

## حلول عددية لمسائل القيم الحدية من المرتبة الثالثة عشرة

د. نضال إبراهيم حسن\*

(تاريخ الإيداع ١٤ / ٢ / ٢٠٢١ . قبل للنشر ١ / ٣ / ٢٠٢١)

### الملخص

قدمنا في هذا البحث طريقة عددية فعالة لإيجاد الحل العددي لمسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية من المرتبة الثالثة عشرة التي تحدث عند دراسة ميكانيك الموائع، الفيزياء الفلكية، الهيدروديناميكية، الاستقرار المغناطيسي، علم الفلك، نظرية أطوال الموجات، المحركات التحريضية، العلوم الهندسية والفيزياء التطبيقية الخ. تعتمد الطريقة المقترحة على تقريب الحل بكثيرات حدود من الدرجة السابعة عشرة. تم إثبات وجود ووحدانية الحل العددي للطريقة المقترحة عندما تُطبَّق لحل مسألة الاختبار. كما تمت دراسة الخطأ المقطع الكلي للطريقة، وإثبات أنها متناسقة ومتقاربة. قمنا باختبار فعالية الطريقة المقترحة بحل مسألتين خطية وغير خطية، حيث تشير نتائج المقارنات مع الآخرين إلى أهمية النتائج التي تم التوصل إليها. الكلمات المفتاحية: كثيرات حدود من الدرجة 17، مسائل القيمة الحدية من المرتبة الثالثة عشرة، الخطأ المقطع الكلي ، التتاسق.

\* أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة طرطوس - طرطوس - سورية

## Numerical Solutions of Thirteen-Order Boundary Value Problems

Dr. Nidal E. Hassan \*

(Received 14 / 2 / 2021 . Accepted 1 / 3 / 2021 )

### Abstract

In this paper, we develop numerical method for solving thirteen-order boundary value problems (BVPs). Higher order boundary value problems occur in the study of fluid dynamics, astrophysics, hydrodynamic, hydro magnetic stability, astronomy, beam and long wave theory, induction motors, engineering and applied physics etc. The proposed method based on approximating the solution by using polynomials of degree seventeenth. The existence and uniqueness for the proposed method are satisfied when applied to solve a test problem. Moreover, global truncation error is studied; the consistency and convergence of method are shown. Linear and nonlinear problems are given to illustrate the applicability and efficiency of our method. Comparisons of our results with others indicate the importance of our results obtained.

**Keywords:** Polynomials of Degree 17, Thirteen -Order BVPs, Global Truncation Error, Consistence.

---

\* Associate Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tartous Universty, Tartous, Syria.

## مقدمة: Introduction

تعد المعادلات التفاضلية من مراتب عالية ذات تطبيقات واسعة في مختلف العلوم الهندسية والتطبيقية. بشكل عام، تستخدم في نمذجة التغيرات الكمية الفيزيائية، على سبيل المثال الاهتزازات الميكانيكية أو الحركة الديناميكية البنوية، انتقال الحرارة، نظرية الدارات الكهربائية. ويلجأ الباحثون لحلها نظراً لأهميتها الرياضية وتطبيقاتها في الفيزياء الرياضية والهندسة. سنقوم في هذا البحث بإيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثالثة عشرة من الشكل:

$$u^{(13)}(x) + q(x)u(x) = g(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

الخاضعة للشروط الحدية الآتية:

$$\begin{aligned} u^{(i)}(a) &= \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, 6, \\ u^{(j)}(b) &= \beta_j, \quad j = 0, 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (2)$$

حيث:  $\alpha_i, \beta_j$  ثوابت حقيقية منتهية و  $q(x), g(x)$  دالتين مستمرتين على المجال  $[a, b]$ . سنقوم أيضاً بإيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة عشرة من

الشكل:

$$u^{(13)}(x) = f(x, u(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad (3)$$

والتي تخضع للشروط الابتدائية:

$$u^{(i)}(a) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, 12; \quad (4)$$

حيث:  $\gamma_i$  ثوابت حقيقية منتهية لأجل  $i = 0, 1, 2, \dots, 12$  و  $f(x, u(x))$  دالة مستمرة على المجال

$[a, b]$ .

قدم Adeosun وآخرون في [1] عام 2013 طريقة التكرار المتغير لحل مسألة القيم الحدية في المعادلات التفاضلية من المرتبة الثالثة عشرة واختبروا طريقتهم بحل مسألتي اختبار. طبق Iftikhar and Rehman في [2] عام 2014 طريقة التحويل التفاضلي لحل المسألة (2)-(1) وبيننا الفعالية والدقة العددية بحل مثالين عدديين. استخدم Zhi and Li في [3] عام 2014 موجات شانون (Shannon wavelets) لإيجاد الحل العددي للمسألة (2)-(1) درس Njoseh and Mamadu في [4] عام 2016 طريقة تقريب سلسلة القوى لحل مسألة القيم الحدية في المعادلات التفاضلية من المرتبة الثالثة عشرة مع حل ثلاثة أمثلة خطية وغير خطية لتوضيح الكفاءة والدقة العددية لطريقتهم. كما طور Njoseh and Mamadu في [5] عام 2016 طريقة التكرار المتغير الأمثلية لحل مسائل القيم الحدية من المراتب العالية مع حل مسألتين أحدهما خطية والثانية غير خطية من المرتبة الثالثة عشرة. أنشأ Mahmoud and Ehsaan في [6] عام 2017 كثيرات حدود من الدرجة السادسة عشرة مع خمس نقاط تجميع وطبقت هذه التقريبات لحل مسألة القيم الحدية من المرتبة الثانية عشرة. قدم FALADE في [7] عام 2019 طريقة تقريب الملائمة الأسية لحل مسائل القيم الحدية من مراتب عالية وطبقت الطريقة لإيجاد الحل العددي لمسائل من المرتبة الرابعة وحتى الثانية عشرة. استخدم EL-GAMEL وآخرون في [8] عام 2019 كثيرات حدود برنولي لحل مسائل القيم الحدية من مراتب عالية وطبقت لإيجاد الحل العددي لمسائل القيم الحدية من المرتبة الرابعة وحتى الثامنة. طور Jajarmi and

Baleanu في [9] عام 2020 طريقة عددية تكرارية تعطي الحل على شكل سلسلة متقاربة بانتظام، استخدمت لإيجاد الحلول العددية لمسائل القيم الحدية الكسرية من مراتب عالية.

## 2-أهداف البحث: Objectives of Research

يهدف هذا البحث إلى تطوير طريقة عددية فعالة لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية من المرتبة الثالثة عشرة ذات الشروط الحدية نظرا لتطبيقاتها الواسعة في الحقول العلمية المختلفة. كما ونهدف لتحديد صيغة للحد الأعلى للخطأ ودراسة الاستقرار والتقارب للطريقة المقترحة لضمان الدقة والفعالية في الحلول العددية التي سنحصل عليها. كما سنقوم بتنفيذ الطريقة المقترحة بلغة برمجية عالية المستوى، واختبار الفعالية التطبيقية بحل مسألتين اختبارية وغير خطية ومقارنة نتائج طريقتنا مع نتائج لطرائق أخرى.

## 3-طرائق البحث ومواده: Methodology

اعتمدت طرائق البحث على تقنيات التحليل العددي وبعض المفاهيم في الجبر الخطي والتحليل الدالي مثل فضاء التقريبات بكثيرات حدود. وكذلك تم الاطلاع على بعض الطرائق العددية المذكورة في المراجع العلمية التي تطرقت لحل مسائل من النمط المطروح. تم إجراء هذا البحث في قسم الرياضيات-كلية العلوم- جامعة طرطوس في الفترة الواقعة بين حزيران 2020 و شباط 2021.

### • إنشاء كثيرات حدود تقريبية:

نستخدم تقسيمات منتظمة لمجال الحل  $[a, b]$ ، كالآتي:

حيث  $h = (b - a) / n$  ،  $k = 0, 1, \dots, N$  ،  $x_k = a + k h$  طول الخطوة. لنأخذ  $P(x)$  كثيرة حدود من

الدرجة السابعة عشرة كتقريب لحل المسألة  $u(x)$  و لأجل كل  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  يعطى هذا التقريب كالآتي:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{13} \frac{(x - x_k)^i}{i!} P_k^{(i)} + \sum_{i=14}^{17} \frac{(x - x_k)^i}{i!} C_{k,i-13}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5)$$

حيث  $P_k^{(l)} = P^{(l)}(x_k)$ ،  $(l = 0, 1, \dots, 13)$

يحقق التقريب  $P(x)$  الشروط الآتية:

$$P_k^{(m)}(x_k) = u^{(m)}(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1; m = 0, 1, \dots, 13 \quad \blacksquare$$

$$P_k^{(m)}(x_{k+1}) = P_{k+1}^{(m)}(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-2, m = 0, 1, \dots, 13 \quad \blacksquare$$

سنعرف هنا أربع نقاط تجميع في كل مجال جزئي كالآتي:

$$x_{k+z_j} = x_k + h z_j, \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (6)$$

ترتبط النقاط المعطاة بالعلاقة (6) مع أربع وسطاء تحدد بالشكل:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 = 1 \quad (7)$$

الآن، سنقوم بتحويل مسألة القيم الحدية (1)-(2) إلى عدد من مسائل القيم الابتدائية الخاصة، ثم تطبيق

كثيرات الحدود التقريبية (5) مع نقاط التجميع (6)-(7).

