مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٥) العدد (٢) 2021
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (5) No. (2) 2021

إيجاد ثابت إشارة_الحلول لجملة معادلات فولتيرا_أورسون التكاملية الخطية في فضاء اورليتش

د. وديع علي *
د.حسن خليفة **
زكريا الحاج محمد ***

(تاريخ الإيداع ٢٦ / ١ / ٢٠٢١ . قُبل للنشر ٣١ / ٥ / ٢٠٢١)

الملخّص

في هذا العمل هدفنا أن نؤسس معايير وجود حل لجملة معادلات فولتيرا_أورسون التكاملية الخطية في فضاء اورليتش . وهذا العمل هو جزء من المعايير المقدمة لوجود ثوابت _إشارة الحلول الغير مبتذلة , u=(u_1, u_2 ,...,u_n) لجملة معادلات فولتيرا_أورسون التكاملية الخطية في فضاء اورليتش . نقول أن u هو ثابت _إشارة حل إذا كان لكل $1 \leq$ i$\leq$ n تتحقق العلاقة $\theta_i u_i(t) \geq 0$ لكل t ∈ [0,T] .حيث $\theta_i \in \{-1,1\}$ هو ثابت. والبرهان سيجزأ لثلاثة اقسام رئيسية. الأدوات الرئيسية المستخدمة في البرهان معروفة بمبرهنة لوراي _شولدر البديلة كمبرهنة أولى والمبرهنة الثانية عادة تسمى بمبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوسلكي في المخروط .

الكلمات المفتاحية : N _ تابع , المؤثرات التكاملية , فضاء اورليتش , ثابت_ إشارة الحلول , مبرهنة لوراي _شولدر البديلة , مبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوسلكي في المخروط.

* أستاذ– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
** أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٥) العدد (٢) 2021
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (5) No. (2) 2021

find constant_sign solution of a system Volterra_Uryson in orlicz space linear intagral Equations

Dr.Wadiaa Ali*
Dr.Hasan khalifa**
Zakaria Alhag Mohamad***

(Received 26 / 1 / 2021 . Accepted 31 / 5 / 2021)

Abstract

In this work our aim is to establish criteria sush that the system of a Volterra_Uryson linear intagral Equations has a solution in orlicz space . and this work is part of Criteria are offered for the existence nontrivial constant- sign solutions u = $(u_1, u_2,\ldots, n)$ of the system Volterra_Uryson linear intagral Equations in Orlicz spaces. We say u is of constant sign if for each1 ≤ i ≤ n, $\theta_i u_i$ (t) ≥ 0 for t ∈ [0, T], where $\theta_i \in \{1,-1\}$ is fixed.The prove will be divided into three main sections.The main tools used in the proof are the frist theorem is known as Leray_Schauder alternative and the secand is usually called krasnosel'skii's fixed point theorem in a cone .

Key Words: N_Function . integrally operators , W.orlicz space , costant_sign solution , Leray_Schauder alternative theorem , krasnosel'skii's fixed point theorem in a cone .

* Professor ,Department of mathematics ,Faculty of Sciences , Tishreen University ,Lattakia ,Syria .
** Professor ,Department of mathematics ,Faculty of Sciences , Tishreen University ,Lattakia ,Syria .
*** Master Student , Department of mathematics ,Faculty of Sciences , Tishreen University ,Lattakia ,Syria .

إن فضاء اورليتش المدروس بواسطة W.Orlicz and Z.Birnbaum في عام ١٩٣١ هو تعميم لفضاء لبيغ الكلاسيكي L_P في هذا التعميم التابع x^p الداخل في تعريف فضاء لبيغ $(L_P, \mathrm{p} \geq 1)$ ستبدل بالتابع المحدب والأكثر عمومية (s) θ والذي يسمى بتابع يونغ الذي سوف نعتمد عليه في تعريف فضاء اورليتش.

ليكن $y = (y_1 , y_2 , \dots , y_n)$ و $x = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ في R^N وبتالي أذا كان $x \geq y$ فإن $x_i \geq y_i$ لكل $1 \leq i \leq n$. وبشكل مشابه إذا كان $x , y \in R^{N*N}$ (حيث $N * N$ مصفوفة حقيقية) فإن $x \geq y$.

تعطى معادلة فولتيرا _اورسون التكاملية الخطية بالشكل:

$$x(t) = P(t) + \int_0^t f(t, s, x(s))\, ds$$

لقد تم دراستها في فضاء اورليتش المعمم من قبل [2] حيث تم دراسة الشروط الكافية لوجود الحلول في فضاء اورليتش المعمم $L_\varphi (J , X)$ حيث J=[0 ,a] و X فضاء باناخ القابل للفصل وتم أثبات أن S مجموعة الحلول $x \in L_\varphi (J , X)$ لهذه المعادلة متراصة حيث $x: J=[0 ,a] \to X$.

وسنحاول أيجاد ثابت _إشارة الحلول في فضاء اورليتش لجملة معادلات فولتيرا _اورسون التكاملية الخطية التي تأخذ الشكل الأتي:

$$x_i(t) = P_i(t) + \int_0^t f_i\left(t, s, x_i(s)\right) ds \qquad (1)$$

لكل $1 \leq i \leq n$ و $t \in [0,T]$ وبحالة خاصة عندما $P_i(t) = 0$

وسنركز على أيجاد ثوابت _ إشارة الحلول x في فضاء اورليتش أي لكل $1 \leq i \leq n$ وبالإضافة لكون $x_i \in L_\varphi$ فإن $\theta_i x_i \geq 0$ لكل $1 \leq i \leq n$ و $t \in [0 , T]$ حيث $\theta \in \{-1 , 1\}$ هي ثابتة. نلاحظ أن ثوابت _ إشارة الحلول تتضمن الحلول الموجبة عندما $\theta_i = 1$ لكل $1 \leq i \leq n$. سنستخدم مبرهنة لوراي _شولدر البديلة للحصول على معايير الوجود في $L_Q(([0, \mathrm{T}], R^N))^n$ وسوف نطبق مبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوسلكي للحصول على نتائج الوجود لثابت إشارة الحلول في $L_Q(([0, \mathrm{T}], R^N))^n$.

أهمية البحث أهدافه :

تم في هذا البحث مناقشة أيجاد ثابت_إشارة الحلول لجملة معادلات فولتيرا_أورسون التكاملية الخطية الأتية:

$$x_i(t) = P_i(t) + \int_0^t f_i\left(t, s, x_i(s)\right) ds$$

لكل $1 \leq i \leq n$ و $t \in [0,T]$.

