مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٥) العدد (٣) 2021
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- Basic Sciences Series Vol. (5) No. (3) 2021

أسس المرونة الحرارية المعممة ونموذج Lame الترموديناميكي المعمم بزمن استراحة واحد بالشكل التنسوري الصامد

علاء خلوف*

(تاريخ الإيداع ٢٧ / ٥ / ٢٠٢٠ . قُبل للنشر ١١ / ٧ / ٢٠٢١)

الملخص

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي التقليدي لجسم مرن غير متماثل المناحي (Anisotropic) ومتجانس (Homogeneous)، ومهمل البنية الجزيئية ويعاني من انفعالات مرنة صغيرة، ضمن المرونة الخطية التحريكية، المعممة، المترابطة مع الحرارة، حيث الفرق بين درجة الحرارة المطلقة والطبيعية صغير جداً ، وقانون التوصيل الحراري هو قانون Maxwell، بدلاً من قانون Fourier في التوصيل الحراري، الأمر الذي يقود إلى معادلة توصيل حراري من النمط الزائدي بسرعة موجية منتهية في اللانهاية وزمن استرخاء واحد [1]. مثل هذا السلوك الترموديناميكي المعمم تمت مناقشته بدايةً من خلال الباحثين Lord و Shulman [1] ، حيث يُرمز لمثل هذا الجسم بالرمز (L–S). في البحث، سنعرض أولاً الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي للنموذج الرياضي التقليدي لـ (L–S). بعدها سنناقش الشكل التنسوري الصامد للنموذج الرياضي للجسم المرن (L–S) ، أخيراً سننهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة.

الكلمات المفتاحية: الجسم (L–S) المرن الخاضع لحرارة يرمن استرخاء واحد، الشكل التنسوري، الصامت للنموذج الرياضي للجسم (L–S) الترموديناميكي، المرن، بزمن استرخاء واحد.

---

* يحمل ماجستير في الرياضيات التطبيقية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٥) العدد (٣) 2021
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- Basic Sciences Series Vol. (5) No. (3) 2021

The foundations of the generalized thermoelasticity and Lame model with one relax time in the invariable tensorial form

Alaa Ahmad Khallouf*

(Received 27 / 5 / 2020 . Accepted 11 / 7 / 2021)

Abstruct

This paper concerns the mathematical linear model of elastic, homogeneous and anisotropic body, with neglected structure and small elastic strains, subjected to temperature field, in the frame of linear generalized coupled thermoelasticity with difference between the absolute and natural temperatures is very small and the Maxwell hot conduction law is considerable instead of the classical Fourier one, which leads to hyperbolic heat conduction equation with finite in infinity wave speed and one relax time [1]. Such a generalized thermo-dynamical behavior was proposed firstly by Lord and Shulman [1], for which the body shortly called (L-S).At First, we introduce the (L-S) mathematical model in the Cartesian coordinate system. In paper, we discuss the invariable tensorial form of the (L-S) mathematical model. Finally, we end the paper by suggesting some problems for discussing.

Key words: The (L-S) Thermoelastic Body with One Relax Time, Invariable Tensor Form of the Mathematical Descriptions of Generalized Thermodynamical (L-S) Elastic Body with One Relax Time.

‡* Math. Magister in Applied Mathematics.

مقدمة:

تعتبر النظرية التقليدية (الخطية) للمرونة الحرارية (Carlson,1972) نقطة البداية لنظريات أخرى معممة، تشمل: المرونة اللزجة الحرارية، والمرونة الحرارية مع انتشار، والمرونة الكهرطيسية الحرارية ، والمرونة الحرارية بسرعات موجية منتهية في اللانهاية. ظهرت نظرية المرونة المعممة بزمن استرخاء واحد نتيجة إجراء تعديل على معادلة التوصيل الحراري، التقليدية الكهرطيسية ، حيث اقترح هذا التعديل Maxwell (1867) في إطار نظرية الغازات، من ثم Cattaneo (1948) في إطار التوصيل الحراري في الجسم القاسي، من ثم العديد من الباحثين، أبرزهم Lord و Shulman (1967) [1] في إطار الجسم القابل للتشوه.