• الحل العددي للمسألة المطروحة:

بفرض أن  $u(x)$  حل وحيد لمسألة القيم الحدية (1)-(2) عندئذ يعطى هذا الحل كمجموع خطي لسبعة حلول لمسائل قيم ابتدائية خاصة نرمزها بالترميزات  $\{V_i(x)\}_{i=0}^6$ ، بحيث أنه من أجل ستة ثوابت حقيقية  $c_1, c_2, \dots, c_6$  يتحقق لدينا:

$$u(x) = V_0(x) + \sum_{k=1}^6 c_k V_k(x) \quad (8)$$

حيث سنقدم فيما يأتي مسائل القيم الابتدائية الخاصة، والمسألة الابتدائية الأولى غير المتجانسة وتعطى بالشكل:

$$V_0^{(13)}(x) + q(x) V_0(x) = g(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (9)$$

وهي تخضع للشروط الابتدائية الآتية:

$$V_0^{(i)}(a) = \alpha_i, V_0^{(j)}(a) = 0, i = 0, 1, \dots, 6, j = 7, 8, \dots, 12 \quad (9a)$$

المسألة الابتدائية الثانية المتجانسة وتعطى بالشكل:

$$V_1^{(13)}(x) + q(x) V_1(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (10)$$

وهي تخضع للشروط الابتدائية الآتية:

$$V_1^{(i)}(a) = \alpha_i, V_1^{(7)}(a) = 1, i = 0, 1, \dots, 12, i \neq 7 \quad (10a)$$

المسألة الابتدائية الثالثة المتجانسة وتعطى كالاتي:

$$V_2^{(13)}(x) + q(x) V_2(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (11)$$

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$V_2^{(i)}(a) = \alpha_i, V_2^{(8)}(a) = 1, i = 0, 1, \dots, 12, i \neq 8 \quad (11a)$$

المسألة الابتدائية الرابعة المتجانسة وتعطى:

$$V_3^{(13)}(x) + q(x) V_3(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (12)$$

وهي خاضعة للشروط الابتدائية:

$$V_3^{(i)}(a) = \alpha_i, V_3^{(9)}(a) = 1, i = 0, 1, \dots, 12, i \neq 9 \quad (12a)$$

المسألة الابتدائية الخامسة المتجانسة وتعطى:

$$V_4^{(13)}(x) + q(x) V_4(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (13)$$

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$V_4^{(i)}(a) = \alpha_i, V_4^{(10)}(a) = 1, i = 0, 1, \dots, 12, i \neq 10 \quad (13a)$$

المسألة الابتدائية السادسة المتجانسة:

$$V_5^{(13)}(x) + q(x) V_5(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (14)$$

وتخضع للشروط الابتدائية الآتية:

$$V_5^{(i)}(a) = \alpha_i, V_5^{(11)}(a) = 1, i = 0, 1, \dots, 12, i \neq 11 \quad (14a)$$

المسألة الابتدائية السابعة والأخيرة المتجانسة:

$$V_6^{(13)}(x) + q(x)V_6(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (15)$$

خاضعة للشروط الابتدائية الآتية:

$$V_6^{(i)}(a) = \alpha_i, V_6^{(12)}(a) = 1, i = 0, 1, \dots, 11, \quad (15a)$$

الآن سنثبت أن الدالة  $u(x) = V_0(x) + \sum_{k=1}^6 c_k V_k(x)$  هي حل وحيد لمسألة القيمة الحدية المطروحة - (2)

(1)، إذ نجد أنه لأجل الثوابت الحقيقية  $c_1, c_2, \dots, c_6$  يتحقق لدينا:

$$\begin{aligned} u^{(13)}(x) &= V_0^{(13)}(x) + \sum_{k=1}^6 c_k V_k^{(13)}(x) = -q(x)V_0(x) + q(x) + \sum_{k=1}^6 c_k [-q(x)V_k(x)] \\ &= -q(x)[V_0(x) + \sum_{k=1}^6 c_k V_k(x)] + q(x) = -q(x)u(x) + q(x) \end{aligned}$$

$$\cdot u^{(i)}(x) = V_0^{(i)}(x) + \sum_{k=1}^6 c_k V_k^{(i)}(x), \quad i = 0, 1, \dots, 12 \quad \text{حيث}$$

ويتبقى إثبات أن  $u(x)$  يحقق الشروط الحدية (2) للمسألة المذكورة، ونبدأ بشروط بداية المجال كالآتي:

$$u^{(i)}(a) = V_0^{(i)}(a) + \sum_{k=1}^6 c_k V_k^{(i)}(a) = \alpha_i + \sum_{k=1}^6 c_k (0) = \alpha_i, \quad (i = 0, \dots, 6)$$

ولتحقيق بقية الشروط (2) في نهاية المجال، نضع منظومة المعادلات الآتية:

$$u^{(i)}(b) = V_0^{(i)}(b) + \sum_{k=1}^6 c_k V_k^{(i)}(b) \equiv \beta_i, \quad (i = 0, 1, \dots, 5), \quad (16)$$

وبحل منظومة المعادلات الخطية (16) ينتج لدينا:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(b) & V_2(b) & V_3(b) & V_4(b) & V_5(b) & V_6(b) \\ V_1'(b) & V_2'(b) & V_3'(b) & V_4'(b) & V_5'(b) & V_6'(b) \\ V_1''(b) & V_2''(b) & V_3''(b) & V_4''(b) & V_5''(b) & V_6''(b) \\ V_1^{(3)}(b) & V_2^{(3)}(b) & V_3^{(3)}(b) & V_4^{(3)}(b) & V_5^{(3)}(b) & V_6^{(3)}(b) \\ V_1^{(4)}(b) & V_2^{(4)}(b) & V_3^{(4)}(b) & V_4^{(4)}(b) & V_5^{(4)}(b) & V_6^{(4)}(b) \\ V_1^{(5)}(b) & V_2^{(5)}(b) & V_3^{(5)}(b) & V_4^{(5)}(b) & V_5^{(5)}(b) & V_6^{(5)}(b) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_0 - V_0(b) \\ \beta_1 - V_0'(b) \\ \beta_2 - V_0''(b) \\ \beta_3 - V_0^{(3)}(b) \\ \beta_4 - V_0^{(4)}(b) \\ \beta_5 - V_0^{(5)}(b) \end{bmatrix}$$

وللحصول على الحل العددي، نطبق كثيرات الحدود (5) مع نقاط التجميع (6)-(7) إلى كل مسألة من مسائل

القيم الابتدائية (9)-(15)، فنحصل على الحلول العددية  $P_6(x_k), P_1(x_k), P_0(x_k)$  للمسائل المذكورة على الترتيب

لأجل كل  $1 \leq k \leq N$ ، حيث يكون  $V_i^{(i)}(x) \approx P_i^{(i)}(x)$  لأجل  $i = 0, 1, \dots, 6$  وبالتالي يعطى الحل العددي

للمسألة الحدية (1)-(2)، كمجموع لحلول مسائل القيم الابتدائية كالآتي:

$$P^{(i)}(x_k) = P_0^{(i)}(x_k) + \sum_{j=1}^6 c_j P_j^{(i)}(x_k), \quad i = 0, 1, \dots, 6; k = 0, 1, \dots, N.$$

(17)

وجود الحل العددي :

لنأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الثالثة عشرة في الحالة الآتية:

$$\begin{cases} u^{(13)}(x) = F[x, u(x), u'(x), \dots, u^{(12)}(x)], & x \in [a, b] \\ u^{(l)}(a) = u_0^{(l)}, & l = 0, 1, \dots, 12. \end{cases} \quad (18)$$

بفرض أن  $F : [a, b] \times C[a, b] \times \dots \times C^{12}[a, b] \rightarrow R$  دالة ملساء كفاية، يقال إن الدالة  $F$  تحقق شرط ليبشيز إذا تحققت متراجحة ليبشيز الآتية:

$$|F(x, u_0, u_1, \dots, u_{12}) - F(x, \check{y}_0, \check{y}_1, \dots, \check{y}_{12})| \leq L \sum_{i=0}^{12} |u_i - \check{y}_i|,$$

$$\forall (x, u_0, u_1, \dots, u_{12}), (x, \check{y}_0, \check{y}_1, \dots, \check{y}_{12}) \in [a, b] \times R^{12}$$

حيث  $L$  يدعى بثابت ليبشيز لـ  $F$ .

إن تحقيق شرط ليبشيز يضمن وجود ووحدانية الحل  $u(x)$  لمسألة الاختبار (18).  
و بتطبيق كثيرات الحدود (5) ومشتقاتها مع نقاط التجميع (6)-(7) إلى المسألة (18)، نحصل على منظومة المعادلات الآتية:

$$(hz_j)C_{k,1} + \frac{(hz_j)^2}{2!}C_{k,2} + \frac{(hz_j)^3}{3!}C_{k,3} + \frac{(hz_j)^4}{4!}C_{k,4} = -P_0^{(12)} + F(x_{k+z_j}, P(x_{k+z_j}), P'(x_{k+z_j}), \dots, P^{(12)}(x_{k+z_j})), \quad j = 1, 2, \dots, 4, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

(19)

$$P^{(l)}(a) = P_0^{(l)}, \quad l = 0, 1, \dots, 12.$$

(19a)

وبإعادة كتابة المنظومة (19) بصيغة المصفوفات ينتج لدينا:

$$A \bar{C}_k = \hat{F}_k \quad (20)$$

حيث نضع:

$$F_{k+z_j} = -P_0^{(12)} + F[x_{k+z_j}, P(x_{k+z_j}), P'(x_{k+z_j}), \dots, P^{(12)}(x_{k+z_j})], \quad j = 1, 2, \dots, 4,$$

$$\bar{C}_k = \begin{bmatrix} hC_{k,1} \\ h^2C_{k,2} \\ h^3C_{k,3} \\ h^4C_{k,4} \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_k = \begin{bmatrix} -P_0^{(12)} + F_{k+z_1} \\ -P_0^{(12)} + F_{k+z_2} \\ -P_0^{(12)} + F_{k+z_3} \\ -P_0^{(12)} + F_{k+z_4} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} z_1 & \frac{z_1^2}{2} & \frac{z_1^3}{6} & \frac{z_1^4}{24} \\ z_2 & \frac{z_2^2}{2} & \frac{z_2^3}{6} & \frac{z_2^4}{24} \\ z_3 & \frac{z_3^2}{2} & \frac{z_3^3}{6} & \frac{z_3^4}{24} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

نجد من المنظومة (20) أن محدد مصفوفتها  $\det(A) = 6.781 \times 10^{-9}$  غير صفري وبالتالي فهي موجودة وقابلة للحل دائماً لأجل القيم القياسية لوسطاء التجميع  $z_2 = 9/10, z_3 = 4/5, z_1 = 3/4$  التي تم اختيارها.