في فضاء اورليتش $L_Q(([0, \mathrm{T}], R^N))^n$. و تكمن أهمية البحث في أيجاد ثابت_إشارة الحلول الغير مبتذل للجملة السابقة في قضاء اورليتش.

طرائق البحث ومواده :

استخدمنا طريقة الاستنتاج المباشر بالأضافة الى الاعتماد على بعض المتباينات الشهيرة في التحليل التابعي.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف ١.١[٦]: يدعى التابع $f(x)$ ب $N-$ تابع *إذا إستطعنا كتابته بالتمثيل التالي:*

$$f(x)=\int_0^x p(t)\ dt \qquad (1,1)$$

وهو متناقص عندما يحقق : $t \geq 0$ ومستمر من اليمين عندما $t>0$ موجب عندما *p(t)* حيث

$P(0)=0 \quad , \quad p(\infty)=\lim_{i\to\infty} p(t)=\infty$.

وهو: تابع N –ومن خصائصه أنه تابع محدب وهناك تعريف أخر مكافئ ل

يدعى التابع $f(x)$ *المستمر و المحدب* – N: تابع إذا كان زوجياً ويحقق الشرطين

$$1)\lim_{x\to\infty} f(x)/x=0 \qquad\qquad 2)\lim_{x\to 0} f(x)/x=\infty$$

تعريف ٢.١ [٦]: يقال أن $f(x)$ هو N – *تابع محقق للشرط* Δ_2 *من أجل قيم* x*:* الكبيرة إذا وجد ثابتين

$0 \geq x_0$ ، $K>0$ بحيث التابع

$f(2x) \leq k\ f(x)\ ,\ x \geq x_0$

تعريف ٣.١[١] : يقال إن التابع $f(x)$ N تابع محقق للشرط إذا وجد ثابتين c , x_0 *بحيث:*

$f(y).f(xy) \leq f(x)$; x ,y ; x $\geq x_0$,y $\in L_M$ ، *c =const*

نتيجة ١.١: إذا حقق التابع $f(x)$ N تابع الشرط فإنه يحقق الشرط . 2

إذا كان مكافئاً للتابع: f N – تابع محقق للشرط Δ_3

تعريف ٤.١ يقال أن: التابع x

$f(x)$ $|x|$ N تابع .

خاصة ١.١[٦]: ال N –تابع المحققة للشرط :

و $u(x) \in L_M$ فإن $v(x) \in L_M^*$, $u(x)v(x)$ تابع وكان $N(f(u))$ هذه الخاصية تتلخص في إنه إذا كان

$$f(u) = K|u|^{\alpha}, \alpha > 1$$

خاصة ١.٢ [٦] :

إذا كان $u(x) \in L_M$, $v(x) \in L_M^*$ فإن التابع $w < x, y > = u(x), v(x) \in L_M^*$

ويكون $N(f(u))$ تابعاً محققاً للشرط Δ_2

تعريف١.٥ [1]: تابع يونغ(Young function**)**: يسمى التابع $\theta: \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ بتابع يونغ إذا حقق الشروط:

- θ تابع محدب من الأدنى ونصف مستمرمن الأدنى على المجال $[0,\infty]$ من $\mathbb{R}$
- θ تابع زوجي ويحقق $\theta(0) = 0$
- θ تابع غير مبتذل : أي أنه يختلف عن التابع الثابت $0(s)=0$, $s \in \mathbb{R}$. ومرافقه المحدب

$$\theta^*(s) := \begin{cases} 0 & ,s=0. \\ +\infty & ,s\neq 0. \end{cases}$$

نتيجة ١.٢ : الشرط اللازم والكافي لكي يكون θ تابع يونغ هو ان يكون θ^* تابع يونغ .

تعريف ١.٦[٦] : متمم تابع يونغ (complementary Young function**):**

نفرض θ تابع يونغ عندئذ نرمز ب Ψ بتابع المتمم ل θ إذا كان

$\Psi(y) = \sup\{ xy - \theta(x) : x \geq 0 \}$ لإجل $y \geq 0$

ونسمي كلا من θ و Ψ تابعين متتامين.

متباينة يونغ (Young inequality) [٣]:

بفرض θ و Ψ تابعين متتامين عندئذ متباينة يونغ تعطى ب الشكل :

$x \cdot y \leq \theta(x) + \Psi(y) \quad (x, y \geq 0)$.

١. **الفضاء L_M^* (فضاء اورليتش) [٨]:** قبل التعرف على هذا الفضاء نتطرق إلى :

نظيم اورليتش (W. Orlicz norm):

ليكن $N(f(u)), g(v)$ تابعين كلاً منهما متمم للأخر ،و L_M^* *مجموعة التوابع* $u(x)$ ، L_M *مجموعة التوابع* $v(x)$ *المحققين للشرط :*

$$< u, v > = \int_G u(x)v(x)dx < \infty$$

فتكون كل من L_M^* و L_M مجموعة خطية ووفقاً لمتباينة يونغ (Young. W. H) لأجل كل زوج من التوابع: $u(x), v(x) \in L_M$ نجد:

$$\text{□□□□} <u,v> = \int_G u(x)v(x)dx \le \rho(u,M) + \rho(u,N)$$

بذلك يكون: L_M □□ $L_M{}^*$.

تعريف١.٧**[١]**: يعرَف نظيم أورليتش لتابع $u(x) \in \boldsymbol{L_M}^*$ كما يلي :

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v,N)\le 1} \left| \int_G u(x)v(x)dx \right| .$$

ويحقق الشروط الأتية:

1) $\|u\|_M = 0 \Rightarrow u(x) = 0$

2) $\|\alpha u\|_M = |\alpha| \, \|u\|_M$

3) $\|u_1 + u_2\|_M = \|u_1\|_M + \|u_2\|_M$

عندئذ تكون المجموعة* LM المزودة بالنظيم $\|.\|_M$ فضاء خطي منظم يدعى فضاء أورليتش (space W.Orlicz) وهو فضاء تام وبالتالي هو فضاء باناخ حيث أن النظيم فيه يختلف عن النظيم العادي بمضروب ثابت في الفضاء Lp .

