مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (5) 2021

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (5) 2021

دراسة تقريب الدوال في بعض الصفوف المعممة بإستخدام طريقة هاوسدورف

د منير مخلوف*

رنيم فجر**

(تاريخ الإيداع 26/9/ 2021– تاريخ النشر 7/ 11/ 2021)

□ ملخّص □

في هذا البحث، سوف ندرس مسألة درجة تقريب الدوال التي تنتمي إلى بعض الصفوف المعممة بإستخدام طريقة هاوسدورف لمتسلسلة فورييه ومرافقتها، ويمكننا ذلك من خلال إثبات المبرهنة الآتية:

مبرهنة: لتكن f دالة مستمرة تقريباً في كل مكان و دورية بدورٍ قدره 2m وتنتمي إلى صف ليبشتز Lip α من أجل $0 < \alpha \leq 1$ عندئذٍ :

$$\forall\, n \geq 0; \exists M > 0:\ (n+1)^{\alpha} \sup_{x\in[0,2m]} \left|\Lambda\big(s_n(x)\big) - f(x)\right| < M$$

حيث $s_n(x)$ تمثل المجموع الجزئي من الرتبة n لمتسلسلة فورييه للدالة f عند النقطة x.

كلمات مفتاحية:

نظرية التقريب، درجة التقريب، طريقة هاوسدورف، مستمرة تقريباً في كل مكان، دورية، متسلسلة فورييه

---

*أستاذ مساعد، كلية العلوم، قسم الرياضيات، جامعة البعث.

**طالبة دكتوراه، كلية العلوم ، قسم الرياضيات، جامعة البعث.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (5) 2021

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (5) 2021

Study of approximation of functions in some generalized classes using hausdorff method

Dr. Mounir makhlouf*

Ranim fajer**

(Received 26/9 /2021.Accepted 7/11/2021)

□ABSTRACT □

In this research ,we will study the problem The degree of approximation of functions belonging to some generalized classes by Hausdorff means of a conjugate Fourier series, and we can do this by proving the following theorem:

<u>Theorem 1</u>: Let f be a continues almost everywhere and2m-periodic function and it belong to the Lipschitz class Lip α for $0 < \alpha \leq 1$.. Then:

$$\forall\, n \geq 0; \exists M > 0:\ (n+1)^{\alpha} \sup_{x \in [0,2m]} \left|\Lambda\big(s_n(x)\big) - f(x)\right| < M$$

Where $s_n(x)$ represent the n-th partial sum of series of the Fourier series of f at a point x.

Keywords:

approximation theorem, degree of approximation, Hausdorff means, continues almost everywhere, periodic, Fourier series

---

*De Pr, Faculty Of Science, Department of Mathematics,Al Baath University.

** PhD Student, , Faculty Of Science, Department of Mathematics,Al Baath University.

مقدمة:

يمكن تقريب الدوال المعممة وتحديداً الدوال المعقدة بدوال بسيطة وذلك من خلال تمثيلها بمتسلسلات فورييه وغيرها من المتسلسلات المتعامدة.

وتختلف درجات تقريب الدوال المعممة وفقاً لانتمائها إلى أحد الصفوف المعممة، فدرجات تقريب دوال صف زيغموند تختلف بشكل عام عن درجات تقريب دوال صف ليبشتز، كما أن درجات التقريب تختلف وفقاً لطبيعة الطريقة المدروسة، حيث إنّ طريقة هاوسدورف هي طريقة عامة ينتج عنها العديد من طرائق قابلية الجمع الأخرى كطريقة أولر و سيزارو وغيرها، وفي هذا العمل سوف نقوم بدراسة درجة تقريب الدوال التي تنتمي إلى بعض الصفوف المعممة بإستخدام طريقة هاوسدورف لمتسلسلة فورييه ومرافقتها.

هدف البحث :

يهدف هذا العمل لمناقشة درجة تقريب الدالة f التي تنتمي إلى بعض الصفوف المعممة بإستخدام طريقة هاوسدورف لمتسلسلة فورييه ومرافقتها.

مواد وطرائق البحث :

في هذا العمل نحتاج إلى بعض التعاريف والرموز المستخدمة ونذكر منها:

تعريف 1: [3] **طريقة هاوسدورف** $(\mathbf{Hausdorff\ method})$

نرمز لهذه الطريقة بالرمز (H, P_n)

وتعرف بالشكل المصفوفي كما يلي :

$$t_n^{(H,P_n)} = \sum_{k=0}^{n} h_{n,k} S_k$$

$$h_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k} \sum_{v=0}^{n-k} (-1)^v \binom{n-k}{v} p_{v+k} & ; 0 \le k \le n \\ 0 & ; k > n \end{cases}$$

حيث $\{p_n\}$ متتالية عددية لانهائية تحقق: $p_n = \int_0^1 z^n d\alpha$ و α دالة تحقق: $\alpha \in BV[0,1],\ \alpha(0+) = \alpha(0) = 0,\ \alpha(1) = 1$ حيث إنّ $BV[0,1]$ فضاء كل الدوال محدودةالتغير على المجال $[0,1]$.

تعريف 2: [1]**متتالية الإزاحة اليمينية للعزوم** : يقال لمتتالية العزم μ_n أنها متتالية إزاحة يمينية للعزوم إذا وجد $\mu_0^* \in \mathbb{R}$ بحيث إنّ المتتالية $(\mu_0^*, \mu_1^* = \mu_0, \dots \dots \dots \dots \dots, \mu_{k+1}^* = \mu_k, \dots \dots)$ تمثل متتالية العزم $\mu_n = \int_0^1 x^n\, d\chi$ ، حيث إنّ χ تكون دالة حقيقية ومحدودة التغير على المجال $[0,1]$ وتحقق الشروط $\chi(0+) = \chi(0) = 0$ و $\chi(1) = 1$.

مثال 1:[1] متتالية عزم هاوسدورف $\mu_n = \frac{1}{(1+q)^n}$ التي تولّد طريقة أولر (E, q) ، تكون متتالية إزاحة يمينية للعزوم لأن $\Delta^n \mu_0^* = (1+q)\Delta^n \zeta_0 \ge 0$ من أجل $\mu_0^* = (1+q)$.