#### 4- الخطأ المقتطع الموضوعي: Local Truncation Error

تعريف [6]: يقال عن طريقة عددية إنها متناسقة من المرتبة  $p$  إذا كان  $\tau_k \equiv O(h^p)$  حيث  $\tau_k$  خطأ الاقتطاع الموضوعي للطريقة عند  $x_k$ .

بفرض أن  $u(x) \in C^{18}[a, b]$  حل وحيد للمسألة (1)-(2) وأن  $P(x)$  الحل العددي. وبفرض أن  $T = (\bar{\tau}_k)$  شعاع من البعد الرابع، و  $\bar{\tau}_k$  الخطأ المقتطع الموضوعي. وبتطبيق الحل العددي  $P(x)$  مع نقاط التجميع (6)-(7)، واختيار القيم لوسطاء التجميع  $z_4 = 1, z_3 = 9/10, z_2 = 4/5, z_1 = 3/4$  ولنضع  $u(x_{k+z_j}) = u(x_k + hz_j)$ ،  $(m=0,1,\dots,12)$ ،  $p_k^{(m)} = P^{(m)}(x_k)$  الموضوعي بالشكل:

$$\bar{\tau}_k = M\bar{C}_k + \bar{\Psi}_k, \quad (21)$$

حيث

$$M = \begin{bmatrix} \frac{(z_1 h)^{14}}{14!} & \frac{(z_1 h)^{15}}{15!} & \frac{(z_1 h)^{16}}{16!} & \frac{(z_1 h)^{17}}{17!} \\ \frac{(z_2 h)^{14}}{14!} & \frac{(z_2 h)^{15}}{15!} & \frac{(z_2 h)^{16}}{16!} & \frac{(z_2 h)^{17}}{17!} \\ \frac{(z_3 h)^{14}}{14!} & \frac{(z_3 h)^{15}}{15!} & \frac{(z_3 h)^{16}}{16!} & \frac{(z_3 h)^{17}}{17!} \\ \frac{(h)^{14}}{14!} & \frac{(h)^{15}}{15!} & \frac{(h)^{16}}{16!} & \frac{(h)^{17}}{17!} \end{bmatrix}, \bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k,1} \\ C_{k,2} \\ C_{k,3} \\ C_{k,4} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{13} \frac{(z_1 h)^i}{i!} P_k^{(i)} - u(x_k + z_1 h) \\ \sum_{i=0}^{13} \frac{(z_2 h)^i}{i!} P_k^{(i)} - u(x_k + z_2 h) \\ \sum_{i=0}^{13} \frac{(z_3 h)^i}{i!} P_k^{(i)} - u(x_k + z_3 h) \\ \sum_{i=0}^{13} \frac{h^i}{i!} P_k^{(i)} - u(x_k + h) \end{bmatrix}$$

من ناحية أخرى من المنظومة (20) نحصل على

$$\bar{C}_k = A^{-1} \hat{F}_k \quad (22)$$

حيث  $A^{-1}$  هي مصفوفة المنظومة (20)، وأن

$$\hat{F}_k = [u^{(13)}(x_{k+z_1}), u^{(13)}(x_{k+z_2}), u^{(13)}(x_{k+z_3}), u^{(13)}(x_{k+z_4}), u^{(13)}(x_{k+1})]^T.$$

وباستخدام منشورات تايلور للدوال  $u^{(m)}(x), m = 0,1,\dots,12$  حول  $x_k$  والتعويض في (21) نحصل على

مرتبة الخطأ المقتطع الموضوعي عند الخطوة  $k$ :

$$\bar{\tau}_k = M(A^{-1} \hat{F}_k) + \bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} 3.6 \times 10^{-14} y^{(18)}(x_k) h^{18} \\ 1.43 \times 10^{-13} y^{(18)}(x_k) h^{18} \\ 3.04 \times 10^{-13} y^{(18)}(x_k) h^{18} \\ 1.2 \times 10^{-12} y^{(18)}(x_k) h^{18} \end{bmatrix}, k = 0,1,\dots, N \quad (23)$$

حيث

$$u(x) = \sum_{i=0}^{17} \frac{(x-x_k)^i}{i!} u^{(i)}(x_k) + O(h^{18}), x \in [x_k, x_{k+1}].$$

وهكذا يعطى الخطأ التقتطع الموضوعي للتقنية العددية المقترحة وفقاً للعلاقة (23) كالآتي:



العديدية للطريقة الكلي المققطع الخطأ  $\|\bar{T}_k\|_\infty = 1.2 \times 10^{-12} u^{(18)}(x_k) h^{18} \equiv O(h^{18})$  ، ويقدر الخطأ المققطع الكلي للطريقة العديدية

المؤلفة من  $N$  خطوة كالاتي:  $\|T\|_\infty = N.O(h^{18}) = \frac{b-a}{h}.O(h^{18}) \equiv O(h^{17})$  ، ومنه بحسب التعريف

فالطريقة العديدية المقترحة ستكون متناسقة ومتقاربة من المرتبة السابعة عشرة.

## 5- نتائج عديدية Numerical Results

نقدم الحلول العديدية لمسالتين من المعادلات التفاضلية من المرتبة الثالثة عشرة إحداهما خطية والأخرى غير خطية لإظهار الفعالية والكفاءة والدقة للطريقة العديدية التي تم اقتراحها. نستخدم البرنامج الحاسوبي *Mathematica* لتنفيذ الطريقة العديدية المقترحة والحصول على النتائج العديدية والرسوم البيانية للمسائل المطروحة للاختبار.

مسألة 1: لتكن المعادلة التفاضلية الآتية [1,2,4,5]:

$$u^{(13)}(x) = \cos(x) - \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

مع الشروط الحدية :

$$\begin{cases} u(0) = 1, u'(0) = 1, u''(0) = -1, u^{(3)}(0) = -1, u^{(4)}(0) = 1, u^{(5)}(0) = 1, u^{(6)}(0) = -1 \\ u(1) = \cos(1) + \sin(1), u'(1) = \cos(1) - \sin(1), u''(1) = -\cos(1) - \sin(1) \\ u^{(3)}(1) = \sin(1) - \cos(1), u^{(4)}(1) = \cos(1) + \sin(1), u^{(5)}(1) = \cos(1) - \sin(1) \end{cases}$$

وتملك الحل التحليلي  $u(x) = \cos x + \sin x$

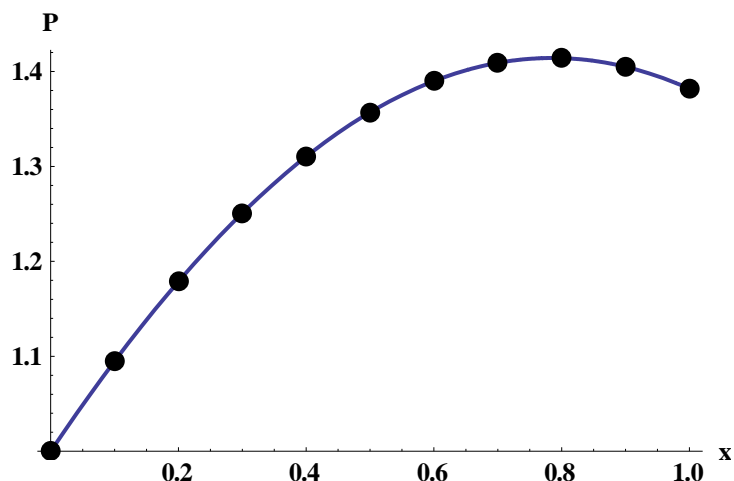
نحل المسألة 1 بطريقتنا المقترحة ونلخص في الجدول (1) مقارنات الحلول العديدية لطريقتنا المقترحة مع طريقة تقريب سلسلة القوى (PSAM) في [4] وطريقة تكرار المتغير الامثلية (OVIM) في [5] بخطوة  $h=0.1$  ، وندرج في الجدول (2) مقارنات للأخطاء المطلقة  $|u(x_i) - P(x_i)|$  في الحل العديدي لطريقتنا المقترحة مع طريقة تكرار المتغير في [1] وطريقة التحويل التفاضلي في [2]. نرسم في الأشكال (1)-(10) الحلول العديدية ومشتقاتها حتى المرتبة العاشرة، ونرسم أيضا في الأشكال (11)-(20) الأخطاء المطلقة في الحل العديدي.