تعريف أخر لفضاء أورليتش[8]:

ليكن θ تابع يونغ عندئذ فضاء اورليتش يعطى بالصيغة:

$$L_\theta(X, \mu) := \{ f \text{ قيوسة}, \exists\, \alpha > 0 ; \int_X \theta(\alpha f) d\mu < \infty \}$$

$$M_\theta(X, \mu) := \{ f \text{ قيوسة}, \forall\, a > 0 ; \int_X \theta(af) d\mu < \infty \}$$

واضح أن $M_\theta \subset L_\theta$.

ومنه نجد أن

$$L_\theta := \{ f \text{ قيوسة}, \|f\|_\theta < \infty \}$$

حيث $\|f\|_\theta$ هو نظيم لوكسيم بورغ المعرف بالشكل :

$$\|f\|_\theta = \inf\{b > 0 ; \int_X \theta\left(\frac{f}{b}\right) d\mu < 1 \} \in [0, \infty) \quad . \forall f \in L_\theta$$

وباستبدال الواحد في a نحصل على نظيم لوكسيم بورغ المعمم.

تعريف١.٨**[1]**: الآن نعرَف نظيم أخر لفضاءأورليتش :

$$|f|_\theta = \mathrm{Sup}\{b > 0 ; \int_X f.g\, d\mu ; g \in L_\theta , \int_X \theta^*(g) d\mu \le 1 \} ; f \in L_\theta$$

وهو معرف جيدا بالإعتماد على متراجحة هولدر وبتالي فهو يكتب بالشكل :

$$|f|_\theta = \mathrm{Sup}\{b > 0 ; \int_X f.g\, d\mu ; g \in L^*{}_\theta , \|f\|_{\theta^*} < 1\}$$

وهو مكافئ لنظيم لوكسيم بورغ .

نتيجة١.٣[1] :

$$\|f\|_\theta \le |f|_\theta \le 2\|f\|_\theta$$

تعريف: (شرط كاراثيودوري) [3]

يقال عن التابع الجقيقي $f(x,u)$ بالمتحوليين u ، $x \in G$ أنه يحقق شرط كاراثيودوري إذا وفقط اذا كان مستمر بالمتحول u في كل مكان تقريبا لأجل جميع $x \in G$ وقيوس ب x عندما يكون u ثابت.

والأن سنذكر تعريف فضاء اورليتش الذي سوف نعتمد عليه في عملنا الاحق:

تعريف فضاء أورليتش[١]:

ليكن P و Q هي N –توابع متتامة ولنرمز لصفوف اورليتش بالرمز φ_p المؤلفة من التوابع القابلة للقياس $y:[0\ ,\ T]\to R^N$

أي

$$\rho\ (y\ ,P) = \int_0^T P\big(y(x)\big)dx\ < \infty$$

ولنرمز ب

$$L_P([0,T],R^N)$$

لفضاء اورليتش المؤلف من مجموعة كل التوابع القابلة للقياس $y:[0\ ,\ T]\to R^N$ والتي تحقق:

$$|f|_{P,d} = \mathrm{Sup}_{\substack{\rho\,(y\,,P)\le 1 \\ v\,\in\,\varphi_p}} \left|\int_0^d y(x).\,v(x)\ dx\ \right| < \infty$$

حيث $\left(L_P([0,T],R^N)\ ,\ |.|_{P,d}\right)$ هو فضاء باناخ .

نتيجة ١.٣[1] :

$$E_P \subseteq L_P \subseteq \varphi_p$$

وبكون

$$E_P = L_P = \varphi_p$$

إذا كان P يحقق الشرط Δ_2 .

مبرهنة لوراي _شولدر البديلة (Leray_Schauder alternative theorem) [5] :

ليكن B فضاء باناخ (فضاء اورليتش) و $E \subseteq B$ مجموعة جزئية مغلقة ومحدبة ولنفرض U مجموعة جزئية مفتوحة نسبيا من E و $0 \in U$ و $S:\overline{U}\to E$ تحويل متراص ومستمر عندئذ واحد مما يلي يتحقق :

a) S تملك نقطة ثابتة في U .

b) يوجد $\lambda \in (0\ ,1)$ و $u \in \partial U$ بحيث أن $x = \lambda Sx$.

مبرهنة كراسنوسيلكي للنقطة الثابتة (Krasnosel'skii fixed point theorem in a Cone)[2]:

ليكن $B = (B\ ,\ \|.\|)$ فضاء باناخ و $C \subset B$ مخروط في B ونفرض Ω_1 ، Ω_2هي مجموعات مفتوحة في B

مع $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ و $0 \in \Omega_1$ وليكن $S:\ C \to (\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$ مؤثر مستمر وتام الإستمرار بحيث :

a) $\|Su\| \ge \|u\|\ ;\ u\in C \cap \partial\Omega_2$ و $\|Su\| \le \|u\|\ ;\ u\in C\cap\partial\Omega_1$

أو

b) $\|Su\| \geq \|u\|\,;\, u\in C\cap\ \partial\Omega_2$ و $\|Su\| \leq \|u\|\,;\, u\in C\cap\ \partial\Omega_1$

عندئذ S تملك نقط ثابتة في $C\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$.

٢.النتائج والمناقشة:

أولا" : نتائج الوجود للجملة (١) :

سوف نطبق مبرهنة لوراي _شولدر البديلة لنضمن نتائج الوجود للجملة (١) في $L_Q(([0,\mathrm{T}],R^N))^n$

ليكن B فضاء باناخ ولنعرف المؤثر $S : B\to B$ المعرف بالشكل

$$S(t)=(S_1x(t),\dots,S_nx(t))$$

لكل $1 \leq i \leq n$ حيث

$$S_ix(t)=\int_0^t x_i\left(t,s,x_i(s)\right)ds \qquad (2)$$

لكل $1 \leq i\leq n$ و $t\in[0,T]$. واضح أن النقطة الثابتة للمؤثر S هي حل للجملة (١). نعلم أن المؤثر S_i يمكن أن يكتب بالشكل :

$$S_i=A_i\Gamma_i \qquad (3)$$

حيث $\Gamma_i : B\to R^N$ معرف بالشكل :

$$\Gamma_I x(t)=f_i(t,s,x(s))$$

و $A_i : R^N\to R^N$ المعرف بالشكل :

$$A_I x(t)=\int_0^t x(s)ds\,;\, t\in[0,t]$$

سنذكر بعض النتائج التي سنعتمد عليها أولى نتائجنا هي تعميم مبدأ الوجود في فضاء باناخ B والأداة المستخدمة هي مبرهنة لوراي _شولدر.