مثال 2:[1] متتالية عزم هاوسدورف $\mu_n = \frac{1}{n+1}$ التي تولّد طريقة سيزارو C^1 ، ليست متتالية إزاحة يمينية للعزوم .

الحل:

إذا كانت μ_n متتالية إزاحة يمينية للعزوم فإنه يوجد μ_0^* التي تجعل من المتتالية $(\mu_0^*, \mu_1^* = \mu_0, \dots \dots \dots \dots \dots, \mu_{k+1}^* = \mu_k, \dots \dots)$ متتالية عزوم، ومن المهم ملاحظة أن المتتالية $\Delta^n \mu_0^*$ يجب أن تكون موجبة و مضطردة بالنسبة لـ n. والتي تنتج من العلاقة:

$\Delta^{n+1}\mu_0^{*\pm} - \Delta^{n+2}\mu_0^{*\pm} = \Delta^{n+1}\mu_1^{*\pm}$ و $\mu_l^* = \mu_l^{*+} - \mu_l^{*-}$، علاوة على ذلك:

$-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ والتي تنتج من $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$ و $= \binom{n}{i-1}\frac{1}{i}$ $\binom{n+1}{i}\frac{1}{j+1}$ و بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة السابقة، يمكن أن نحسب:

$$\Delta^n \mu_0^* = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}\mu_i^* = \mu_0^* + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}\mu_{i-1} = \mu_0^* + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}\frac{1}{i} = \mu_0^* - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

وهكذا، المتتالية $\Delta^n \mu_0^*$ لا يمكن أن تكون متقاربة، وهذا تناقض.

تعريف3:[5] **(O–الكبيرة) (Big–Oh):** لتكن v_n, u_n متتاليتين عدديتين، عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty\infty}\frac{v_n}{u_n} = k \iff v_n = O(u_n)$$

حيثk عدد محدود.

تعريف4: [2] **صف ليبتشز** $\boldsymbol{lip(\alpha)}$: لتكن لدينا الدالة $f: R \to R$ مستمرة تقريباً في كل مكان و دورية بدورٍ قدره $2m$عندئذٍ: إذا كانت $\left|f(x+t) - f(x)\right| = O(|t|^\alpha)$ فإن $f \in L^p$ حيث إنّ: $0 < \alpha \leq 1$ و $t > 0$. ونعرف درجة تقريب الدالة f بإستخدام كثيرة الحدود المثلثية $p_n(x)$ من الرتبة n كالآتي: $\|p_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|p_n(x) - f(x)|$ وتعطى درجة تقريب الدالة $\bar{f}(x)$ بالشكل: $\left|\bar{f}(x) - t_n(x)\right| = O\left(\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{1+\alpha}}\right)$ حيث $\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n cos\,\frac{n\pi x}{m} - a_n\, sin\,\frac{n\pi x}{m}\right)$ و $t_n(x) = \frac{(p_n\bar{s}_0(x) + p_{n-1}\bar{s}_1(x) + \cdots \dots\dots + p_0\bar{s}_n(x))}{P_n}$ و $\{P_n\}$ متتالية عددية ذات حدود موجبة حيث $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty$ عندما $n \to \infty$ و$\{\bar{s}_n(x)\}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه للدالة f.

تعريف ٥:[5] **نظيم مصفوفة:** النظيم هو قيمة حقيقة و لأجل المصفوفات له أحد الأشكال الآتية:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

ويساوي القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأسطر، والنموذج الثاني:

$$\|A\|_2 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

ويساوي القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأعمدة، والنموذج الثالث:

$$\|A\|_3 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} {a_{ij}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ويسمى هذا النظيم بالنظيم الإقليدي، ويمكن تعريف النظيم الإقليدي من المرتبة p بالشكل الآتي:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث $A = [a_{ij}]\,; i,j = 1,2,\dots,n$ وإذا كان هذا النظيم محدود (أو منتهٍ) تكون المصفوفة ذات نظيم منتهٍ.

المناقشة و النتائج:$[7,6,4]$

لتكن f دالة مستمرة تقريباً في كل مكان على المجال $[-m,m]$ و دورية بدورٍ قدره2m. متسلسلة فورييه للدالة f عند النقطة x تعرف كالآتي:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{m}+b_n\sin\frac{n\pi x}{m}\right)$$

حيث

$$a_n=\frac{1}{m}\int_{-m}^{m}f(x)\cos\frac{n\pi x}{m}\,dx \qquad ;n=0,1,2,\dots.$$

و

$$b_n=\frac{1}{m}\int_{-m}^{m}f(x)\sin\frac{n\pi x}{m}\,dx \qquad ;n=0,1,2,\dots.$$

و المتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييهتعطى كالآتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sin\frac{n\pi x}{m}-b_n\cos\frac{n\pi x}{m}\right)$$

وتعطى الدالة المرافقة المقابلة للعلاقة السابقة كالآتي:

$$\bar{f}(x)=-\frac{1}{2m}\int_0^m\Psi_x(t)\frac{\mathrm{dt}}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\,(*)$$

$$\Psi_x(t)=f(x+t)-f(x-t)$$

$$s_r(x)-\bar{f}(x)=\left(\frac{1}{m}\right)\int_0^{\frac{m}{2}}\frac{\cos(2r+1)\frac{\pi t}{m}\,dt}{\sin t}$$

$$\left\|AC^1(s_n)-\bar{f}\right\|_\infty=O\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$$

حيث $0<\alpha\leq 1$ و $A=[c_{nk}]$ مصفوفة.

إنّ $A=[c_{nk}]$ مصفوفة نظامية وتحقق الشرط :

$$1\_\ \sum_{k=0}^{n}\frac{|c_{nk}|}{(k+1)^\alpha}=O\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$$

$$|f(x\pm t)-f(x)|=O(t^\alpha) \qquad \forall t\in[0,m]\ ;\ x\in\mathbb{R}$$

الذي يدعى شرط ليبشتز من أجل $0<\alpha\leq 1$.

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]}|f(x)|=inf\{c:\lambda(x\in[a,b];|f(x)|\geq c\ )=0\ \}$$

حيث ess sup الحد الأعلى الأساسي و λ قياس ليبيغ.