الجدول(1): مقارنات الحلول العددية لطريقتنا المقترحة مع طريقة تقريب سلسلة القوى (PSAM) وطريقة تكرار المتغير الامثلية (OVIM) بخطوة  $h=0.1$

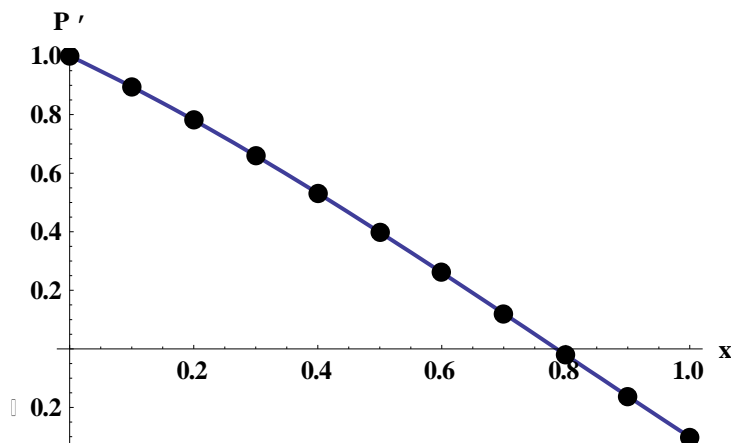
$x_i$	الحل الدقيق	PSAM [4,2016]	OVIM [5,2017]	طريقتنا المقترحة
0.1	1.094837581924854	1.0948376	1.0948376	1.0948375819248541
0.2	1.1787359086363027	1.1787359	1.1787359	1.1787359086363032
0.3	1.2508566957869456	1.2508568	1.2508567	1.250856695786946
0.4	1.3104793363115357	1.3104800	1.3104796	1.310479336311536
0.5	1.3570081004945758	1.3570112	1.3570095	1.357008100494576
0.6	1.3899780883047137	1.3899892	1.3899832	1.3899780883047137
0.7	1.4090598745221796	1.4090924	1.4090747	1.4090598745221796
0.8	1.4140628002466882	1.4141457	1.4140999	1.4140628002466882
0.9	1.4049368778981477	1.4051257	1.4050201	1.4049368778981475
1	1.3817732906760363	1.3821676	1.3819444	1.3817732906760358

الجدول(2): مقارنات للأخطاء المطلقة  $|u(x_i) - P(x_i)|$  في الحل العددي لطريقتنا مع طريقة تكرار المتغير [1] وطريقة التحويل التفاضلي [2].

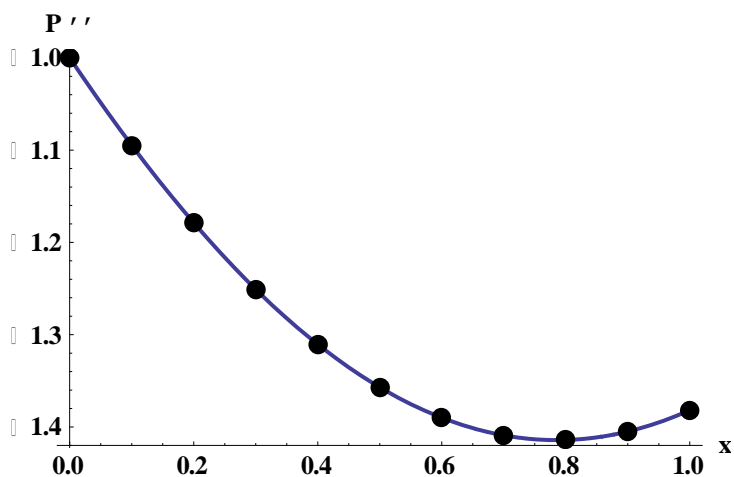
$x_i$	Variational Iteration Method [1]	Differential Transformation Method [2]	طريقتنا المقترحة
0.1	3.88578E-15	2.22045E-16	1.000089 E-16
0.2	1.46216E-13	0.00000000	0.0000000000
0.3	8.80518E-13	2.22045E-15	4.44089 E-16
0.4	2.35822E-12	6.66134E-15	2.220454 E-16
0.5	3.8014E-12	1.11022E-14	3.3213461 E-16
0.6	5.14766E-11	1.04361E-14	4.0765442 E-16
0.7	1.56224E-11	5.32907E-15	4.4114569 E-16
0.8	8.99409E-11	8.88178E-16	5.6665409 E-16
0.9	4.70031E-10	0.00000000	0.0000000000
1.0	2.06386E-09	0.00000000	0.0000000000



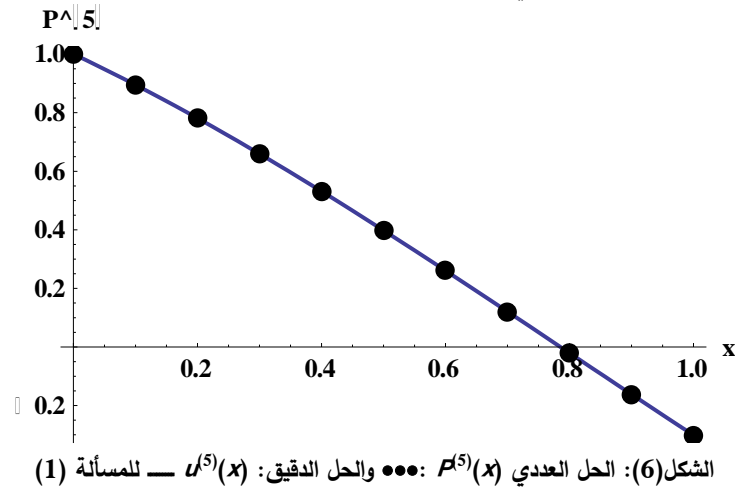
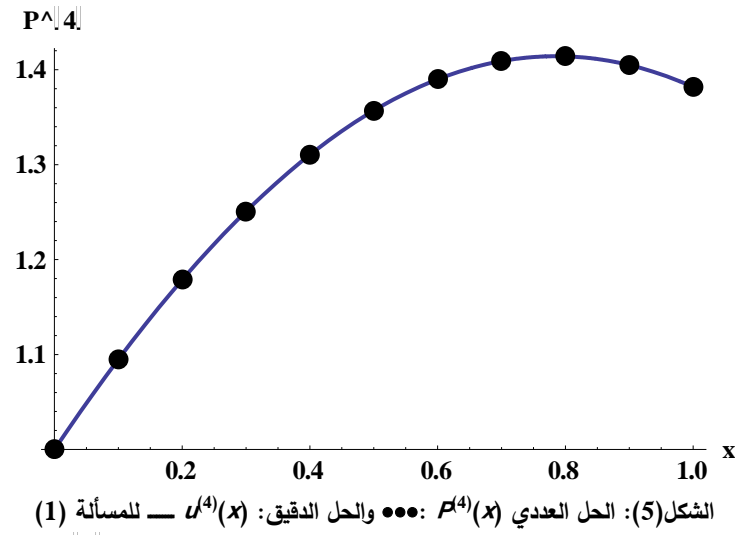
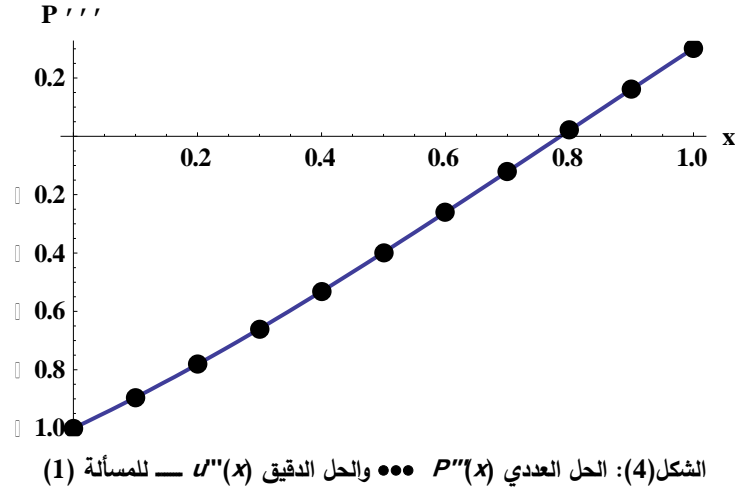
الشكل (1): الحل العددي  $P(x)$ : ●●● والحل الدقيق:  $u(x)$  — للمسألة (1)