مبرهنة ٢.١[5]:

ليكن $X=(X\,,|.|_X)$ فضاء باناخ وليكن $X^n=X\times X\times\dots\times X$ مع النظيم $\|.\|$ حيث

$$\|u\|=Max_{1\leq i\leq n}|u_i|_X\,;\,u\in X^n \qquad (I)$$

وليكن Y فضاء باناخ و لكل $1 \leq i \leq n$ نفرض

$$(II) \qquad \Gamma_i : X^n\to Y \text{ و } A_i : Y\to X \text{ و}$$

$$(III) \qquad A_iF_i : X^n\to X$$

هو مؤثر مستمر وتام الاستمرار .

إضافة الى ذلك لكل $\lambda\in(0,1)$ يوجد M_0 ثابت موجب لا يتعلق ب λ بحيث أن لاجل أي حل $x\in X^n$ للجملة

$$x_i=\lambda A_iF_i\,x\,;\,1 \leq i\leq n \qquad (Iv)$$

نملك $\|u\|\neq M_0$ عندئذ الجمله (١) تملك حلا $x^*\in X^n$ مع $\|x^*\|\leq M_0$.

البرهان :

إن حل الجملة (Iv) هو ذاته النقطة الثابتة للمعادلة x=λSx ومن (III) نجد أن المؤثر S هو مؤثر مستمر وتام الاستمرار ولنفرض

$$U = \{ x \in X^n \ \ | \|x\| < M_0 \}$$

ولنفرض أن x حل ل (Iv) لكل $\lambda \in (0\ ,1)$ وهذا يعني أن $x \notin \partial U$ وبتالي الشرط (b) من مبرهنة لوراي شولدر البديلة غير محقق يقتضي تحقق الشرط (a) من ذات المبرهنة مما يعني أن الجملة (١) تملك حلا $x^* \in \bar{U}$ مع $\| x^* \| \le M_0$ هو ذاته النقطة الثابتة ل S . ثاني نتائجنا هي الوجود في فضاء اورليتش بالإعتماد على المبرهنة (٢.١):

مبرهنة ٢.٢[4]:

ليكن P و Q هي N –توابع متتامة ولنفرض تحقق الشروط الأتية:

A. Ø هي N –توابع و Q تحقق الشرط Δ_2 ..

B. لكل $1 \le i \le n$ التابع $x_i : [0,T]\times [0,T]\times (R^N)^n \to R$ هو تابع كاراثيودوري أي

i – كل $u \in (R^N)^n$ فالتحويل $f(t\ ,s) \to x_i(t,s\ ,u(s))$ قابل للقياس .

ii – ولكل $(t\ ,s) \in [0,T]\times [0,T]$ فاتابع $x_i(t,s\ ,u(s))(t\ ,s) \to$ مستمر تقريبا في كل مكان لكل $t \in [0,T]$.

C. لكل $r > 0$ و $1 \le i \le n$ يوجد تابع قابل للقياس

$$q_i^{\,r} : [0,T]\times [0,T] \to [0,\infty) \quad و \quad P_i^{\,r} : [0,T]\times [0,T] \to [0,\infty)$$

بحيث أنه لكل $t\ ,s\ ,\tau \in [0\ ,T]$ و $u \in (R^N)$ مع $\max|x_j|_{1 \le j \le n} \le r$

فإن $|x_i(t,s\ ,x)| \le P_i^{\,r}(t,s)$ و $|x_i(t,s\ ,x) - x_i(\tau\ ,s\ ,x)| \le q_i^{\,r}(t,s)$

D. لكل $1 \le i \le n$ نملك

$$\lim_{t \to \tau} \int_0^t q_i^{\,r}(t,\tau,s)ds = 0\ , \forall\ \tau \in [0,T]$$

E. يوجد $N_r < \infty$ بحيث أنه لكل $1 \le i \le n$ ولكل $t \in [0\ ,T]$ فإن

$$\int_0^t q_i^{\,r}(t,\tau,s) \le N_r$$

ولنفرض أنه يوجد ρ لا يتعلق ب λ بحيث $\|x\| \ne \rho$ عندئذ لأجل أي حل $u \in X$ للجملة

$$x_i(t) = \lambda \int_0^t f_i\left(t,s,x_i(s)\right) ds \qquad (2)$$

لكل $1 \le i \le n$ ولكل $t \in [0\ ,T]$.عندئذ الجملة (١) تملك على الأقل حلا واحد $x \in X$ بحيث $\|x\| = \rho$.

البرهان :

واضح أن حل الجملة (٢) يكافئ إيجاد نقطة ثابتة للمعادلة

$$x = \lambda Sx \qquad (3)$$

حيث S معرفة بالشكل :

$Su(t)=(S_1u(t) ,\ldots, S_nu(t))$

وحيث

$$S_iu(t) = \int_0^t x_i\left(t,s,x_i(s)\right)ds$$

لكل $1 \le i \le n$ و $t \in [0,T]$.

لنبرهن أن المؤثر S معرف جيدا من C الىC ، ولبرهان ذلك يكفي أن نبرهن ان $S_i : C \to C$ هو معرف جيدا لكل $1 \le i \le n$. نلاحظ أنه لكل u∈C يوجد

$r > 0$ بحيث $\|u\| < r$

ومن الشرط **B** وكون x_i هو تابع كاراثيودوري(أي x_i مستمر لكل $1 \le i \le n$)

فإنه لكل $t_1, t_2 \in [0,T]$ ولكل $1 \le i \le n$ نجد:

$$\begin{aligned}|S_iu(t_1) - S_iu(t_2)| &= \left|\int_0^t x_i\left(t_1,s,x_i(s)\right)ds - \int_0^t x_i\left(t_2,s,x_i(s)\right)ds\right| \\ &= \left|\int_0^t \left(x_i\left(t_1,s,x_i(s)\right) - x_i\left(t_2,s,x_i(s)\right)\right)ds\right| \\ &= \int_0^t \left|x_i\left(t_1,s,x_i(s)\right) - x_i\left(t_2,s,x_i(s)\right)\right|ds\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |S_iu(t_1) - S_iu(t_2)| \xrightarrow[t_1 \to t_2]{} 0 \qquad \ldots.(*)$$

هذا يعني أن المؤثر $\Gamma_i : C \to C$ هو مؤثر معرف جيدا .