لإثبات المبرهنة: لتكن f دالة مستمرة تقريباً في كل مكان و دورية بدورٍ قدره 2m وتنتمي إلى صف ليبشتز Lip α من أجل $0<\alpha\leq 1$ عندئذٍ :

$$\forall\ n\geq 0;\exists M>0:\ (n+1)^\alpha\sup_{x\in[0,2m]}\left|\Lambda\big(s_n(x)\big)-f(x)\right|<M$$

حيث $s_n(x)$ تمثل المجموع الجزئي من الرتبة n لمتسلسلة فورييه للدالة f عند النقطة x.

نحتاج إلى التمهيديات الآتية:

التمهيدية 1:$[6]$ **لتكن**$(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$متتالية معرفة بالشكل: $\Delta^p\mu_n=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}(-1)^i\mu_{n+i}$ عندئذٍ المصفوفة

Λ والتي تعطى عناصرها بالصورة:

$$\lambda_{mn}=\begin{cases}\binom{m}{n}\Delta^{m-n}\mu_n & for\ n\le m\\ 0 & for\ n>m\end{cases}$$

تكون نظامية إذا وفقط إذا كانت μ_n متتالية عزم $\mu_n=\int_0^1 x^n d\chi(x)$

حيث χ دالة حقيقية محدودة التغير معرفة على المجال $[0,1]$ وتحقق الشروط: $\chi(0+)=\chi(0)=0$

و $\chi(1)=1$ و $v_m=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}s_n$ حيث $s_n=\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k}s_r$ و $n=0,1,2,\dots$.

التمهيدية 2 :[4] لتكن $T=(a_{nk})$ مصفوفة مثلثية سفلى ذات نظيم منتهي و $\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{nk}}{k+1}=O\left(\frac{1}{n+1}\right)$ و $|f(x+2t)-f(x-2t)|=M_f t^{\alpha}$ حيث $(M_f>0)$، عندئذٍ درجة التقريب للدالة المرافقة $\bar{f}$ بإستخدام طريقة جداء مصفوفة سيزارو $v_n=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\sigma_k$ حيث $\sigma_k=\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k}s_r$ للمتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه تحقق:

$$\|v_n-\bar{f}\|_{\infty}=\begin{cases}O\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right) & for\ \alpha<1\\ O\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) & for\ \alpha=1\end{cases}$$

من أجل.. $n=0,1,2,\dots$،

التمهيدية 3:[7] لتكن f دالة مستمرة تقريباً في كل مكان على المجال $[-m,m]$ و دورية بدورٍ قدره $2\text{m}(m>0)$. وتحقق شرط ليبشتز من أجل $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right]$، عندئذٍ:

$$f(x)=\begin{cases}sin^{\alpha}\left(\frac{x-2km}{2}\right) & if\ x\in[2km,(2k+1)m[\\ -\sin\left(\frac{x-2km}{2}\right) & if\ x\in[(2k-1)m,2km[\ \ ,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

وليكن $\bar{s}_n(x)$ يمثل المجموع الجزئي من الرتبة n للمتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه للدالة f عند النقطة x و $\bar{f}$ معرفة حسب العلاقة $(*)$عندئذٍ يوجد صف لطرائق هاوسدورف $L=\{\Lambda\}$ بحيث يكون:

$$\forall\Lambda\in L\ :\ \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\alpha}\operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,2m]}\left|\Lambda(\bar{s}_n(x))-\bar{f}(x)\right|=+\infty$$

<u>إثبات المبرهنة:</u>

من الفرض لدينا $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right]$ يكون عدد ثابت، نعرف $\Lambda=\Lambda^{\beta}*(E,1)$ حيث $(E,1)$ طريقة أولر و Λ^{β} طريقة هاوسدورف الموّلدة بإستخدام الدالة $\chi(x)=x^{\beta}$ وتحقق الفرضية : $0<\beta<\alpha$ ، ولنعرف المتتالية:

$$z_0(x_0)=\bar{s}_n(x_0)-\bar{f}(x_0)=\frac{1}{m}\int_0^m\Psi_{x_0}(t)\frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

والتي تسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$. و نلاحظ أن تحويل قابلية جمع مصفوفة أولر $(E,1)$ لـ $z_n(x_0)$ بإستخدام $w_n(x_0)$ يعطى كالآتي:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(cos\ t+i\sin t)^{k+1}-(cos\ t-i\sin t)^{k+1}-(cos\ t+i\sin t)^{k}+(cos\ t-i\sin t)^{k}}{8i\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}=$$

$$\frac{(cos\ t-1+i\sin t)(cos\ t+1+i\sin t)^{n}-(cos\ t+1-i\sin t)^{n}(cos\ t-1-i\sin t)}{8i\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}=\frac{2^n cos^n\left(\frac{t}{2}\right)}{4i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left[\left(-\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\right.\right.$$

$$i\ cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)+i\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{n}+\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)+i\ cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)-i\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{n}\Bigg]=\frac{2^{n-1}cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

نحصل على :

$$w_n(x_0)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_k(x_0)=\frac{1}{2m}\int_0^m\Psi_{x_0}(t)\frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

ولنفرض أن :

$$x_0\in\left(0,\left(\frac{\alpha m}{8s(1+\alpha)(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right),s\geq 3,\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right] \qquad (1,1)$$

عندئذٍ يكون :

$$\Psi_{x_0}(t)=\begin{cases}sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)-sin^{\alpha}\left(\frac{x_0-t}{2}\right) & if\ t\in[0,x_0]\\ sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)+sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right) & if\ t\in(x_0,m-x_0)\\ -sin\left(\frac{x_0+t-2m}{2}\right)+sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right) & if\ t\in[m-x_0,m]\end{cases}$$

من أجل $t\in[0,m]$ ولتكن:

$$w_n^1(x_0)=\int_0^{x_0}\left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)-sin^{\alpha}\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

$$w_n^2(x_0)=\int_0^{m-x_0}\left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)+sin^{\alpha}\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

$$w_n^3(x_0)=\int_{m-x_0}^{m}\left(-sin\left(\frac{x_0+t-2m}{2}\right)+sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

واضح أن: $w_0^1(x_0)\geq 0$ و

$$w_n^3(x_0)\geq 0 \qquad (1,2)$$

من أجل $n=0,n=4r-1,n=4r,r\in\mathbb{N}$

نلاحظ أنه إذا كان $0<y<x<1$ و $b=\left[\frac{1}{\alpha}\right]$ فإن:

$$(x-y)\left(x^{\frac{1}{\alpha-1}}+yx^{\frac{1}{\alpha-2}}+y^2x^{\frac{1}{\alpha-3}}+\cdots\ldots\ldots+y^{b-1}x^{\frac{1}{\alpha-b}}+y^bx^{\frac{1}{\alpha-(b+1)}}\right)=\left(x^{\frac{1}{\alpha}}-y^{\frac{1}{\alpha}}\right)-\left(y^{b+1}x^{\frac{1}{\alpha-(b+1)}}-y^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

حيث $y^{b+1}x^{\frac{1}{\alpha-(b+1)}}-y^{\frac{1}{\alpha}}\leq 0$.