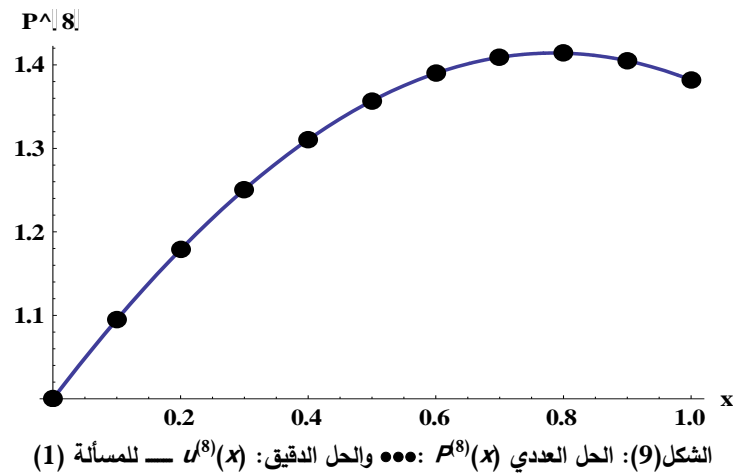
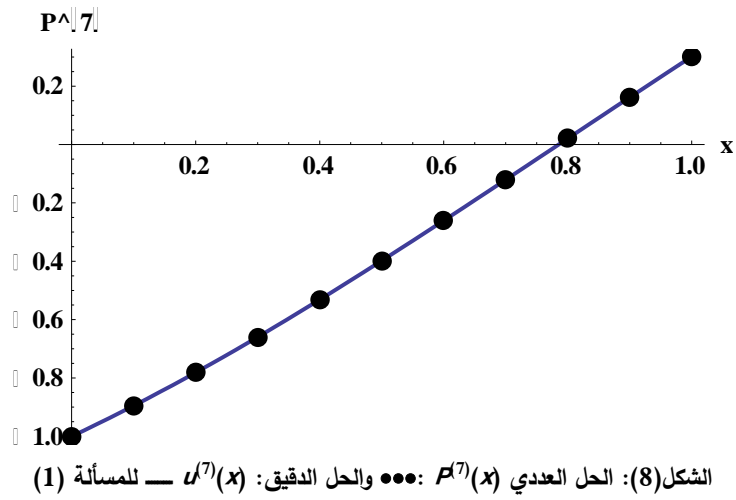
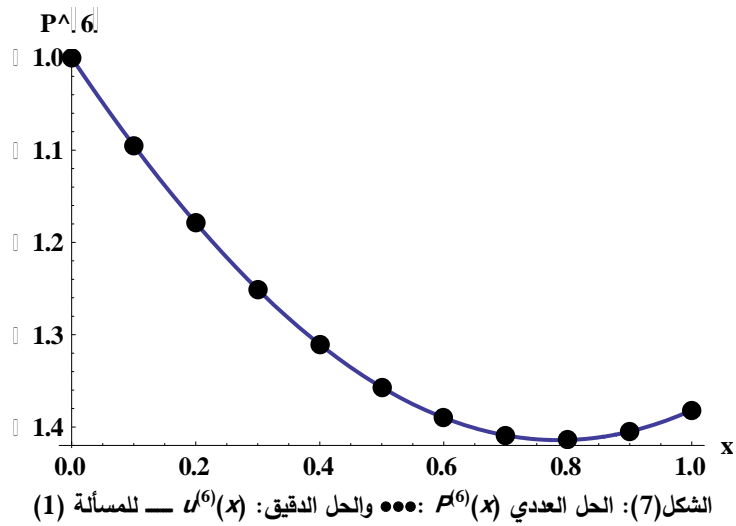


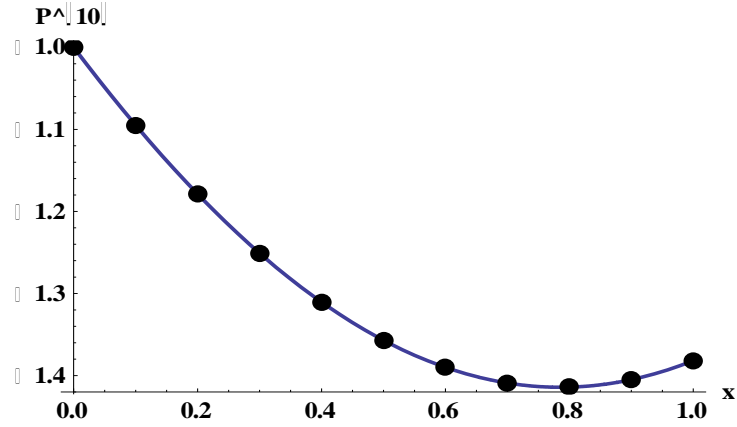
الشكل (2): الحل العددي  $P'(x)$ : ●●● والحل الدقيق:  $u'(x)$  — للمسألة (1)



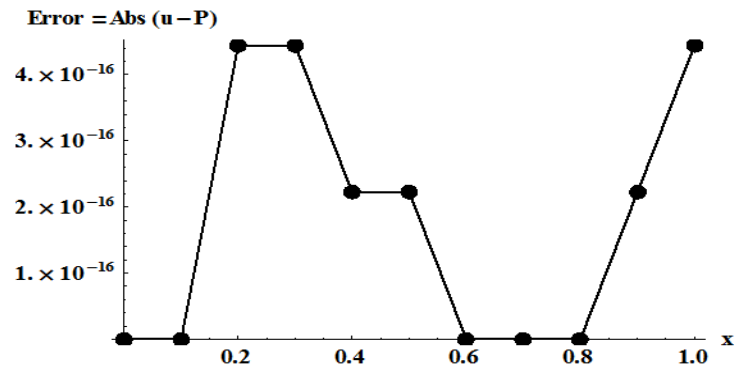
الشكل (3): الحل العددي  $P''(x)$ : ●●● والحل الدقيق:  $u''(x)$  — للمسألة (1)



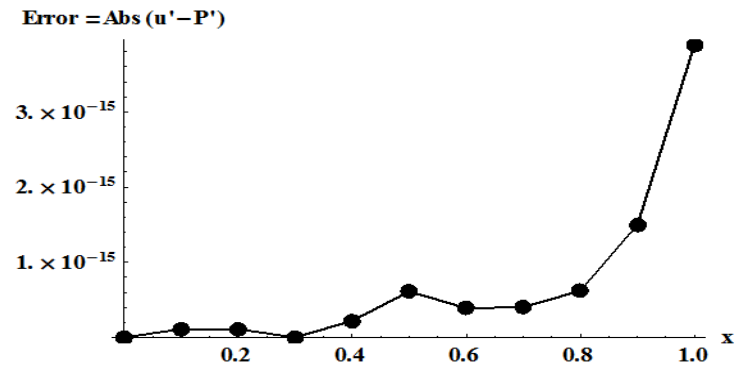




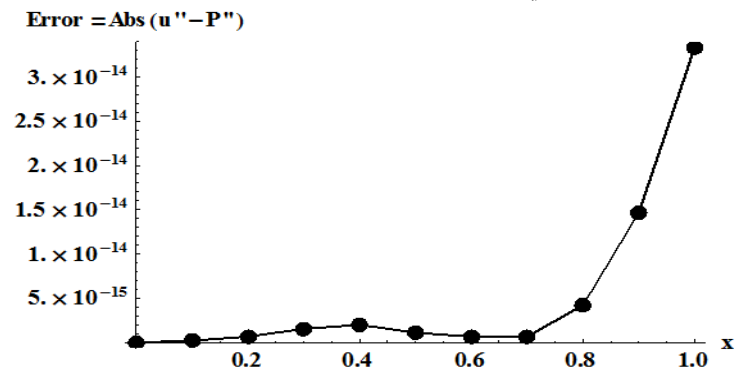
الشكل(10): الحل العددي  $P^{(10)}(x)$  ●●● والحل الدقيق:  $u^{(10)}(x)$  — للمسألة (1)



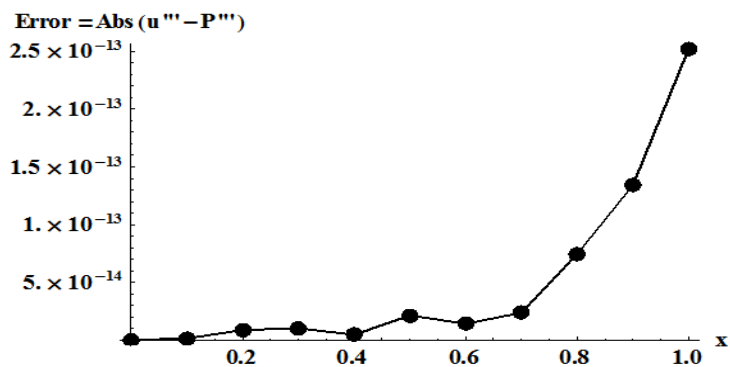
الشكل(11): الخطأ المطلق في الحل العددي  $P(x)$  ●●● بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1)



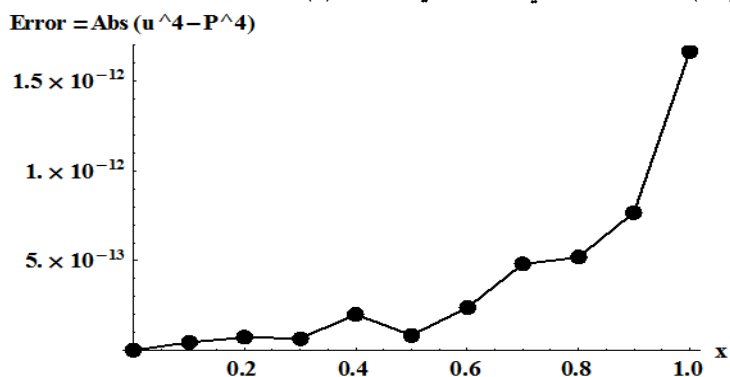
الشكل(12): الخطأ المطلق في الحل العددي للمشتق  $P'(x)$  ●●● بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1)



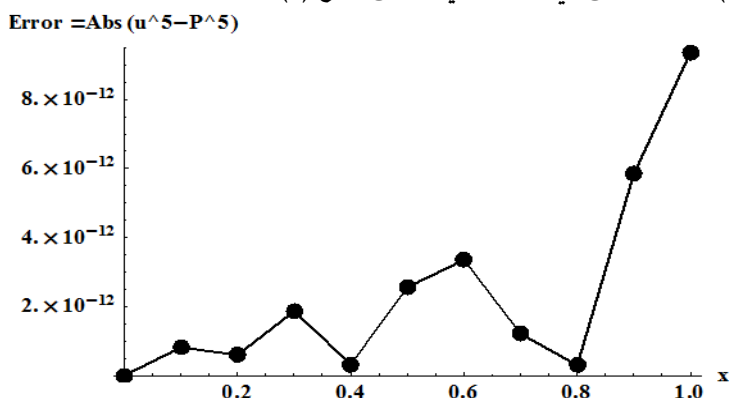
الشكل(13): الخطأ المطلق في الحل العددي للمشتق  $P''(x)$  ●●● بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1)