وبإستخدام مبرهنة ارزيلا – اسكولي (Arzela–Ascoli theorem)[1] :

والتي تنص:

لتكن $M \subseteq L_Q([0,T], R^N)$ فاذا كانت M محدودة بانتظام ونصف مستمرة عندئذ فإن M متراصة نسبيا في $L_Q([0,T], R^N)$

نرى أن المؤثر S هو مؤثر تام الاستمرار ولبرهان ذلك يكفي أن نبرهن أن $S_i : C \to C$ هو مؤثر تام مستمر لكل $1 \le i \le n$. لتكن Ω مجموعة محدودة في C (أي لكل u∈C فإن $|u|| \le r$) وسوف نبرهن أن $S_i\ \Omega$ متراصا نسبيا لكل $1 \le i \le n$. واضح أن $S_i\ \Omega$ محدود بانتظام (لان Ω مجموعة محدودة في مجموعة محدبة C في فضاء باناخ(اورليتش)) وبالإعتماد على الشرط C لكل $r > 0$ و $1 \le i \le n$ يوجد تابع قابل للقياس $P_i^{\,r}$بحيث أنه مع $\max|x_j|_{1 \le j \le n} \le r$ فإن $|x_i(t,s,x)| \le P_i^{\,r}(t,s)$ لكل $u \in (R^N)^n$ وتقريبا في كل مكان لكل $t \in [0,T]$.وبتالي لكل $u \in \Omega$ ولكل a.e $s \in [0,T]$ نجد

$$|S_iu(t)| = \left|\int_0^t x_i\left(t,s,x_i(s)\right)ds\right| = \int_0^t \left|x_i\left(t,s,x_i(s)\right)\right|ds$$

$$\leq \int_0^t P_i{}^r(\mathrm{t,s})\, ds$$

$$\leq N_r$$

وذلك بالإعتماد على الشرط **(E)** يوجد $N_r < \infty$ بحيث أنه لكل $1 \leq$ i$\leq$ n ولكل [0 ,T]∋ t فإن

$$\xRightarrow{\max_{1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}}} |\mathrm{S}_i u\ (t)|_0 \ \leq r$$

$$\Longrightarrow \|\mathrm{S}_i u\ \| \ \leq r \ \ , \forall\, u \in \Omega$$

مما يعني أن S_i محدودة بانتظام.

ولنبرهن الان ان $\mathrm{S}_i\ \Omega$ هو مؤثر نصف مستمر وبنفس الخطوات المتبعة في (*) نجد أن $\mathrm{S}_i\ \Omega$ هو مؤثر نصف مستمر .وبالإعتماد على ماسبق وعلى مبرهنة لوراي شولدر البديلة [1] لنفرض

U= { x ∈ B $|\|x\| < M_0$ }

وبالإعتماد على الفرض كون $\|x\| \neq$ ρ نحن لا نستطيع أن نستنتج الشرط (b) من مبرهنة لوراي شولدر ،مما يعني أن الشرط (a) من نفس المبرهنة محقق .

هذا يعني أن المعادلة (٣) تملك نقطة ثابتة في $\overline{U}$. عندئذ الجملة (١) تملك على الأقل حلا واحد x∈X بحيث $\|x\| =$ ρ .

الأن سوف نطبق مبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوسلكي للحصول على نتائج الوجود لثابت-إشارة الحلول للجملة (١) في فضاء أورليتش $L_Q(([0,\mathrm{T}], R^N)\ )^n$ وبنفس الطريقة المتبعة سابقا" :

ليكن B فضاء باناخ معرف بالشكل

$$B = \{\ x\ |x \in \left(L_Q\left(([0,\mathrm{T}], R^N)\right)^n\right\}$$

مع النظيم

$$\|u\|_Q = Max_{1\ \leq\ \mathrm{i} \leq\ \mathrm{n}} |u_i|_Q$$

حيث

$$|x_i|_Q = \mathrm{Sup}_{\substack{\rho\,(\mathrm{y}\,,\psi) \leq 1 \\ v\, \in\, \varphi_\psi}} \left| \int_0^T x_i(\mathrm{x}).\, \mathrm{v(x)\ dx}\ \right|$$

لكل $1 \leq$ i$\leq$ n .

ولنعرف المؤثر S : B→B بالشكل

S (t)=($\mathrm{S}_1 x(t)$,…, $\mathrm{S}_n x(t)$)

لكل $1 \leq$ i $\leq$ n حيث

$$\mathrm{S}_i x(t) = \int_0^t f_i\left(t, s, x_i(s)\right) ds \qquad (2)$$

لكل $1 \leq$ i$\leq$ n و t ∈ [0,T] .

واضح أن النقطة الثابتة للمؤثر S هي حل للجملة (١) .

مبرهنة ٢.٣:

لتكن $\theta\in\{-1\ ,1\}$ ثابتة ولنفرض أن الشروط (A,B,C,D,E) من(المبرهنة ٢.٢ السابقة) محققة علاوة على ذلك لنفرض:

F. لتكن

$$K \coloneqq \{u\in B\ \ |\theta_i x_i\ \geq 0\ ; t\in [0,\mathrm{T}] \text{و} 1\ \leq\ \mathrm{i}\ \leq\ \mathrm{n}\}$$

و

$$\widetilde{\mathrm{K}} \coloneqq \{u\in B\ \ |\theta_i x_i\ > 0\ ; t\in [0,\mathrm{T}] \text{و} 1\ \leq\ \mathrm{i}\ \leq\ \mathrm{n}\} = K\backslash\{0\}$$

عنديذ لكل $1 \leq i \leq n$ نفرض أن

$$\theta_i x_i\,(t,s,x) \geq 0\ ; (t,s,x)\in\ \ [0,\mathrm{T}]\times [0,\mathrm{T}]\times\widetilde{\mathrm{K}}$$

و

$$\theta_i x_i\,(t,s,x) > 0\ ; (t,s,x)\in\ \ [0,\mathrm{T}]\times [0,\mathrm{T}]\times\mathrm{K}$$

G. لكل $1 \leq i \leq n$ نفرض

$$\theta_i x_i\,(t,s,x) \geq K_i(t,s)W_{i1}(|x_1|)\dots W_{in}(|x_n|)$$

لكل $(t,s,x)\in\ \ [0,\mathrm{T}]\times [0,\mathrm{T}]\times\widetilde{\mathrm{K}}$ ولكل $1\ \leq j\ \leq\ n$ فإن K_i و W_{ij} هي توابع مستمرة

و $W_{ij}\colon [0\,,\infty) \to [0\,,\infty)$ هي توابع غير متناقصة و $K_i\colon [0\,,T] \times [0\,,T] \to [0\,,\infty)$

H. يوجد $\alpha > 0$ بحيث أنه لكل $1 \leq i \leq n$ فإنه

$$\alpha > d_i W_{i1}(\alpha)\dots W_{in}(\alpha)$$

حيث

$$d_i = Sup_{t\in[0,T]}\int_0^T K_i(t\,,s)dt$$ محققة

ومنه فإن الجملة (١) تملك ثابت –إشارة حل لكل $u\in X$ $\|u\| < \alpha$ أي $0 \leq \theta_i x_i\,(t) \leq \alpha$ لكل $1 \leq i \leq n$ و $t\in[0,T]$.