لتكن $x=sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)$ و $y=sin^{\alpha}\left(\frac{x_0-t}{2}\right)$ من أجل $t\in(0,x_0),n\geq 1,s\geq 3$، عندئذٍ:

$$\frac{sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)-sin^{\alpha}\left(\frac{x_0-t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\geq\frac{sin\left(\frac{x_0+t}{2}\right)-sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{j=1}^{b+1}\left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha-j}}\left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)^{j-1}}=$$

$$\frac{2\ cos\left(\frac{x_0}{2}\right)}{\sum_{j=1}^{b+1}\left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha-j}}\left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)^{j-1}}\geq\frac{2\ cos\left(\frac{x_0}{2}\right)}{(b+1)sin^{1-\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)}\geq\frac{2\ cos\left(\frac{x_0}{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\alpha m}{8s(1+\alpha)(n+1)^2}}\geq\frac{192\ cos\left(\frac{x_0}{2}\right)}{m}$$

وهذا ينتج من العلاقة (1,1) .

لذلك

$$\forall n \geq 1 \ : w_n^1(x_0) \geq \frac{192}{m} cos^{n+1}\left(\frac{x_0}{2}\right)\int_0^{x_0} \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)dt = \frac{384}{m(n+1)} cos^{n+1}\left(\frac{x_0}{2}\right) sin\left(\frac{n+1}{2}x_0\right) \geq \frac{384}{m(n+1)} cos^{n+1}\left(\frac{x_0}{2}\right) sin\left(\frac{n+1}{4}x_0\right) \quad (1,3)$$

إذا كان $n = 4r - 1$ أو $n = 4r - 2$ فإن:

$$w_n^3(x_0) = \int_{m-x_0}^{m} \frac{2\,cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)t\,dt \geq \frac{2\,cos\left(\frac{m-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{m-x_0}{2}\right)} cos^n\left(\frac{m-x_0}{2}\right)\frac{2}{n+1}\left[sin\left(\frac{n+1}{2}m\right) - \sin\frac{(n+1)(m-x_0)}{2}\right] \geq -\frac{16}{n+1} cos^{n+1}\left(\frac{x_0}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x_0}{4} \quad (1,4)$$

لذلك :

$$\forall n \geq 0: \ w_n^1(x_0) + w_n^3(x_0) \geq 0 \quad (1,5)$$

وهذا ينتج من $(1,1)$ و $(1,2)$ و$(1,3)$ و$(1,4)$ و0 $w_n^1(x_0) \geq 0$.

و بالحساب نجد:

$$. \ 0 \leq n \leq 3 \text{ من أجل } \exists\acute{q} > 0 \,;\ w_n^2(x_0) > \acute{q} \quad (1,6)$$

إذا كانت $n = 1$ فإن:

$$w_n^2(x_0) = \int_{x_0}^{m-x_0}\left(sin^\alpha\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin^\alpha\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt = \int_{x_0}^{\frac{m}{2}}\left(sin^\alpha\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin^\alpha\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt + \int_{\frac{m}{2}}^{m-x_0}\left(sin^\alpha\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin^\alpha\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt = C_1 + C_2$$

حيث

$$C_1 \geq \int_{x_0}^{\frac{m}{2}}\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-1\right)}{\sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)}dt - \int_0^{\frac{m}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt > \frac{8}{5}sin^{\frac{5}{2}}\left(\frac{x_0}{2}\right) - 4\sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{8}{5}sin^{\frac{5}{2}}\left(\frac{m}{4}\right) + 4\sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{4}\right)$$

و

$$C_2 \geq \sqrt{2}\int_{\frac{m}{2}}^{m}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt > \sqrt{2}\left(-2sin\left(\frac{m}{4}\right) + \frac{4}{3}sin^3\left(\frac{m}{4}\right) + 2sin\left(\frac{m}{2}\right) - \frac{4}{3}sin^3\left(\frac{m}{2}\right)\right)$$

إذا كانت $n = 2$ فإن:

$$w_2^2(x_0) = \int_{x_0}^{m-x_0}\left(sin^\alpha\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\frac{3t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt = \int_{x_0}^{\frac{m}{3}}\left(sin^\alpha\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\frac{3t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt + \int_{\frac{m}{3}}^{m-x_0}\left(sin^\alpha\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\frac{3t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt = C_1 + C_2$$

حيث :

$$C_1 \geq \int_{x_0}^{\frac{m}{3}} \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\frac{3t}{2}}{\sin^{1-\alpha}\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \int_{x_0}^{\frac{m}{3}} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\frac{3t}{2} dt > -\frac{16}{9} sin^{\frac{9}{2}}\left(\frac{x_0}{2}\right) + 4sin^{\frac{9}{2}}\left(\frac{x_0}{2}\right) - 4sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x_0}{2}\right) + \frac{16}{9} sin^{\frac{9}{2}}\left(\frac{m}{6}\right) - 4sin^{\frac{5}{2}}\left(\frac{m}{6}\right) + 4\frac{16}{9} sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{6}\right) + \frac{1}{2} sin\left(\frac{x_0}{2}\right) + \frac{1}{10} sin\left(\frac{5x_0}{2}\right) + \frac{1}{3} sin\left(\frac{3x_0}{2}\right) - \frac{1}{2} sin\left(\frac{m}{6}\right) - \frac{1}{10} sin\left(\frac{5m}{6}\right) - \frac{1}{3} sin\left(\frac{m}{2}\right)$$

و

$$C_2 \geq 2\int_{\frac{m}{3}}^{m} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\frac{3t}{2} dt > -sin\left(\frac{m}{6}\right) - \frac{1}{5} sin\left(\frac{5m}{6}\right) + \frac{1}{3} sin\left(\frac{m}{2}\right) + \frac{1}{5} sin\left(\frac{5m}{2}\right) + \frac{2}{3} sin\left(\frac{3m}{2}\right)$$