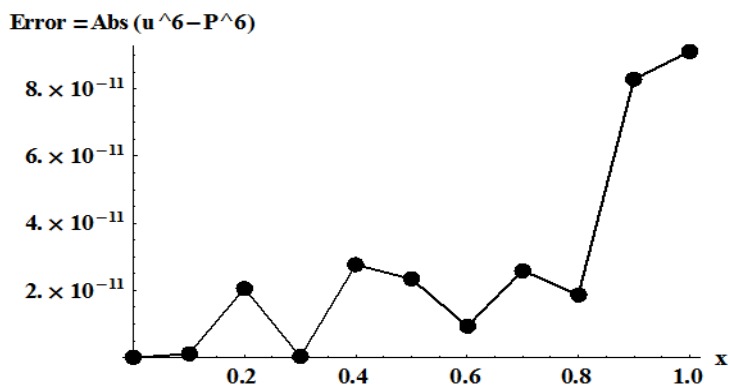
الشكل(14): الخطأ المطلق في الحل العددي للمشتق  $P''(x)$  بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1) .



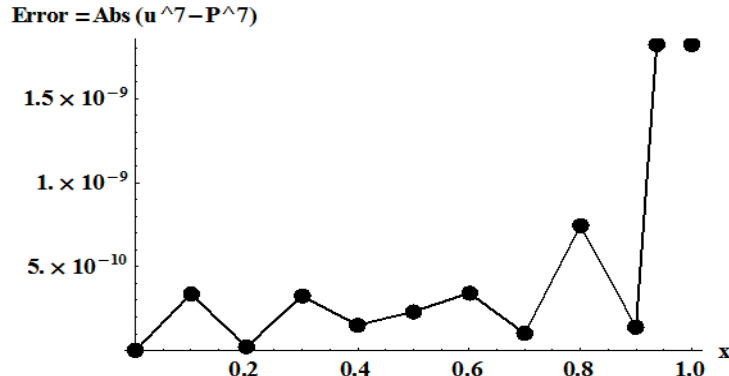
الشكل(15): الخطأ المطلق في الحل العددي للمشتق الرابع  $P^4(x)$  بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1) .



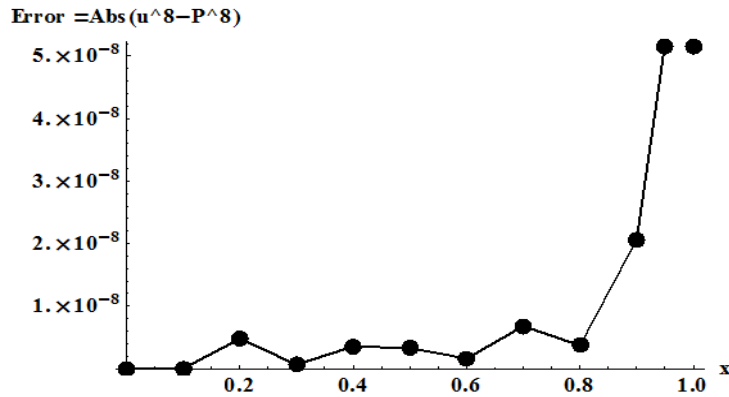
الشكل(16): الخطأ المطلق في الحل العددي للمشتق الخامس  $P^5(x)$  بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1) .



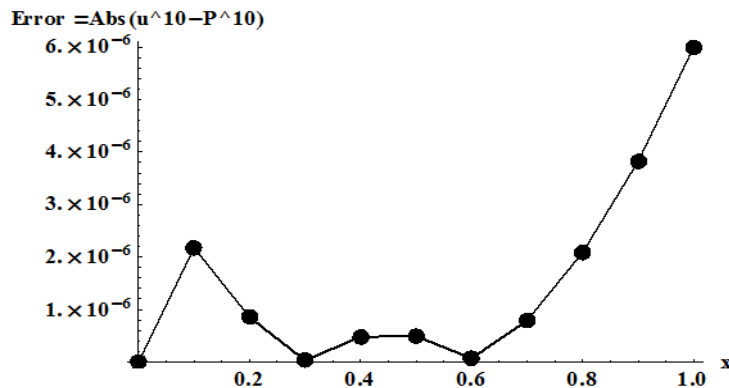
الشكل(17): الخطأ المطلق في الحل العددي للمشتق السادس  $P^6(x)$  بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1) .



الشكل(18): الخطأ المطلق في الحل العددي للمشتق السابع  $P^{(7)}(x)$  بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1) .



الشكل(19): الخطأ المطلق في الحل العددي للمشتق الثامن  $P^{(8)}(x)$  بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1) .



الشكل(20): الخطأ المطلق في الحل العددي للمشتق العاشر  $P^{(10)}(x)$  بخطوة  $h=0.1$  للمسألة (1) .

المسألة(2): لتكن المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة عشرة  $[1,2,5]$  :

$$u^{(13)}(x) = e^{-x} u^2(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

التي تخضع للشروط الابتدائية:

$$u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = \dots = u^{(12)}(0) = 1;$$

مع الحل الدقيق الأسّي:  $u(x) = e^x$  .



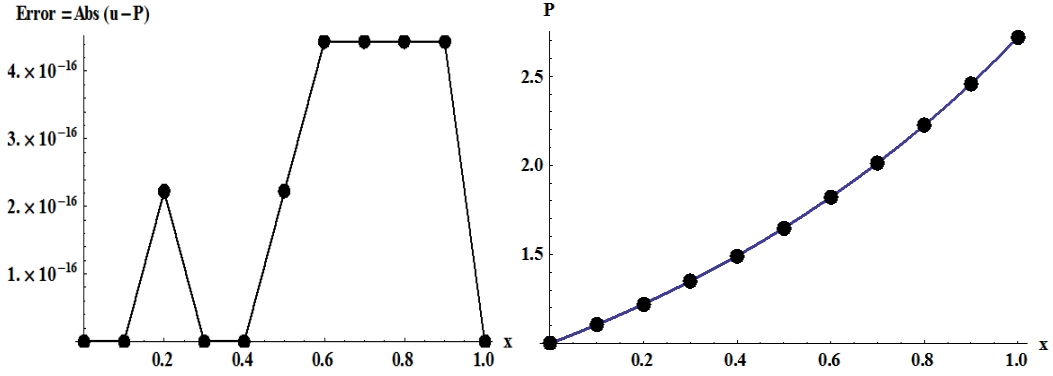
نحل المسألة 2 بطريقتنا المقترحة ونلخص في الجدول (3) مقارنات الحلول العددية لطريقتنا المقترحة مع طريقة تكرار المتغير الامثلية (OVIM) في [5] بخطوة  $h=0.1$ ، وندرج في الجدول (4) مقارنات للأخطاء المطلقة  $|u(x_i) - P(x_i)|$  في الحل العددي لطريقتنا المقترحة مع طريقة تكرار المتغير في [1] وطريقة التحويل التفاضلي في [2]. نرسم في الأشكال (21)–(30) الحلول العددية ومشتقاتها حتى المرتبة العاشرة مع الأخطاء المطلقة الحاصلة في هذه الحلول. نبين في الشكل (31) الخطأ المطلق في الحل العددي لطريقة تكرار المتغير الامثلية (OVIM) في [5] بخطوة  $h=0.1$ ، تبين نتائج المقارنات في الجداول (3)–(4) والرسوم البيانية مدى الدقة العددية والكفاءة للطريقة العددية المقترحة.

الجدول (3): مقارنات الحلول العددية لطريقتنا المقترحة مع طريقة تكرار المتغير الامثلية (OVIM) بخطوة  $h=0.1$

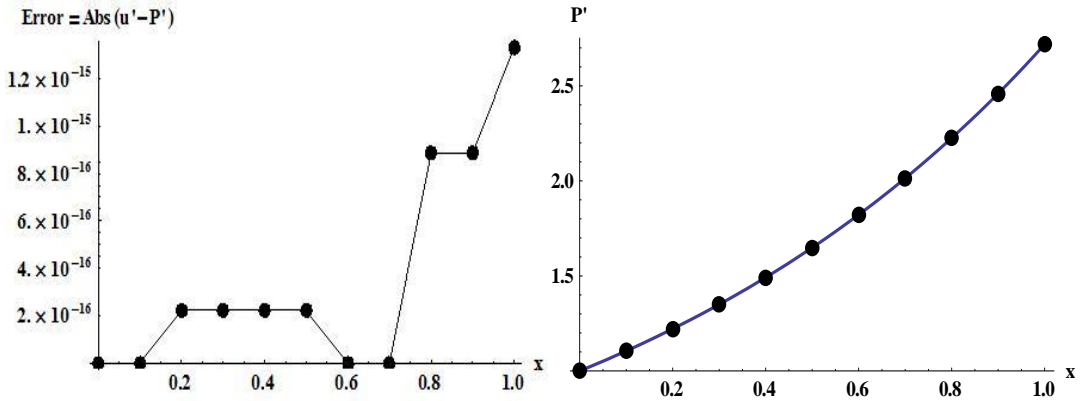
$x_i$	الحل الدقيق	OVIM [5,2017]	طريقتنا المقترحة
0.1	1.1051709180756477	1.1051709	1.1051709180756477
0.2	1.2214027581601699	1.2214028	1.22140275816017
0.3	1.3498588075760032	1.3498588	1.3498588075760032
0.4	1.4918246976412703	1.4918244	1.4918246976412703
0.5	1.6487212707001282	1.6487196	1.6487212707001284
0.6	1.822118800390509	1.8221128	1.8221188003905096
0.7	2.0137527074704766	2.0137348	2.013752707470477
0.8	2.225540928492468	2.2254948	2.2255409284924683
0.9	2.45960311115695	2.4594964	2.4596031111569503
1	2.718281828459045	2.7180556	2.718281828459045

الجدول (4): مقارنات للأخطاء المطلقة في الحل العددي لطريقتنا مع طريقة تكرار المتغير [1] وطريقة التحويل التفاضلي [2].