البرهان :

سوف نعتمد على المبرهنة (٢.٢) في البرهان

لناخذ الجملة

$$x_i(t) = \int_0^t \hat{x}_i\,\big(t,s,x\,(s)\big)\,ds \qquad (3)$$

لكل $1 \leq i \leq n$ و $t\in[0,T]$.

حيث $\hat{x}_i\colon [0\,,T] \times [0,T] \times R^N \to R$ المعرف بالشكل

$$\hat{x}_i\,(t,s,x_1,\dots,x_n) =\ x_i(t,s,\theta_1|x_1|,\dots,\theta_n|x_n|) \qquad (4)$$

لكل $1 \leq i \leq n$.

وبما أن $(\theta_1|x_1|,\dots,\theta_n|x_n|)\in\widetilde{K}$ وبالإعتماد على الشرط F نجد أن التابع $\hat{x}_i$ معرف جيدا وكاثيودوري (من الشرط B). ولنثبت أن الجملة (٣) تملك حلا لذلك لنأخذ الجملة

$$x_i(t)=\int_0^t \hat{g}_i\left(t,s,x\,(s)\right)ds \qquad (5)$$

لكل $1\le i\le n$ و $t\in[0,T]$ و $\lambda\in(0,1)$. لنفرض أن $x\in X^n$ حلا للجملة (٥) ولنبين أن $\|x\|\le\alpha$

.

والأن بالإعتماد على المبرهنة (٢.٢) والشرط F ينتج أن الجملة (٢) تملك حلا في فضاء اورليتش X .

وبتطبيق (٤) و الشرط F على (٥) نحصل على

$$\theta_i x_i(t)=\int_0^t \theta_n\hat{g}_i\left(t,s,x_1\,(s),\dots,x_n\,(s)\right)ds$$

$$=\lambda\int_0^t \theta_n\hat{g}_i\,(t,s,\theta_1|x_1|,\dots,\theta_n|x_n|)\,ds \;\ge 0$$

$$\Longrightarrow\; \theta_i x_i(t)\ge 0$$

ومنه فإن

$$|x_i(t)|=\theta_i x_i(t) \qquad (6)$$

لكل $1\le i\le n$ و $t\in[0,T]$.

وبتطبيق (٦) والشرط G لكل $1\le i\le n$ و $t\in[0,T]$ نجد:

$$|x_i(t)|=\theta_i x_i(t)=$$

$$=\lambda\int_0^t \theta_n\hat{g}_i\,(t,s,\theta_1|x_1|,\dots,\theta_n|x_n|)\,ds$$

$$=\int_0^t \theta_n\hat{g}_i\,(t,s,\theta_1|x_1|,\dots,\theta_n|x_n|)\,ds$$

$$\overset{G\text{شرط}}{\lesssim}\int_0^t K_i(t,s)W_{i1}(|x_1|)\dots W_{in}(|x_n|)\,ds$$

وبأخذ $Sup_{t\in[0,T]}$ للطرفين نجد

$$Sup_{t\in[0,T]}|x_i(t)|\le Sup_{t\in[0,T]}\int_0^t K_i(t,s)W_{i1}(|x_1|)\dots W_{in}(|x_n|)\,ds$$

وبالإعتماد على الشرط H نجد

$$|x_i|_0\le d_iW_{i1}(|x_1|)\dots W_{in}(|x_n|) \qquad (7)$$

لكل $1\le i\le n$.

والأن لنفرض $\|x\|=|x_m|_0$ لبعض $m\in\{1,\dots,n\}$ عندئذ من (٧) ينتج

$$\|x\|\le d_iW_{i1}(|x_1|)\dots W_{in}(|x_n|) \qquad (8)$$

وبتالي بمقارنة (٨) مع الشرط H نجد:

$$\|x\| \neq \alpha$$

وبتالي (٦) محققة .

ومنه من المبرهنة (٢.٢) نستنتج ان الجملة (٣) تملك حلا $x^* \in L_Q(([0,T],R^N))^n$ مع

$$\|x^*\| \leq \alpha$$

و

$$x_i(t) = \int_0^t \hat{g}_i\left(t,s,x^*{}_1(s),\dots,x^*{}_n(s)\right) ds$$

لكل $1 \leq i \leq n$, $t \in [0,T]$.

وبنفس المناقشة نجد

$$|x^*{}_i(t)| = \theta_i x^*{}_i(t)$$

لكل $1 \leq i \leq n$, $t \in [0,T]$. ومنه نستنتج أن x^* هو ثابت –إشارة للجملة (١) في فضاء اورليتش و

$$0 \leq \|x^*\| \leq \alpha$$

والان باستخدام (٤) و (٩) فإنه لكل $1 \leq i \leq n$, $t \in [0,T]$ نملك

$$x^*{}_i(t) = \int_0^t \hat{g}_i\left(t,s,x^*{}_1(s),\dots,x^*{}_n(s)\right) ds$$

$$= \int_0^t \hat{g}_i\left(t,s,\theta_1|x^*{}_1(s)|,\dots,\theta_n|x^*{}_n(s)|\right) ds$$

$$\overset{|x_i^*| = \theta_i x_i^*}{\cong} \int_0^t \hat{g}_i\left(t,s,\theta_1{}^2 x^*{}_1(s),\dots,\theta_n{}^2 x^*{}_n(s)\right) ds$$

وبتالي فإن x^* هو حلا للجملة (٢) وبذلك يكون قد تم البرهان.

ملاحظة :

في المبرهنة السابقة (٢.٣) نلاحظ أن ثابت –إشاره الحل يمكن أم يكون مبتذل ، لذلك في المبرهنة الأتية سنحاول إيجاد ثوابت–إشارة الحلول الغير مبتذلة للجملة (٢) في فضاء اورليتش وذلك بالإعتماد على مبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوسلكي.