في [1] تمت مناقشة الأسس والنموذج الرياضي للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد، ذلك في النظام الاحداثي الديكارتي.

هدف و أهمية البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج الشكل التنسوري الصامد لكلٍ من الأسس والنموذج الرياضي للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد، حيث الجسم متجانس، وغير متماثل المناحي، ويشغل في لحظة البدء، منطقة B بسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3. أما أهمية البحث فتكمن بالآتي. كتابة النموذج الرياضي للجسم (L–S) بالشكل التنسوري الصامد تمكننا من اسقاطه في النظام الاحداثي المنحني، الذي يسهل فيه حل مسألة الجسم.

طرق البحث:

سنعتمد تعميم الطريقة المستخدمة في [2,3,7] في إيجاد الشكل التنسوري الصامد للأسس والنموذج الرياضي للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد، حيث الجسم متجانس وغير متماثل المناحي ويشغل في لحظة البدء، منطقة B بسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3. لهذا الغرض نعرض فيمايلي نتائج [1] ، المتمثلة بالأسس الترموديناميكية المعممة والنموذج الرياضي التقليدي الترموديناميكي المعمم للجسم المعتبر (L–S) ذي زمن استرخاء واحد، و في النظام الاحداثي الديكارتي.

الأسس الترموديناميكية المرنة، المعممة والنموذج الرياضي من نوع Lame في النظام الاحداثي الديكارتي للجسم (L–S)، المتجانس ، وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B المحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

توطئة: سنفترض أن جميع الأدلة اللاتينية $i\,,\,j\,,\,k\,,\ldots$ تأخذ القيم $1\,,2\,,3$ ، وسنعتمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3، ولتكن $O\,x_1\,x_2\,x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة ، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي $(\mathbf{e}_1\,,\,\mathbf{e}_2\,,\,\mathbf{e}_3)$. إن العملية الترموديناميكية المعممة المرنة للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S)، توصف بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية $\{\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{E}\,,\,\mathbf{S}\,,\,\vartheta\,,\,\eta\,,\,\mathbf{q}\,\}$، حيث $\mathbf{u}$ مقطع متجهي، يمثل فيزيائياً حقل الإزاحات، أما $\mathbf{E}$ و $\mathbf{S}$ فهما مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، ومتناظران، هماعلى الترتيب، حقل الانفعالات وحقل الاجهادات، كما أن $\vartheta=\theta-\theta_0$ ، حيث θ مقطع الحرارة المطلقة في الجسم وهو مقطع سلمي، و θ_0

درجة حرارة الحالة الطبيعية للجسم[٢]، (مقدار ثابت موجب)، أخيراً $\mathbf{q}$, η ، على الترتيب هما مقطع الأنتروبية في الجسم وهو مقطع سلمي، ومقطع التدفق الحراري وهو مقطع متجهي. إذا رمزنا بـ $A^+ :=]\,0\,,\infty\,[$ و بـ $A := [\,0\,,\infty\,[$، فيمكن أن تُمثل الحقول السابقة في $B \times A$، و في النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$، بالشكل التالي:

$$\mathbf{u} = \hat{u}_i\,\mathbf{e}_i \;,\; \mathbf{E} = \hat{E}_{i\,j}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \;,\; \mathbf{S} = \hat{S}_{i\,j}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \;,\; \mathbf{q} = \hat{q}_i\,\mathbf{e}_i \qquad (3.1)$$

حيث المصفوفة $\hat{u}_i$ في الطرف الأيمن للعلاقة الأولى في (3.1) تمثل مصفوفة المركبات في القاعدة الديكارتية $\mathbf{e}_i$ ، لمقطع الإزاحات $\mathbf{u}$، أما المصفوفتان $\hat{E}_{i\,j}\,,\hat{S}_{i\,j}$ الموجودتان في الطرف الأيمن للعلاقتين الثانية والثالثة في (3.1) فهما متناظرتان، وتمثلان ، على الترتيب، مصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\mathbf{E}$، ومصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\mathbf{S}$، أخيراً، المصفوفة $\hat{q}_i$ تمثل مصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع المتجهي $\mathbf{q}$. إن مجموعة المقاطع التنسورية السابقة مجهولة، ويقابها المقطعين التنسوريين، المعلومين التاليين في $B \times A$؛ هما مقطع القوة الحجمية المتجهي:

$$\mathbf{b} = \hat{b}_i\,\mathbf{e}_i \qquad (3.2)$$

ومقطع المصادر الحرارية r وهو مقطع سلمي.