إذا كانت $n = 3$ فإن:

$$w_3^2(x_0) = \int_{x_0}^{m-x_0} \left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right) \frac{\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\cos 2t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt$$

$$= \int_{x_0}^{\frac{m}{4}} \left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right) \frac{\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\cos 2t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi-x_0} \left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right) \frac{\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\cos 2t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = C_1 + C_2 + C_3$$

حيث

$$C_1 \geq \int_{x_0}^{\frac{m}{4}} \frac{\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\cos 2t}{\sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \int_{x_0}^{\frac{m}{4}} \cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\cos 2t\, dt > \frac{32}{13} sin^{\frac{13}{2}}\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{64}{9} sin^{\frac{9}{2}}\left(\frac{x_0}{2}\right) + \frac{36}{5} sin^{\frac{5}{2}}\left(\frac{x_0}{2}\right) - 4sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{32}{13} sin^{\frac{13}{2}}\left(\frac{m}{8}\right) + \frac{64}{9} sin^{\frac{9}{2}}\left(\frac{m}{8}\right) - \frac{36}{5} sin^{\frac{5}{2}}\left(\frac{m}{8}\right) + 4sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{8}\right) + \frac{1}{4} sin\left(\frac{x_0}{2}\right) + \frac{1}{28} sin\left(\frac{7x_0}{2}\right) + \frac{1}{4} sin\left(\frac{3x_0}{2}\right) + \frac{3}{20} sin\left(\frac{5x_0}{2}\right) - \frac{1}{4} sin\left(\frac{m}{8}\right) - \frac{1}{28} sin\left(\frac{7m}{8}\right) - \frac{1}{4} sin\left(\frac{3m}{8}\right) - \frac{3}{20} sin\left(\frac{5m}{8}\right)$$

و

$$C_2 \geq \int_{\frac{m}{4}}^{\frac{3m}{4}} sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right) \frac{\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\cos 2t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt \geq \int_{\frac{m}{4}}^{\frac{3m}{4}} \frac{\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\cos 2t}{\sin\left(\frac{m}{8}\right)} dt \geq -\frac{140}{sin\left(\frac{m}{8}\right)} \left(35sin\left(\frac{m}{8}\right) + 5sin\left(\frac{7m}{8}\right) + 21sin\left(\frac{5m}{8}\right) - 5sin\left(\frac{21m}{8}\right) - 35sin\left(\frac{9m}{8}\right) - 21sin\left(\frac{15m}{8}\right)\right)$$

و $C_3 > 0$، الآن لنعتبر $n \geq 4$ وبمتابعة هذه الطريقة يمكن الحصول على نتائج مماثلة لما سبق، ولنضع:

$$I_h^n = \left[\int_{\frac{m}{(h+1)(n+1)}}^{\frac{m}{h(n+1)}} + \int_{\frac{m}{(n+1)}\left(1+\frac{h-1}{h}\right)}^{\frac{m}{(n+1)}\left(1+\frac{h}{h+1}\right)}\right] sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right) \frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt \qquad (1,7)$$

حيث $1 \leq h \leq s-1$

$$I_s^n = \left[\int_{x_0}^{\frac{m}{s(n+1)}} + \int_{\frac{m}{(n+1)}\left(1+\frac{s-1}{s}\right)}^{\frac{3m}{(n+1)}}\right] sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right) \frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt \qquad (1,8)$$

$$J_l^n = \left[\int_{\frac{m(p+1)}{2p(n+1)}}^{\frac{m(p+l+1)}{2p(n+1)}} + \int_{\frac{m(3p-l-1)}{2p(n+1)}}^{\frac{m(3p-1)}{2p(n+1)}}\right] sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)\frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt \qquad (1,9)$$

من أجل $p \geq 2$ و $0 \leq l \leq p-2$ ، الآن، من أجل $m = \pi$، يكون لدينا:

$$I_h^n \geq \frac{2}{n+1}\left(\cos\left(\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)\right)^n \frac{sin^{\alpha}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)}\left[\frac{sin\left(\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)sin^{\alpha}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi}{2h(n+1)}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2h(n+1)}\right)sin^{\alpha}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)} - 1\right]\left(\sin\left(\frac{\pi}{2h}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2(h+1)}\right)\right)$$

وهذا ينتج من العلاقة $(1,7)$.

ولنثبت أن العلاقة الآتية مضطردة وذلك بالنسبة لـ $x_0 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{sin\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi}{2h(n+1)}\right)}{sin\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)} \qquad (1,10)$$

بعد الأخذ بعين الاعتبار $cot\left(\frac{\pi}{2h(n+1)}\right) \geq (2h-1)\cot\left(\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)$ ، يمكن أن نثبت أن العلاقة :

$$\frac{sin\left(\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2h(n+1)}\right)} \qquad (1,11)$$

مضطردة بالنسبة لـ n من أجل $h \in \{1, \ldots\ldots, s\}$.

علاوة على ذلك العلاقة : $(1,12)$ $\frac{sin^{\alpha}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)}{sin\left(\frac{\pi(2h-1)}{2h(n+1)}\right)}$ تكون مضطردة بالنسبة لـ h . من العلاقات $(1,10)$ و $(1,11)$و $(1,12)$ ، تكون المتراجحة الآتية محققة :

$$I_h^n \geq \left(\cos\left(\frac{\pi(2s-1)}{2s(n+1)}\right)\right)^n \frac{sin^{\alpha}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi(2s-1)}{2s(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2s-1)}{2s(n+1)}\right)}\left[\left(\frac{sin\left(\frac{\pi(2h-1)}{10h}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10\,h}\right)}\right)^{1-\alpha} - 1\right]\left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2h}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2(h+1)}\right)\right) \qquad (1,13)$$

نعرف :

$$H_h^{\alpha} = \left[\left(\frac{sin\left(\frac{\pi(2h-1)}{10h}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10\,h}\right)}\right)^{1-\alpha} - 1\right]\left(\sin\left(\frac{\pi}{2h}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2(h+1)}\right)\right) \qquad (1,14)$$

ولنقدر

$$I_s^n \geq \frac{2}{n+1}\left(\cos\left(\frac{\pi(2s-1)}{2s(n+1)}\right)\right)^n \frac{sin^{\alpha}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi(2s-1)}{2s(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2s-1)}{2s(n+1)}\right)}\left[\left(\frac{sin\left(\frac{\pi(2s-1)}{10s}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10\,s}\right)}\right)^{1-\alpha}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2s}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{40s}\right)\right) - \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2s}\right)\right)\right] \qquad (1,15)$$

والتي تنتج من $(1,1)$ و $(1,8)$ و$(1,10)$ و$(1,11)$.