لنعتبر فضاء باناخ

$$\left((L_Q(([0,T],R^N))^n, \|.\|_{\emptyset,T}\right)$$

ولنعرف المخروط

$$C_\gamma := \{ u \in (L_Q(([0,T],R^N))^n \mid \forall\ 1 \leq i \leq n;\ \theta_i x_i(t) \geq \gamma(t)\|u\|_{\emptyset,T}\ ;\ t \in [0,T] \text{ a.t } \}$$

ولنفرض $\gamma(t) > 0$ لكل $t \in [0,T]$ a.t و $|\gamma|_{\emptyset,T} \leq 1$ و $\gamma \in (L_Q(([0,T],R^N))$.

ولنبن أن النقطة الثابتة للمؤثر S في C_γ هي ثابت –إشارة حل للجملة (١) في $(L_Q(([0,T],R^N))^n$.

ولنفرض $0 < \beta < \alpha$ ولنعرف

$$\Omega_\alpha := \{ u \in (L_Q(([0,T],R^N))^n \mid \|u\|_{\emptyset,T} < \alpha \}$$

و

$$\Omega_\beta := \{ u \in (L_Q(([0,\mathrm{T}],R^N))^n \ \big| \|u\|_{\emptyset,T} < \beta \ \}$$

والمبرهنة الأتية تكافئ أيجاد ثابت –إشارة الحلول الغير مبتذلة للجملة (١).

مبرهنة (٢.٤) :

لنفرض أن الشروط A, B, C, D,E , F, G من المبرهنة السابقة محققة ولنفرض تحقق الشروط :

K. يوجد مجال $[a,b] \subseteq [0,T]$ ولكل $1 \le i \le n$ يوجد $M_i \in [0,T]$ وتابع قابل للقياس $H_i; [0,T] \times \widetilde{K} \to [0,\infty)$ بحيث

$$\theta_i x_i\,(t,s,x) \ge M_i H_i(s,x)$$

لكل $1 \le i \le n$ و $t \in [0,T]$ و $x \in \widetilde{K}$ و

$$\theta_i x_i\,(t,s,x) \le H_i(s,x)$$

لكل $1 \le i \le n$ و $t \in [0,T]$ و $x \in \widetilde{K}$.

L. لكل $1 \le i \le n$ يوجد $\tau_{ij}; [0,T] \times [a,b] \to [0,\infty)$ قابل للقياس لبعض $j \in \{1,2,\dots,n\}$ بحيث

$$\theta_i x_i\,(t,s,x) \ge \ \tau_{ij} W_{ij}(s,x)$$

لكل $(t,s,x) \in [0,T] \times [a,b] \times \widetilde{K}$

M. لكل $1 \le i \le n$ يوجد $\beta > 0$ بحيث لكل $u \in [\beta M_i, \beta]$ عندئذ يكون ما يلي محقق لبعض $i \in \{1,2,\dots,n\}$ (حيث i لا يتعلق ب j)

$$u \ \le W_{ij}(u) M_j \int_a^b \tau_{ij}\ (\ \sigma_{ij}\,, s) ds$$

حيث $\tau_{ij} \in [0,T]$ موجود بحيث

$$\int_a^b \tau_{ij}\ (\ \sigma_{ij}\,, s) ds \ = Sup_{\mathrm{t}\in[0,T]} \int_a^b \tau_{ij}\ (t\,, s) ds$$

عندئذ فإن الجملة (١) تملك ثابت –إشارة حل $x \in (L_Q(([0,\mathrm{T}],R^N))^n$ بحيث

١- $0 < \alpha < \|x\| < \beta$ ويوجد $i \in \{1,2,\dots,n\}$ مع $Min_{\mathrm{t}\in[a,b]} \theta_i x_i\,(t) > \ M_i \alpha_i$
أذا كان $\alpha < \beta$.

٢- $0 < \beta < \|x\| < \alpha$ يوجد $i \in \{1,2,\dots,n\}$ مع $Min_{\mathrm{t}\in[a,b]} \theta_i x_i\,(t) \ge \ M_i \alpha_i$
أذا كان $\beta < \alpha$.

البرهان :

المؤثر $S: \quad (L_Q(([0,\mathrm{T}],R^N))^n \to (L_Q(([0,\mathrm{T}],R^N))^n$ هو مؤثر مستمر وتام الاستمرار بالإعتماد على الشروط A,B,C,D(سنبرهنة لاحقا)

ولنعرف المخروط

$$C := \{ u \in (L_Q(([0,\mathrm{T}],R^N)) \ \big| \forall\ 1 \ \le \ \mathrm{i} \le \ \mathrm{n}; M_i |x|_0 \ge \gamma(t) \|u\|_{\emptyset,T}\,; t \in [0,\mathrm{T}]\ \mathrm{a.t}\ \}$$

ولنبرهن أن المؤثر S هو تحويل من Cالى C ، لأجل هذا ، لكل $u \in C$ وبما أن $C \subseteq \widetilde{K}$ ينتج من E أن

$$\theta_i(S_i x) = \int_0^t x_i\,(t, s, x(s))ds \; \geq 0 \qquad (9)$$

لكل $1 \leq i \leq n$ و $t\in[0,T]$. وبتالي بالإعتماد على الشرط H نجد أن

$$|S_i x(t)| = \theta_i S_i x(t) \leq \int_0^t H_i\left(s, x(s)\right)\;ds\;; \qquad (10)$$

لكل $1 \leq i \leq n$ و $t\in[0,T]$. والتي تتحول ل

$$|S_i x| \leq \int_0^t H_i\left(s, x(s)\right)\;ds\;;$$

لكل $1 \leq i \leq n$ و $t\in[0,T]$.

والان بتطبيق الشرط H و k نجد أنه لكل لكل $1 \leq i \leq n$ و $t\in[0,T]$ فإن

$$\theta_i S_i x(t) \geq \int_0^t M_i H_i\left(s, x(s)\right)\;ds \geq \; M_i\;|S_i x|_0$$

ومنه بأخذ مع $Min_{t\,\in[a,b\}}$ للطرفين نجد

$$Min_{t\,\in[a,b\}}\theta_i S_i x(t) \;\geq\; M_i\;|S_i x|_0 \qquad (11)$$

وبمقارنة (٩) و (١١) نجد أن

$$S_i x \in C$$

أي

$$S\,(C) \subseteq \; C$$

أي أن المؤثر S معرف جيدا وهو مستمر وتام الاستمرار .