تعريف١: ندعو مجموعة المقاطع التنسورية الناطقة، المجهولة $\{\hat{u}_i\,,\hat{E}_{i\,j}\,,\hat{S}_{i\,j}\,,\vartheta\,,\eta\,,\hat{q}_i\}$

سلوكاً ترموديناميكياً معمماً بزمن استرخاء واحد $t_0 > 0$، متوافقاً في $B \times A$ مع المقطعين التنسوريين المجهولين، الناطقين: $\hat{b}_i\,,\,r$ ، إذا وفقط إذا حققت هذه المقاطع التنسورية المعادلات الآتية في $B \times A$:

$$\hat{E}_{i\,j} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i\,,j} + \hat{u}_{j\,,i})\,, \qquad (3.3)$$

$$\hat{S}_{j\,i\,,\,j} + \hat{b}_i = \rho\,\ddot{\hat{u}}_i\;, \qquad (3.4)$$

$$\theta_0\,\dot{\eta} = -\hat{q}_{i\,,i} + r\;, \qquad (3.5)$$

$$\hat{S}_{i\,j} = \hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\,\hat{E}_{k\,\ell} + \hat{M}_{i\,j}\,\vartheta\;, \qquad (3.6)$$

$$\theta_0\,\eta = -\theta_0\hat{M}_{i\,j}\hat{E}_{i\,j} + C_E\,\vartheta\;, \qquad (3.7)$$

$$L\,\hat{q}_i = -\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,j}\;, \qquad (3.8)$$

حيث L هو مؤثر المؤثر الاشتقاقي المعطى بالعلاقة:

$$L := 1 + t_0\,\partial/\partial t\;;\; t_0 > 0 \qquad (3.9)$$

في العلاقات $(3.8)-(3.3)$، رمز الفاصلة الدليلية يدل على المشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع؛ $f_{\,,i} \equiv \partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial X_i}$ ، رمز النقطة يدل على المشتق الجزئي الزمني؛ $\dot{f} \equiv \partial_t f = \dfrac{\partial f}{\partial t}$، الرمز ρ يدل على

[٢] الحالة الطبيعية للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S)، هي الحالة التي ينعدم فيها كلاً من مقطع الأنتروبية η والمقطعين التنسوريين: $\mathbf{E}$ و $\mathbf{S}$.

مقطع الكثافة الحجمية للجسم وهو مقدار ثابت نظراً لأن الجسم متجانس ، الرموز $\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\,,\ \hat{M}_{i\,j}\,,\ C_E$، على الترتيب، تدل على المركبات الديكارتية لمقطع المرونة، والمركبات الديكارتية لمقطع الإجهاد الحراري، وعلى الحرارة النوعية للجسم لأجل حالة انعدام مقطع الانفعال المرن له. إن هذه المقادير تحقق الخواص التالية:

$$\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell} = \hat{C}_{j\,i\,k\,\ell} = \hat{C}_{i\,j\,\ell\,k} = \hat{C}_{k\,\ell\,i\,j}\,, \qquad (3.10)$$

$$\hat{M}_{i\,j} = \hat{M}_{j\,i}\ ,\ C_E > 0\ , \qquad (3.11)$$

$$\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\,\hat{E}_{i\,j}\,\hat{E}_{k\,\ell} > 0\ , \qquad (3.12)$$

كما أن الرموز $\hat{k}_{i\,j}$ تدل عل المركبات الديكارتية لمقطع التوصيل الحراري $\mathbf{k}$، وهي تحقق:

$$\hat{k}_{i\,j} = \hat{k}_{j\,i}\ ,\ \hat{k}_{i\,j}\ \vartheta_{,i}\ \vartheta_{,j} > 0\,, \qquad (3.13)$$

