**. نأخذ المجموعة $G_4=\{4,5,\dots\}$ فنلاحظ أن $G_4\in\tau_\alpha$ فهي مجموعة $\alpha-$ مفتوحة في (N,τ) لكنها ليست $\alpha-$ متراصة لأن الأسرة $\{G_n=\{4,5,n,\dots\};\ n=6,7,\dots\}$ تشكل تغطية $\alpha-$ مفتوحة للمجموعة G_4 في (N,τ) لكن هذه التغطية لا تحوي أية تغطية جزئية منتهية وهذا يعني أن الفضاء (N,τ) ليس فضاء $\alpha-$ **نيوثر** كما أن الفضاء (N,τ) ليس فضاء $\alpha-kc$ لأنه لو أخذنا المجموعة $A=\{1,2,3,4,5\}$ لوجدنا أنها مجموعة $\alpha-$ متراصة لأنها مجموعة منتهية ولكن A ليست مجموعة $\alpha-$ مغلقة لأن متممتها $N/A=\{6,7,\dots\}$ ليست $\alpha-$ مفتوحة.

مبرهنة 3:

ليكن (X_1,τ_{X_1})،(X_2,τ_{X_2})،....، (X_n,τ_{X_n}) فضاءات $\alpha-$ نيوثر جزئية في فضاء تبولوجي (E,τ) بحيث أن $E=\cup_{i=1}^{n}X_i$ عندئذ فإن الفضاء (E,τ) فضاء $\alpha-$ نيوثر.

البرهان:

لتكن A مجموعة $\alpha-$ مفتوحة كيفية في الفضاء (E,τ) عندئذ بحسب تعريف التبولوجيا النسبية تكون المجموعة $A\cap X_i\ \forall\ 1\le i\le n$ مجموعة $\alpha-$ مفتوحة في الفضاء الجزئي (X_i,τ_{X_i}) وبما أن $(X_i,\tau_{X_i})\ \forall\ 1\le i\le n$ فضاء $\alpha-$نيوثر فإن المجموعة $A\cap X_i\ \forall\ 1\le i\le n$ مجموعة $\alpha-$ متراصة في الفضاء (X_i,τ_{X_i}) لذلك بحسب التمهيدية(2) تكون المجموعة $A\cap X_i\ \forall\ 1\le i\le n$ مجموعة $\alpha-$ متراصة في الفضاء الكلي (E,τ) وبما أن

$$A=A\cap E=A\cap(\cup_{i=1}^{n}X_i)=\cup_{i=1}^{n}(A\cap X_i)$$

فإنه بحسب التمهيدية(4) تكون المجموعة A مجموعة $\alpha-$ متراصة في الفضاء (E,τ) وهذا يعني أن الفضاء (E,τ) فضاء $\alpha-$نيوثر.

مبرهنة 4:

ليكن كل من (X_1,τ_{X_1})،(X_2,τ_{X_2}) فضاء $\alpha-$ نيوثر جزئي من فضاء تبولوجي (E,τ) بحيث أن المجموعتين X_2,X_1 مجموعتين $\alpha-$ مفتوحتين في الفضاء (E,τ) عندئذ تتحقق النتيجتين الآتيتين:

1) الفضاء الجزئي (X,τ_X) فضاء $\alpha-$ نيوثر حيث $X=X_1\cup X_2$.

2) إذا كان (E,τ) فضاء $\alpha-T_2$ يكون الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) فضاء $\alpha-$ نيوثر حيث $Y=X_1\cap X_2$.

البرهان:

1) لتكن A مجموعة $\alpha-$ مفتوحة في الفضاء (X,τ_X) عندئذ بحسب تعريف التبولوجيا النسبية نجد أن

$$A=A\cap X=A\cap(X_1\cup X_2)=(A\cap X_1)\cup(A\cap X_2)\ ;A\in\tau_\alpha$$

وبحسب العلاقة بين بنية الفضاء الجزئي والكلي نجد أن المجموعتين: $(A\cap X_1),(A\cap X_2)$ مجموعتان $\alpha-$ مفتوحتان في الفضاءين (X_1,τ_{X_1})،(X_2,τ_{X_2}) على الترتيب وبالاستفادة من كون كل من هذين الفضاءين فضاء $\alpha-$ نيوثر نجد أن المجموعتين $(A\cap X_1),(A\cap X_2)$ مجموعتان $\alpha-$ متراصتان في