بقي أن نبرهن تحقق الشرطين الاتيين:

$\|Su\| \leq \|u\|\,;\, u\in C \cap\; \partial\Omega_1 \;\; -\boldsymbol{i}$

$\|Su\| \geq \|u\|\,;\, u\in C \cap\; \partial\Omega_2 \;\; -\boldsymbol{ii}$

لنبرهن تحقق الشرط الأول (i):

لنفرض $x\in \partial_C\Omega_\alpha$ ومنه نحصل على $\|x\| = \alpha$ وباستخدام الشروط K و F و G ولكل $1 \leq i \leq n$ و $t\in[0,T]$ نجد

$$\begin{aligned}|S_i x(t)| = \theta_i S_i x(t) &\leq \int_0^t H_i\left(s, x(s)\right)\;ds \\ &\leq \int_0^t K_i(t,s) W_{i1}(|x_1(s)|) \ldots W_{in}(|x_n(s)|)ds \\ &\leq \int_0^t K_i(t,s) W_{i1}(\alpha) \ldots W_{in}(\alpha)ds \\ &\leq d_i W_{i1}(\alpha) \ldots W_{in}(\alpha) \\ &< \; \alpha = \|x\|\end{aligned}$$

أي أن

$$|S_i x(t)| \leq \|x\|$$

لكل $1 \leq$ i$\leq$ n ومنه فإن

$$\|Sx\| = Max_{\ 1 \leq i \leq n} |S_i x|_0 \leq \|x\| \Longrightarrow \|Sx\| \leq \|x\|, \forall\ x \in \partial_C \Omega_\alpha$$

مما يعني أن الشرط الأول محقق

لنبرهن تحقق الشرط االثاني (ii):

لنفرض $x \in \partial_C \Omega_\beta$ ومنه نحصل على $\|x\| = \beta$ ولنفرض $\|x\| = |x_m|_0$ لبعض $m \in \{1,\dots,n\}$ ومنه فإن

$$|x_m|_0 = \beta \text{ و } |x_m(t)| \in [\beta M_i, \beta] \text{ لكل } t \in [0, T]$$

ومن الشرطين I و G فإن مايلي محقق لبعض $i \in \{1,\dots,n\}$ (i لا يتعلق ب m)

$$|S_i x(\sigma_{im})| = \theta_i S_i x(\sigma_{im}) = \int_0^t x_i\left(\sigma_{im}, s, x(s)\right) ds$$

$$\geq \int_0^t x_i\left(\sigma_{im}, s, x(s)\right) ds$$

$$\geq \int_a^b x_i\left(\sigma_{im}, s, x(s)\right) ds$$

$$\geq \int_a^b \tau_{im}(\sigma_{im}, s)\, W_{in}(|x_i(s)|) ds$$

$$\geq \int_a^b \sigma_{im}(\sigma_{im}, s) \frac{|x_i(s)|}{M_M \int_a^b \tau_{im}(\sigma_{im}, u) du} ds$$

$$= \beta = \|x\|$$

ومنه لكل $1 \leq$ i$\leq$ n فإن $|S_i x|_0 \geq \|x\|$ وبتالي وباخذ $Max_{1 \leq i \leq n}$ للطرفين نجد فإن

$$\|S\,x\| \geq \|x\| \text{ لكل } x \in \partial_C \Omega_\beta$$

وبتالي بالإعتماد على مبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوسلكي في المخروط نستنتج أن S تملك نقطة ثابتة $x \in (\overline{\Omega_\beta} \setminus \Omega_\alpha)_C$

ولنفرض $\alpha < \beta$ من دون التقليل من عموميه المسألة لذلك فإن $\alpha \leq \|x\| \leq \beta$ وبنفس المناقشة التي تمت في القسم الأول من برهان المبرهنة (٣) نجد أن $\|x\| \neq \alpha$ ومنه نجد أن

$$\alpha < \|x\| \leq \beta$$

والان يوجد $i \in \{1,\dots,n\}$ مع $\|x\| = |x_i|_0$ وبملاحظة أن $x \in C$ نجد

$$min_{t \in [a,b].} \theta_i x_i(t) \geq M_i |x_i|_0 = M_i \|x\| > M_i \alpha$$

$$\Longrightarrow min_{t \in [a,b].} \theta_i x_i(t) > M_i \alpha$$

وبنفس المناقشة:

أذا كان $\beta < \alpha$ من دون التقليل من عموميه المسألة لذلك فإن $\beta \leq \|x\| \leq \alpha$ ومنه نجد أن $\|x\| \neq \beta$ وبتالي

$$\beta < \|x\| \leq \alpha$$

وبنفس الخطوات السابقة نجد أنه لكل $x \in C$ فإن

$$min_{t\in[a,b].}\theta_i x_i(t) \geq M_i|x_i|_0 = M_i\|x\| > M_i\alpha$$
$$\Longrightarrow min_{t\in[a,b].}\theta_i x_i(t) > M_i\alpha$$

ومنه تم البرهان .

المراجع :

[1] M.A. Krasnosel"ski and Ya.B. *Rutickii.convex functions and orlicz spac,P.Noordoff Ltd,*Groningen,1961.

[2] *R.Pluciennik and S.Szufla.Nonlinear voltera equation in orlicz spase,Demonstration Mathematica*,Vek.XVII,No2,1984.

[3] M.M. Rao and Ren.theory of orlicz space,*Volume146 of Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker, Inc,1991.

[4] R.P. Agarwal, D. O'Regan, P.J.Y. Wong, *Constant-sign solutions of a system of Volterra integral equations in Orlicz spaces.* J. Integr. Equat. Appl. 20, 337–378 ,2008.

[5] R.P. Agarwal, D. O'Regan, P.J.Y. Wong, *Solutions of a system of integral equations in Orlicz spaces.* J. Integr. Equat. Appl. 21, 469–498 ,2009.

[6] *A. Bakdash, Continuity and continuing full 0f the integrations linear operators the N-function,* in the W.Orlicz space. J.Tishreen University for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (1) 2013.

[7] K.Hoffiman , *Banach space of analytic function* ,Dover publications ,Inc ,Mineola ,New York, 2007.

[8] P.Harjulehto,P.HÄSTÖ *.Orlicz Spasce And Generalized Orlicz*,2018.