إذا فرضنا، الآن أن كلٍ من $\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}$ و $\hat{k}_{i\,j}$ قابل للقلب ، وأن:

$$\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell} = (\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell})^{-1}\,,\quad \hat{\lambda}_{i\,j} = (\hat{k}_{i\,j})^{-1} \qquad (3.14)$$

$$\hat{A}_{i\,j} = -\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell}\hat{M}_{k\,\ell}\,,\ \ C_S = C_E - \theta_0\hat{M}_{i\,j}\hat{A}_{i\,j} \qquad (3.14)$$

فتأخذ (3.9) − (3.3) الشكل المكافئ التالي في $B \times A$ [1]:

$$\hat{E}_{i\,j} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i\,,j} + \hat{u}_{j\,,i})\,, \qquad (3.15)$$

$$\hat{S}_{j\,i\,,\,j} + \hat{b}_i = \rho\ddot{\hat{u}}_i\ , \qquad (3.16)$$

$$\theta_0\,\dot{\eta} = -\hat{q}_{i\,,i} + r\ , \qquad (3.17)$$

$$\hat{E}_{i\,j} = \hat{K}_{i\,j\,k\,\ell}\hat{S}_{k\,\ell} + \hat{A}_{i\,j}\,\vartheta\ , \qquad (3.18)$$

$$\theta_0\,\eta = \theta_0\,\hat{A}_{i\,j}\,\hat{S}_{i\,j} + C_S\,\vartheta\ , \qquad (3.19)$$

$$\vartheta_{,i} = -\,\hat{\lambda}_{i\,j}\,L\,\hat{q}_j\ , \qquad (3.20)$$

وهو تعريف جديد مكافئ للعملية الترموديناميكية المعممة المرنة للجسم (L−S)، المتوافقة في $B \times A$ مع الحمول الترموديناميكية المعلومة: $\{\mathbf{b},r\}$، حيث: $\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell}\,,\hat{A}_{i\,j}\,,\ \hat{\lambda}_{i\,j}$، على الترتيب تمثل: هي المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\mathbf{K}$ من المرتبة الرابعة، والذي يسمى بمقطع المطاوعة المرنة، والمركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\mathbf{A}$ من المرتبة الثانية، والذي يسمى بمقطع التمدد الحراري، والمركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\lambda}$ من المرتبة الثانية، الذي يسمى بمقطع المقاومة الحرارية، أخيراً C_S تمثل الحرارة النوعية للجسم (L−S) خلال انعدام مقطع إجهاداته، وإلى ماتقدم ذكره، نضيف أن الكميات السابقة تحقق الخواص التالية:

$$\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell} = \hat{K}_{j\,i\,k\,\ell} = \hat{K}_{i\,j\,\ell\,k} = \hat{K}_{k\,\ell\,i\,j}\,, \qquad (3.21)$$

$$\hat{A}_{i\,j} = \hat{A}_{j\,i}\ ,\ C_S > 0\ , \qquad (3.22)$$

$$\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell}\hat{S}_{i\,j}\hat{S}_{k\,\ell} > 0\ , \qquad (3.23)$$

$$\hat{\lambda}_{i\,j} = \hat{\lambda}_{j\,i}\ ,\ \hat{\lambda}_{i\,j}\,\hat{q}_i\,\hat{q}_j > 0\ , \qquad (3.24)$$

ملاحظة١: إذا كان الجسم غير متجانساً، عندئذٍ تصبح المقادير: ρ و C_E و $\hat{k}_{i\,j}$ و $\hat{M}_{i\,j}$ و $\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}$ ، ونظرائها: ρ^{-1} و C_S^{-1} و $\hat{\lambda}_{i\,j}$ و $\hat{A}_{i\,j}$ و $\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell}$، وكذلك t_0، تابعة للموضع: $\mathbf{X}\equiv(X_1,X_2,X_3)$ ولا تتبع للزمن t. عندئذٍ تدعى هذه الكميات بالتوابع المادية للجسم الترموديناميكي المعمم وغير المتجانس (L–S).