إن العلاقة $(1,9)$ يمكن استنتاجها بنفس الطرق السابقة ، وهذا يعني :

$$J_l^n \geq cos^n\left(\frac{\pi(3p-l-1)}{4p(n+1)}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi(p+l+1)}{4p}\right) - \sin\left(\frac{\pi(p+l)}{4p}\right)\right]\frac{2}{(n+1)\left(\sin\left(\frac{\pi(3p-l-1)}{4p(n+1)}\right)\right)^{1-\alpha}}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(p+l+1)}{4p(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(3p-l-1)}{4p(n+1)}\right)} - 1\right] \qquad (1,16)$$

من أجل $p \geq 2$ و$l = 0,1,2, \ldots\ldots\ldots.. p-2$.

نلاحظ أن العلاقة :

$$cos^n\left(\frac{\pi(3p-l-1)}{4p(n+1)}\right) \qquad (1,17)$$

تكون دالة مضطردة أيضاً بالنسبة لـ n.

من العلاقة $(1,16)$ و$(1,17)$ نحصل على :

$$J_l^n \geq \frac{2}{n+1}\left[\sin\left(\frac{\pi(p+l+1)}{4p}\right)-\sin\left(\frac{\pi(p+l)}{4p}\right)\right]\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi(3p-l-1)}{20p}\right)\right)^4}{\left(\sin\left(\frac{\pi(3p-l-1)}{20p}\right)\right)^{1-\alpha}}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(3p-l-1)}{20p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(p+l+1)}{20p}\right)}-1\right] \qquad (1,18)$$

من أجل $l = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots p-2$.

بتعويض $p = 5$ و $s = 18$ في العلاقة $(1,15)$ نجد أن:

$$\hat{I}_{18}^n = \frac{2}{n+1}\left(\cos\left(\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)\right)^n \frac{sin^\alpha\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)}$$

$$\left[\left(\frac{sin\left(\frac{\pi(2\times18-1)}{10\times18}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10.\times18}\right)}\right)^{1-\alpha}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2\times18}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{40\times18}\right)\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2\times18}\right)\right] \qquad (1,19)$$

عندئذٍ: $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\times18}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{40\times18}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\times18}\right)} > 0,949 \qquad (1,20)$ مع الأخذ بالحسبان أن $\cos^n\left(\frac{\pi(2s-1)}{2s(n+1)}\right)$ تكون الدالة مضطردة بالنسبة لـ n وبالتالي نحصل على :

$$\hat{I}_{18}^n \geq \frac{2}{n+1}\frac{0,45}{\sqrt{0,573}}\left[\sqrt{32,85}\times0,0828-0,0873\right] > \frac{2}{n+1}\times 0,23 \qquad (1,21)$$

وهذا ينتج من العلاقات$(1,11)$ و$(1,19)$ و$(1,20)$.

الجزء الباقي من المتراجحة $(1,15)$ يعطى بالشكل الآتي:

$$\hat{I}_{18}^n = \frac{2}{n+1}\left(\cos\left(\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)\right)^n \frac{\left(sin\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)\right)^\alpha}{\sin\left(\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)} \qquad (1,22)$$

من المتراجحة $(1,18)$ نجد أن :

$$\sum_{l=0}^3 J_l^n \geq \sum_{l=0}^3 \frac{2}{n+1}\left[\sin\left(\frac{\pi(6+l)}{20}\right)-\sin\left(\frac{\pi(5+l)}{20}\right)\right]\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi(14-l)}{100}\right)\right)^4}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi(14-l)}{100}\right)}}\left[\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi(14-l)}{100}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(6+l)}{100}\right)}}-1\right] > \frac{2}{n+1}\,0,1064 \qquad (1,23)$$

إذاً العلاقة: $\hat{I}_{18}^n + \sum_{l=0}^3 J_l^n > \frac{2}{n+1}\,0,3364 \qquad (1,24)$ تكون صحيحة كنتيجة للعلاقة $(1,21)$، ويكون: $\sum_{h=2}^{17} H_h^\alpha > 1,02$ من أجل $\alpha \leq \frac{1}{2}$ ، ولنقدر:

$$\sum_{h=2}^{17} I_h^n \geq \frac{2}{n+1}cos^n\left(\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)\frac{\left(sin\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)\right)^\alpha}{\sin\left(\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)}\,1,02 \qquad (1,25)$$

إن هذه المتراجحة تنتج من العلاقات $(1,13)$ و $(1,14)$ و $(1,24)$ بعد الأخذ بعين الاعتبار التطبيق :

$\frac{\sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)>0$ ومضطرد بالنسبة لـ $t\in\left[\frac{\pi(2p-1)}{2p(n+1)},\frac{\pi(2p+1)}{2p(n+1)}\right]$ و يمكن أن نقدر:

$$\int_{x_0}^{\frac{3\pi}{n+1}}\frac{\sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)dt=\int_{x_0}^{\frac{\pi}{s(n+1)}}+\int_{\frac{\pi(2s-1)}{(n+1)s}}^{\frac{3\pi}{(n+1)}}$$

$$+\sum_{h=2}^{s-1}\left(\int_{\frac{\pi}{(h+1)(n+1)}}^{\frac{\pi}{h(n+1)}}+\int_{\frac{\pi(2h-1)}{h(n+1)}}^{\frac{\pi(2h+1)}{(h+1)(n+1)}}\right)+\sum_{l=0}^{p-2}\left(\int_{\frac{\pi(p+1)}{2p(n+1)}}^{\frac{\pi(p+l+1)}{2p(n+1)}}+\int_{\frac{\pi(3p-l-1)}{2p(n+1)}}^{\frac{\pi(3p-l)}{2p(n+1)}}\right)+$$

$$\left(\int_{\frac{\pi(2p-l)}{2p(n+1)}}^{\frac{\pi}{(n+1)}}+\int_{\frac{\pi}{(n+1)}}^{\frac{\pi(2p+1)}{2p(n+1)}}\right)\geq I_s^n+\sum_{h=2}^{s-1}I_h^n+\sum_{l=0}^{p-2}J_l^n$$