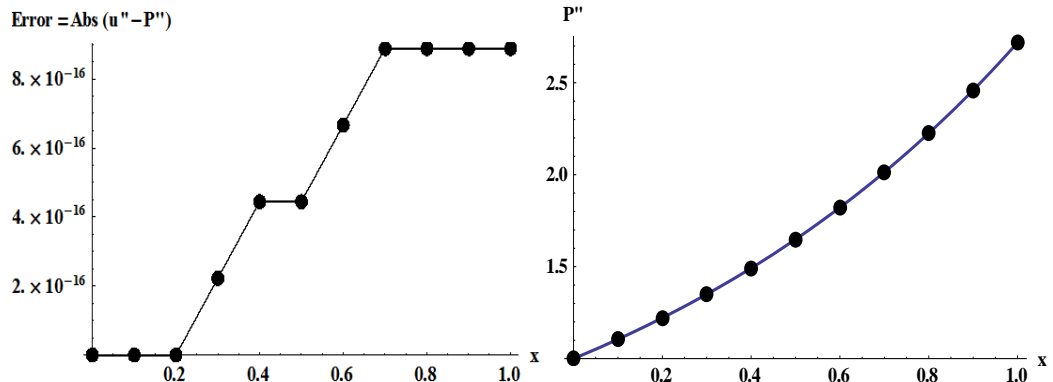
$x_i$	Variational Iteration Method [1]	Differential Transformation Method [2]	طريقتنا المقترحة
0.1	4.17444E-14	4.44089E-16	0.0000000000
0.2	2.64144E-12	4.44089E-16	2.22045 – 16
0.3	2.99314E-11	2.44249E-15	0.0000000000
0.4	1.67101E-10	7.32747E-15	0.0000000000
0.5	6.30955E-10	1.22125E-14	2.25432 E-16
0.6	1.84757E-09	1.11022E-14	3.054318 E-16
0.7	4.47866E-09	5.77316E-15	4.16981 E-16
0.8	9.21592E-09	1.77636E-15	4.22061E-16
0.9	1.58906E-08	8.88178E-16	4.44089E – 16
1.0	2.09057E-08	0.000000000	0.0000000000



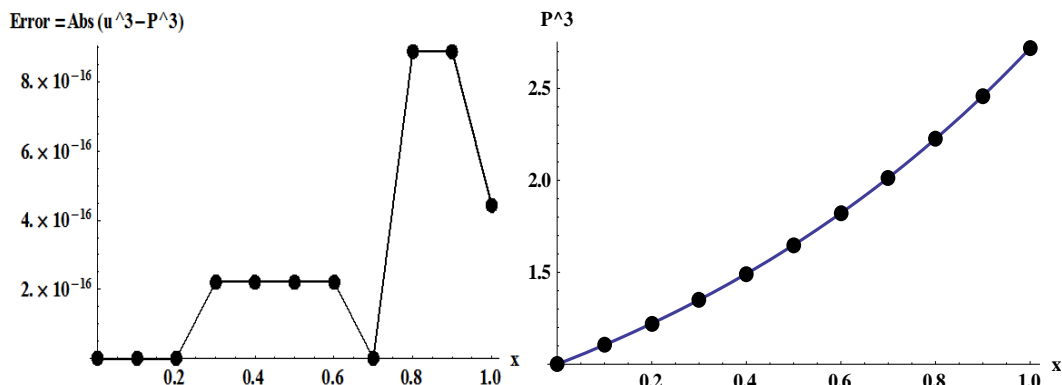
الشكل(21): الحل العددي  $P(x)$ : مع الحل الدقيق:  $u(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



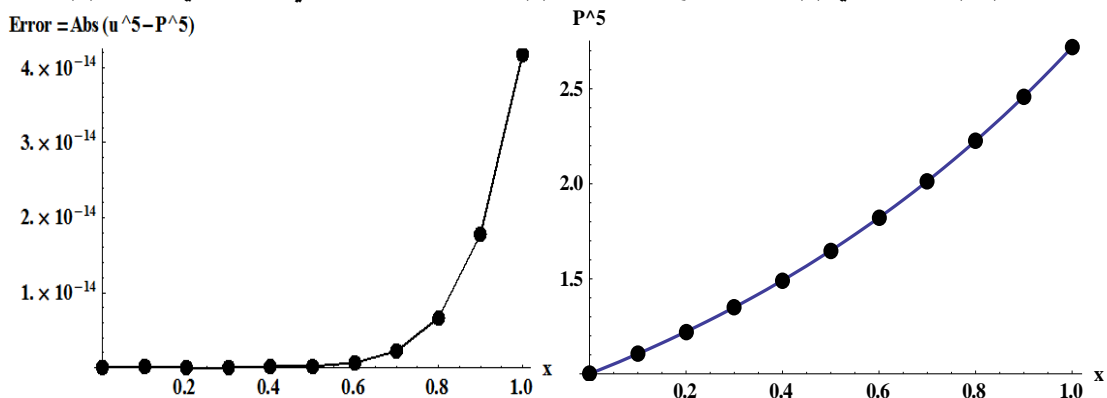
الشكل(22): الحل العددي  $P'(x)$ : مع الحل الدقيق:  $u'(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



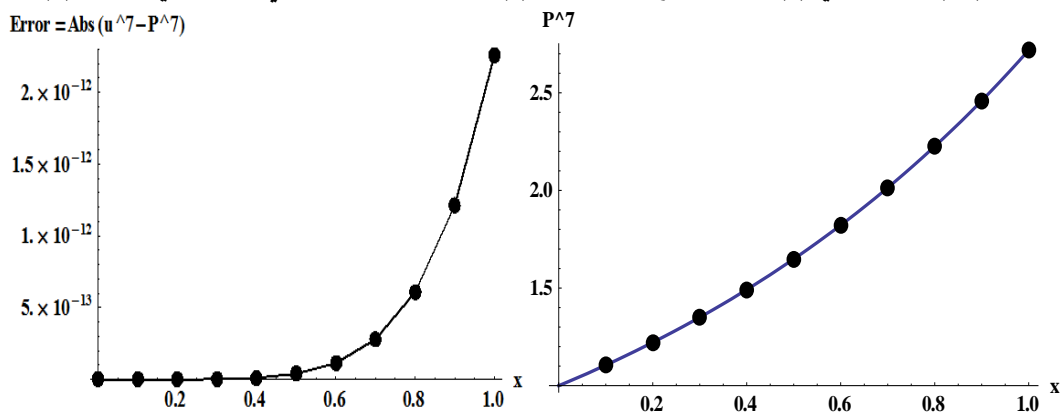
الشكل(23): الحل العددي  $P''(x)$ : مع الحل الدقيق:  $u''(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



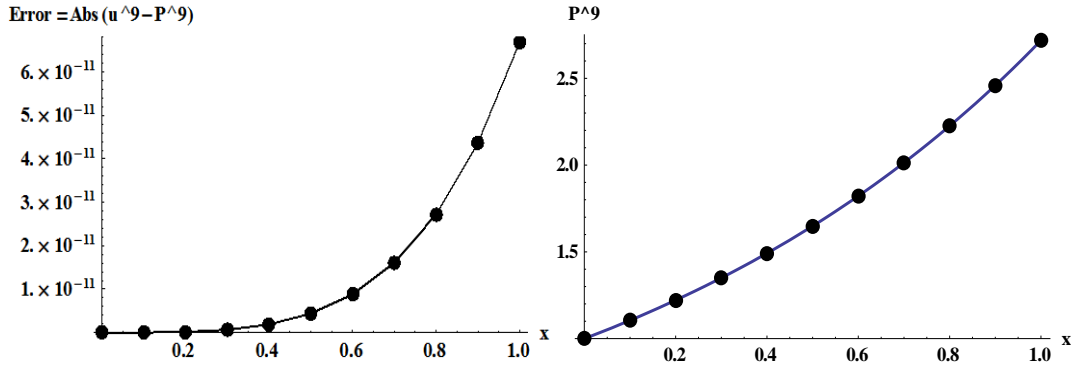
الشكل (24): الحل العددي  $P^3(x)$  مع الحل الدقيق:  $u^3(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