الفضاءين السابقين على الترتيب لذلك فبحسب التمهيدية(2) تكون المجموعتان $(A\cap X_1),(A\cap X_2)$ مجموعتين $\alpha-$ متراصتين في الفضاء الكلي (E,τ) لذلك بحسب التمهيدية(4) تكون المجموعة $A=(A\cap X_1)\cup(A\cap X_2)$ مجموعة $\alpha-$ متراصة في (E,τ) وبالتالي بالاستفادة من التمهيدية(3) تكون المجموعة A مجموعة α–متراصة في (X,τ_X) وهذا يعني أن الفضاء (X,τ_X) فضاء $\alpha-$ نيوثر.

2) لتكن A مجموعة $\alpha-$ مفتوحة في الفضاء (Y,τ_Y) عندئذ نجد أن

$$A=A\cap Y=A\cap(X_1\cap X_2)=(A\cap X_1)\cap(A\cap X_2)$$

نلاحظ كما في برهان(1) أن المجموعتين $(A\cap X_1),(A\cap X_2)$ مجموعتان α مفتوحتين في الفضاءين (X_1,τ_{X_1}) ، (X_2,τ_{X_2}) على الترتيب لذلك تكون هاتان المجموعتان $\alpha-$ متراصتين ونخلص إلى أن المجموعتين $(A\cap X_1),(A\cap X_2)$ مجموعتان $\alpha-$ متراصتان في (E,τ) لذلك بحسب التمهيدية(5) تكون المجموعة $A=(A\cap X_1)\cup(A\cap X_2)$ مجموعة $\alpha-$ متراصة في الفضاء (E,τ) وبالتالي بحسب التمهيدية(3) تكون المجموعة A مجموعة $\alpha-$ متراصة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) وهذا يعني أن الفضاء (Y,τ_Y) فضاء $\alpha-$ نيوثر.

مبرهنة 5:

ليكن $f:(E,\tau)\rightarrow(X,\sigma)$ تابعاً متبايناً α–مفتوحا و αk–تطبيق بحيث أن الفضاء (X,σ) فضاء $\alpha-$ نيوثر عندئذ يكون الفضاء (E,τ) فضاء **نيوثر**.

البرهان:

لتكن A مجموعة $\alpha-$ مفتوحة كيفية في الفضاء (E,τ) عندئذ بالاستفادة من كون f تابع $\alpha-$ مفتوحاً نجد أن المجموعة $f(A)$ مجموعة $\alpha-$ مفتوحة في الفضاء (X,σ) وبالاستفادة من كون الفضاء (X,σ) فضاء $\alpha-$ نيوثر نجد أن المجموعة $f(A)$ مجموعة $\alpha-$ متراصة في الفضاء (X,σ) وبحسب كون f تابع αk–تطبيق تكون المجموعة $f^{-1}[f(A)]$ مجموعة $\alpha-$ متراصة في الفضاء (E,τ) وبما أن f تقابل فإن $f^{-1}[f(A)]=A$ لذلك تكون المجموعة A مجموعة $\alpha-$ متراصة في الفضاء (E,τ) لذلك فبحسب النتيجة(2) نجد أن المجموعة A مجموعة متراصة في الفضاء (E,τ) وبالتالي فالفضاء (E,τ) فضاء **نيوثر**.

مبرهنة 6:

إن الصورة المباشرة وفق كل α–**هوميومورفيزم** لفضاء $\alpha-$ **نيوثر** هي فضاء **نيوثر**.

البرهان:

ليكن $f:(E,\tau)\rightarrow(X,\sigma)$ تابعاً $\alpha-$ **هوميومورفيزم** بحيث أن الفضاء (E,τ) فضاء $\alpha-$ نيوثر ولنبرهن أن الفضاء (X,σ) فضاء **نيوثر**.