لذلك

$$\forall n\geq 4\ ,\forall\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right]\ ,\forall 0<x_0<\left(\frac{\pi\alpha}{8\times 18(1+\alpha)(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\ :$$

$$\int_{x_0}^{\frac{3\pi}{n+1}}\sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)\frac{\cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt\geq\frac{2}{n+1}\Big[0{,}336+$$

$$0{,}02\cos^{n}\left(\frac{\pi(2\times 18-1)}{2\times 18(n+1)}\right)\sin^{\alpha-1}\left(\frac{\pi(2\times 18-1)}{2\times 18(n+1)}\right)\Big]\qquad(1{,}26)$$

من أجل $p=5$ و $s=18$ وهذا ينتج من العلاقات $(1{,}22)$ و $(1{,}23)$ و $(1{,}25)$.

لنقدر التكامل الآتي من أجل $n\geq 4$:

$$\int_{x_0}^{\frac{3m}{n+1}}\sin\frac{x_0-t}{2}\ \frac{\cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\ dt\geq-\frac{2}{n+1}+\int_{\frac{m}{n+1}}^{\frac{3m}{n+1}}\sin\frac{x_0-t}{2}\ \ \frac{\cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\qquad(1{,}27)$$

بعد الأخذ بعين الاعتبار أن المتتالية $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha(n+1)^2}-\frac{b\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{b\pi}{n+1}\right)}$ مضطردة بالنسبة لـ n من أجل $a\in\mathbb{N}$ و $b\in\left[\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$. بتجزئة المجال $\left[\frac{\pi}{n+1},\frac{3\pi}{n+1}\right]$ لذلك :

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{3\pi}{n+1}}\sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\frac{\cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt\geq\frac{2}{n+1}\ 0{,}752\qquad(1{,}28)$$

من العلاقات $(1{,}27)$ و$(1{,}28)$ يكون:

$$\forall n\geq 4\ ,\forall\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right]\ ,\forall 0<x_0<$$

$$\left(0,\left(\frac{\pi\alpha}{8\ .\times 18(1+\alpha)(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right):\ \int_{x_0}^{\frac{3\pi}{n+1}}\sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\frac{\cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt\geq-$$

$$0{,}248\left(\frac{2}{n+1}\right)\qquad(1{,}29)$$

نلاحظ أن :

$$\forall n\geq 4\ ,\forall\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right]\ ,\forall 0<x_0<\left(0,\left(\frac{\pi\alpha}{8\times 18(1+\alpha)(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right):$$

$$\int_{x_0}^{\frac{3\pi}{n+1}}\left(\sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)+\sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt\geq$$

$$\frac{0{,}04}{n+1}\cos^{n}\left(\frac{\pi(2\times 18-1)}{2\times 18(n+1)}\right)\sin^{\alpha-1}\left(\frac{\pi(2\times 18-1)}{2\times 18(n+1)}\right)\qquad(1{,}30)$$

والتي تنتج من العلاقات $(1{,}26)$ و $(1{,}29)$.

إذا كانت $n \geq 4$ فإن الدالة: $\frac{sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right)+sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} > 0$ و مضطردة بالنسبة لـ $t \in \left[\frac{3\pi}{n+1}, \pi - x_0\right]$، لذلك:

$$\int_{\frac{3\pi}{n+1}}^{\pi-x_0}\left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt \geq 0 \qquad (1,31)$$

من العلاقات $(1,30)$ و$(1,31)$ نحصل على :

$$\forall n \geq 4, \forall\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right], \forall x_0 \in \left(0,\left(\frac{\pi\alpha}{8\times18(1+\alpha)(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right): \int_{x_0}^{\pi-x_0}\left(sin^{\alpha}\left(\frac{x_0+t}{2}\right) + sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)\right)\frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt \geq \frac{0,04}{n+1}cos^n\left(\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right)sin^{\alpha-1}\left(\frac{\pi(2\times18-1)}{2\times18(n+1)}\right) \qquad (1,32)$$

من العلاقات $(1,5)$ و $(1,6)$ و $(1,32)$ نحصل على :

$$\forall n \geq 0, \forall\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right], \forall 0 < x_0 < \left(\frac{\pi\alpha\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}{8\times18(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exists q > 0;\ (n+1)w_n(x_0) > q \qquad (1,33)$$

لتكن Λ^{β} مصفوفة هاوسدورف(التحويل المصفوفي الموافق لـ $w_n(x_0)$ بإستخدام $v_h^{\beta}(x_0)$) مع العناصر $\lambda_{hn}^{\beta} = \binom{h}{n}\Delta^{h-n}\mu_n^{\beta}$ حيث $\mu_n^{\beta} = \int_0^1 x^n dx^{\beta}$ من أجل $0 < \beta < \alpha$. بما أنّ الدالة x^{β} مضطردة على المجال $x \in [0,1]$، وبالتالي تكون المتراجحة الآتية محققة :

$$\Delta^{h-n}\mu_n^{\beta} = \int_0^1 x^n(1-x)^{h-n}dx^{\beta} \geq 0 \qquad (1,34)$$

ومن ثم نحصل على:

$$v_h^{\beta}(x_0) = \sum_{n=0}^{h}\lambda_{hn}^{\beta}w_n(x_0)$$

حيث $0 < x_0 < \left(\frac{m\alpha\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}{8\times18(h+1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

نثبت العدد الحقيقي μ_{-1}^{β} عندئذٍ:

$$v_h^{\beta}(x_0) = \frac{1}{h+1}\sum_{n=0}^{h}\binom{h+1}{n+1}\Delta^{h-n}\mu_n^{\beta}(n+1)w_n(x_0) \geq \frac{q}{h+1}\sum_{n=0}^{h}\binom{h+1}{n+1}\Delta^{h-n}\mu_n^{\beta}$$