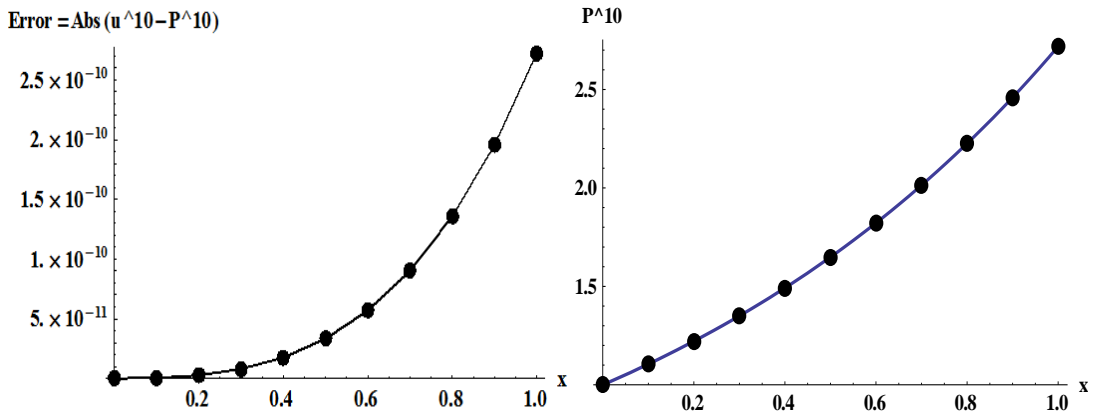
الشكل (25): الحل العددي  $P^5(x)$  مع الحل الدقيق:  $u^5(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



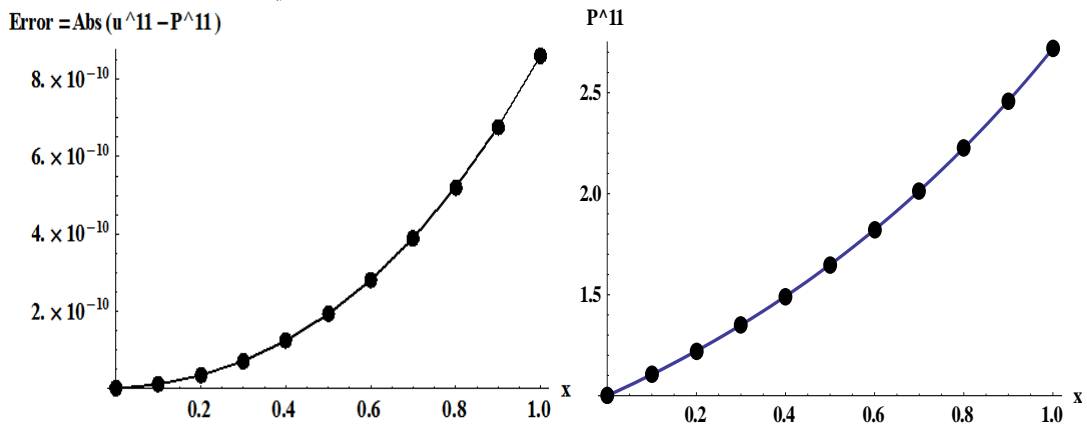
الشكل (26): الحل العددي  $P^7(x)$  مع الحل الدقيق:  $u^7(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



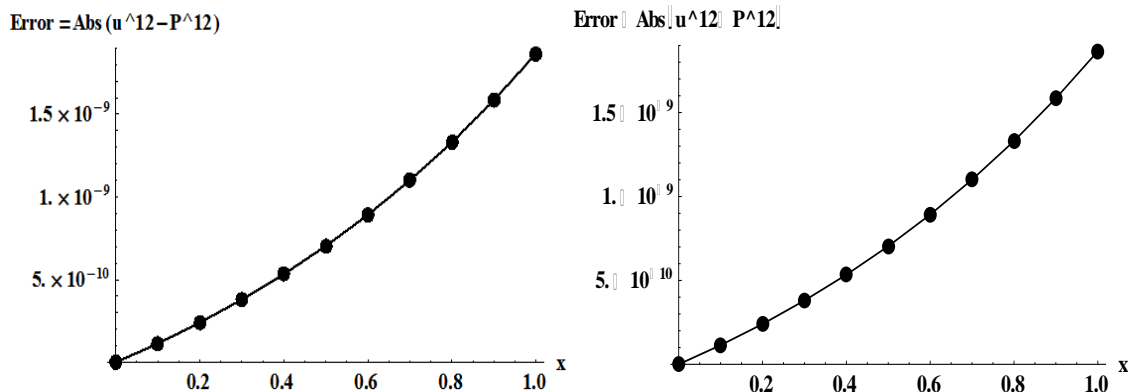
الشكل (27): الحل العددي  $P^9(x)$  مع الحل الدقيق:  $u^9(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



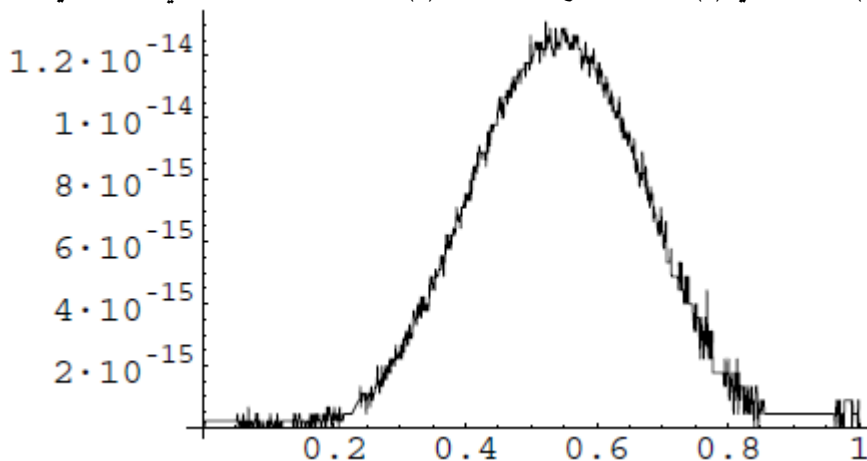
الشكل (28): الحل العددي  $P^{10}(x)$  مع الحل الدقيق:  $u^{10}(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



الشكل (29): الحل العددي  $P^{11}(x)$  مع الحل الدقيق:  $u^{11}(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



الشكل (30): الحل العددي  $P^{(12)}(x)$  مع الحل الدقيق:  $u^{(12)}(x)$  — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2)



الشكل (31): الخطأ المطلق في الحل العددي لطريقة تكرار المتغير الامثلية في [5] بخطوة  $h=0.1$ ، للمسألة (2).

## 6-الاستنتاجات والتوصيات: Conclusions and Recommendations

تم تطوير طريقة عددية فعالة تعتمد على تقريبات الحل التحليلي للمسألة بكثيرات حدود من الدرجة 17 مع استخدام أربع نقاط تجميع. تبين الدراسة أن الطريقة العددية المقترحة متناسقة من المرتبة السابعة عشرة عندما تم تطبيقها على مسألة اختبار. كما تبين النتائج العددية والمقارنات في الجداول (1)-(4) لطريقتنا المقترحة مع طريقة تكرار المتغير في [1] وطريقة التحويل التفاضلي في [2] وطريقة تقريب سلسلة القوى في [4] وطريقة تكرار المتغير الامثلية في [5] أن طريقتنا أكثر دقة وفعالية من الطرائق الأخرى. وكذلك تظهر الأشكال (1)-(31) أن طريقتنا العددية نجحت بإيجاد حلول عددية متقاربة إلى حد كبير من الحلول الدقيقة. ونظراً للدقة العددية والكفاءة العالية التي قدمتها الطريقة، نوصي باستخدامها لإيجاد الحلول العددية لهذا النمط من المسائل ذات المرتبة العالية، كما ونقترح تطوير طرائق عددية تجميعية لحل مسائل قيم حدية من مراتب أعلى.

**7- المراجع : Reference**

1. ADEOSUN T. A., FENUGA O. J., ADELANA S. O., JOHN A. M., OLALEKAN O., and ALAO K. B., *Variational Iteration Method Solutions for Certain Thirteenth Order Ordinary Differential Equations*, Appl. Math. Vol. 4 (2013), pp.1405–1411.
2. IFTIKHAR M., H. U. REHMAN, and M. YOUNIS, *Solution of Thirteenth Order Boundary Value Problems by Differential Transformation Method*, Asian Journal of Mathematics and Applications, Vol. 2014, 11 pages.
3. ZHI S., F. LI (2014), *Numerical solution of high-order differential equations by using periodized Shannon wavelets Applied Mathematical Modelling*, Vol., 38, pp.2235-2248.
4. NJOSEH I. N. and MAMADU E., J., *Numerical Solutions of a Generalized Nth Order Boundary Value Problems Using Power Series Approximation Method*, Applied Mathematics, 2016, Vol.7, pp.1215–1224.
5. NJOSEH I. N. and MAMADU E., J., *Optimal Variation Iteration Method For Solving Thirteenth-Order Boundary Value Problems*, Nigerian Annals of Natural Sciences, Vol. 16, No.1, 2017, pp. 76 – 81.
6. MAHMOUD S. M. and EHSAAN S. 2017, *Approximate Solutions of Twelfth-Order Boundary Value Problems by Using Spline Technique*, Tishreen University Journal Research-Basic Science Series Vol. 39, No.5, 2017.
7. FALADE, K.I, *A Numerical Approach for Solving High-Order Boundary Value Problems*, I.J. Mathematical Sciences and Computing, 2019, Vol. 3, pp.1-16.
8. EL-GAMEL M., ADEL W., EL-AZAB M. S., *Bernoulli polynomial and the numerical solution of highorder boundary value problems*, Math. Nat. Sci., Vol.4 (2019), pp.45–59.
9. JAJARMI A. and BALEANU D., *A New Iterative Method for the Numerical Solution of High-Order Non-linear Fractional Boundary Value Problems*, Frontiers in Physics, www.frontiersin.org, Vol. 8, 2020, pp.1-8.