لتكن A مجموعة مفتوحة كيفية في الفضاء (X,σ) عندئذ بحسب كون f تابعاً $\alpha-$ مستمراً تكون $f^{-1}(A)$ مجموعة $\alpha-$ مفتوحة في الفضاء (E,τ). وبما أن (E,τ) فضاء $\alpha-$ نيوثر تكون المجموعة $f^{-1}(A)$ مجموعة $\alpha-$ متراصة فيه لذلك بحسب التمهيدية(1) تكون المجموعة $f^{-1}[f(A)]$

مجموعة $\alpha-$ متراصة في الفضاء (X,σ) ولكن $f^{-1}[f(A)]=A$ لأن f تقابل لذلك تكون المجموعة A مجموعة متراصة في الفضاء (X,σ) وبالتالي فالفضاء (X,σ) فضاء **نيوثر**.

الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا تعريف جديد لفضاء سميناه فضاء $\alpha-$ نيوثر والذي يعد تطويرا لفضاء نيوثر المعروف، ودرسنا أهم خصائص هذا الفضاء الجديد والعلاقة بينه بعض الفضاءات الأخرى. استطعنا من خلال فضاء $\alpha-$ **نيوثر** الجديد الحصول على مجموعة من النتائج التي تعد إضافة في مجال التبولوجيا العامة والتي يمكن البناء عليها والاستفادة منها في مجال الجبر التبادلي وبشكل خاص في الحلقات التبديلية.

نوصي بإيجاد فضاءات أخرى مرتبطة بمفهوم فضاء **نيوثر** بالاستفادة من مفهوم المجموعات قبل المفتوحة والمجموعات نصف المفتوحة.

Reference

1. BORBAKI, I. N., *Commutative Algebra*, Paris, 1971.
2. ENGELKING, R. *General topological*. Warsaw Press, Monographic Mathematics Tom 60, Warsaw, . 1977, 752pages.
3. NJASTED, O. *On some classes of nearly open sets*. Pacific Journal of Math. Vol.15, No. 3, 1965, pp.961-970.
4. MAHESHWARI, S. N.; Thakur, S. S. On α*-compact spaces.* Academic Sciica., Vol. 13, No. 4, 1985.
5. DONTCHEV, J.; GANSTER M. and KANIBIR M. *On some generalizations of Lc-spaces*. Acta. Math.. Univ., Comenianae, Vol. LX 111, 2, 1999, pp.345-353.
6. MASHHOUR, A. S.; HASANEIN, I. A. and EL-DEEB, S.N. *On* α*-continuous and* α *- open mapping.* Acta. Math. Hungar., Vol. 41, 1983, pp.213-218.
7. KASAHARA, S. *Operation- compact spaces*. Mathematics Japonica, 24, 1979, pp. 97-105.
8. ZARIF, K. A.; ABD-ELRAZAK, A. F. *KC-spaces and minimal KC-spaces*. Tishreen University journal for Studies and Scientific Research, Vol. 33, N0. 2, 2011.
9. ZARIF, K. A.; El-KHAFAJY, A. *Study of on separation axioms* : $\alpha T_0, \alpha T_1, \alpha T_2$. Tishreen University journal for Studies and Scientific Research, Vol. 34, N0. 2, 2012.
10. ZARIF, K. A.; El-KHAFAJY, A. A. *Study* of $\alpha-\frac{\pi}{2}$ *spaces*. Takreet. Univ. J. Irak, 2013.
11. ZARIF, K. A.; Warid, A. *Study of* α*-compact spaces*. Tishreen University journal for Studies and Scientific Research, Vol. 37, N0. 2, 2015.
12. ZARIF, K. A.; AL-ASLY, K. N., *Soft* β *-compactness in soft topological spaces.* Tishreen University journal for Studies and Scientific Research, Vol. 42, N0. 3, 2020.
13. ZARIF, K. A.; B. AFISA, *K-Mapping Lindelof and some properties of Lc-space*s. Tishreen University journal for Studies and Scientific Research , Vol. 41 No. 3 (2019)
14. ARKHNGEL SKI. A. V. and PONTRYGIN, L. S. *General Topology* . New Yurok, Vol. 17, 1990, pp. 61-66.