من أجل $0 < x_0 < \left(\frac{m\alpha\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}{8\times18(h+1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$، تنتج من $(1,33)$ و $(1,34)$، لذلك : $\forall h \geq 0$:

$$\text{ess sup}_{0\leq x\leq 2m}\left|\Lambda\left(\bar{s}_n(x)\right) - \bar{f}(x)\right| \geq \text{ess sup}_{0<x_0<\left(\frac{m\alpha\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}{8\times18(h+1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\left|v_h^{\beta}(x_0)\right|$$

$$\geq \frac{q}{h+1}\sum_{n=0}^{h}\binom{h+1}{n+1}\Delta^{h-n}\mu_n^{\beta} \qquad (1,35)$$

نلاحظ أنه أياً كان $h \geq 0$، يتحقق الشرط:

$$\frac{q}{h+1}\sum_{n=0}^{h}\binom{h+1}{n+1}\Delta^{h-n}\mu_n^{\beta} = \frac{q}{h+1}\left(-\Delta^{h+1}\mu_{-1}^{\beta} + \Delta^{h+1}\mu_{-1}^{\beta} + \sum_{n=0}^{h}\binom{h+1}{n+1}\Delta^{h-n}\mu_n^{\beta}\right) = \frac{q}{h+1}\left(-\Delta^{h+1}\mu_{-1}^{\beta} + \mu_{-1}^{\beta}\right) \qquad (1,36)$$

للإثبات، لدينا : $(1,37)$ $\quad \frac{1}{(h+2)^{1-\alpha}-(h+1)^{1-\alpha}} \geq (h+2)^{\alpha}$: $\forall \alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$ و

$$-\Delta^{h+2}\mu_{-1}^{\beta} - \left(-\Delta^{h+1}\mu_{-1}^{\beta}\right) = \Delta^{h+1}\mu_{0}^{\beta} \geq 0 \qquad (1,38)$$

نلاحظ أن:

$(1,39)$ $\quad \Delta^{h+1}\mu_0^{\beta} = \prod_{j=1}^{h+1}\frac{j}{\beta+j}$ ، وهذا ينتج من العلاقة $(1,34)$ ، ولنقدر الآن:

$$(h+1)^{\alpha}\,\mathrm{ess\,sup}_{x\in[0,2m]}\left|v_h^{\beta}(x)\right| \geq \frac{q(h+1)^{\alpha}}{h+1}\left(-\Delta^{h+1}\mu_{-1}^{\beta}+\mu_{-1}^{\beta}\right) \qquad (1,40)$$

إنها تنتج من العلاقة $(1,36)$. و لنحسب :

$$\lim_{h\to\infty}\frac{-\Delta^{h+1}\mu_{-1}^{\beta}}{(h+1)^{1-\alpha}} = \lim_{h\to\infty}\frac{-\Delta^{h+2}\mu_{-1}^{\beta}+\Delta^{h+1}\mu_{-1}^{\beta}}{(h+2)^{1-\alpha}-(h+1)^{1-\alpha}} \geq \lim_{h\to\infty}\Delta^{h+1}\mu_0^{\beta}(h+2)^{\alpha} =$$

$$\lim_{h\to\infty} e^{\ln\left((h+2)^{\alpha}\Delta^{h+1}\mu_0^{\beta}\right)} = \lim_{h\to\infty} e^{\left[\ln(h+2)^{\alpha}+\ln\prod_{j=1}^{h+1}\left(\frac{\frac{j}{\beta}}{1+\frac{j}{\beta}}\right)\right]} = \lim_{h\to\infty}\exp\left[\ln(h+2)^{\alpha}\frac{\sum_{j=1}^{h+1}ln\left(\frac{\frac{j}{\beta}}{1+\frac{j}{\beta}}\right)}{\ln(h+2)^{\alpha}}+1\right] \qquad (1,41)$$

وإن العلاقة $(1,41)$ نتيجة للعلاقات $(1,37)$ و $(1,38)$ و$(1,39)$، ولذلك من أجل $0<\beta<\alpha$ يكون:

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{h+1}ln\left(\frac{\frac{j}{\beta}}{1+\frac{j}{\beta}}\right)}{\ln(h+2)^{\alpha}} = \lim_{h\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\frac{(h+2)}{\beta}}{\frac{1+(h+2)}{\beta}}\right)}{\ln\left(\frac{h+3}{h+2}\right)^{\alpha}} = -\frac{\beta}{\alpha} > -1 \qquad (1,42)$$

من العلاقات $(1,41)$ و$(1,42)$ نحصل على : $(1,43)$ $\quad \lim\limits_{h\to\infty}\frac{-1}{(h+1)^{1-\alpha}}\Delta^{h+1}\mu_{-1}^{\beta} = +\infty$

ومن ثم بإستخدام العلاقات $(1,45)$ و$(1,40)$ و$(1,43)$ يكون الإثبات قد تم .

الاستنتاجات والتوصيات:

١- إمكانية دراسة تقريب الدوال ومرافقاتها في صف ليبشتز بإستخدام طريقة هاوسدورف- سيزارو.

٢_ إمكانية دراسة تقريب الدوال و الدوال المشتقة المرافقة لهافي صف ليبشتز المعمم وذلك بإستخدام طريقة سيزارو- أولر.

٣- إمكانية دراسة تقريب الدوال ومرافقاتها في صف معمم يشتمل على صفي زيغموندوليبشتزمعاً بإستخدام طريقة هاوسدورف.

المراجع

[1] Keska, S.2016, *The degree of approximation by Hausdorff means of a conjugate Fourier series*. Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, 70(2), 63–82.

[2] M.L.Mittal; M.V.Singh,2016, *Approximation of SesaroSub method Trigonometric Approximation of Signals (Functions) Belonging To Class Lip(α, p) in L_p-norm*. (1-7).

[3] B. P. Dhakal. 2014, *Using the Matrix Summability Method to Approximate the Lip(ξ(t), p) Class Functions*, (198-201).

[4] Lal,S.2004, *Approximation of conjugates of almost Lipschitz functions by matrix Cesárosummability method*. Arab. J. Math. Sci. 10 (2), 54.

[5] Bary,N .K., 1961, *Trigonometric series* , Moscow, Government Puplishing Hause . 201 P.

[6] G. H. Hardy. 1949, *Divergent Series*. Oxford At The Clarendon Press, (65-66)

[7] Privalov,I. I. 1916, *Sur les fonctionsconjuguées*. Bull. Soc. Math. France 44, 100–103.