ملاحظة٢:

واضح أن العملية الترموديناميكية المعممة للجسم (L–S)، المتوافقة في $B\times A$ مع الحمول الترموديناميكية المعلومة $\{\mathbf{b},r\}$، يمكن أن توصف إما من خلال (3.9)–(3.3)، أو من خلال (3.20)–(3.15). بما أن كلا النظامين معقد، فعادةً ما نقوم باختصار كلاً منها إلى نظام يحتوي أقل عدد ممكن من المقاطع التنسورية المجهولة. على سبيل المثال، بحذف مقطع الأنتروبية η من النظام (3.9)–(3.3) أو من النظام (3.20)–(3.15)، نجد أن العملية الترموديناميكية المعممة $\{\mathbf{u},\mathbf{E},\mathbf{S},\vartheta,\mathbf{q}\}$، موصوفة في $B\times A$ من خلال النظام المعادلاتي:

$$\hat{E}_{i\,j}=\frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j}+\hat{u}_{j,i})\,, \tag{3.25}$$

$$\hat{S}_{j\,i\,,\,j}+\hat{b}_i=\rho\ddot{\hat{u}}_i\,, \tag{3.26}$$

$$-\hat{q}_{i\,,i}+r=C_E\,\dot{\vartheta}-\theta_0\hat{M}_{i\,j}\dot{\hat{E}}_{i\,j}\,, \tag{3.27}$$

$$\hat{S}_{i\,j}=\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\hat{E}_{k\,\ell}+\hat{M}_{i\,j}\,\vartheta\,, \tag{3.28}$$

$$L\,\hat{q}_i=-\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,j}\,, \tag{3.29}$$

أو من خلال النظام المعادلاتي:

$$\hat{E}_{i\,j}=\frac{1}{2}(\hat{u}_{i\,,\,j}+\hat{u}_{j\,,i})\,, \tag{3.30}$$

$$\hat{S}_{j\,i\,,\,j}+\hat{b}_i=\rho\ddot{\hat{u}}_i\,, \tag{3.31}$$

$$-\hat{q}_{i\,,\,i}+r=C_S\,\dot{\vartheta}+\theta_0\hat{A}_{i\,j}\dot{\hat{S}}_{i\,j}\,, \tag{3.32}$$

$$\hat{E}_{i\,j}=\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell}\hat{S}_{k\,\ell}+\hat{A}_{i\,j}\,\vartheta\,, \tag{3.33}$$

$$\vartheta_{,i}=-\hat{\lambda}_{i\,j}\,L\,\hat{q}_j\,, \tag{3.35}$$

الشكل الديكارتي للنموذج الرياضي من نوع Lame للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S)، المتجانس، وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

نحصل على هذا انموذج الرياضي من النظام (3.29)–(3.25)، بحذف المقاطع التنسورية: $\hat{E}_{i\,j},\hat{S}_{i\,j},\hat{q}_i$ ، فنحصل على معادلات الإزاحة والحرارة، التالية المحققة في $B\times A^{+}$:

$$\left(\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\hat{u}_{k,\ell}\right)_{,\,j}-\rho\ddot{\hat{u}}_i+\left(\hat{M}_{i\,j}\,\vartheta\right)_{,\,j}=-\hat{b}_i\,, \tag{3.36}$$

$$\left(\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,\,j}\right)_{,i}-C_E\,L\,\dot{\vartheta}+\theta_0\hat{M}_{i\,j}\,L\,\dot{\hat{u}}_{i\,,\,j}=-L\,r\,, \tag{3.37}$$

نضيف إلى ذلك الشروط الحدية والابتدائية التالية.

الشروط الابتدائية في B :

$$\hat{u}_i(.\,,0)=\hat{u}_{i\,0}\ ,\ \ \dot{\hat{u}}_i(.\,,0)=\dot{\hat{u}}_{i\,0}\quad \text{in } B\ , \tag{3.38}$$

$$\vartheta(.\,,0)=\vartheta_0\ ,\ \ \dot{\vartheta}(.\,,0)=\dot{\vartheta}_0\quad \text{in } B\ , \tag{3.39}$$

حيث المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\hat{u}_{i\,0},\dot{\hat{u}}_{i\,0}\,,\vartheta_0\,,\dot{\vartheta}_0\}$ مفروضة في B،

الشروط الحدية على $\partial B \times A$:

$$\hat{u}_i=\hat{u}'_i\quad \text{on } \partial B_1\times A\ , \tag{3.40}$$

$$\left(\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\hat{u}_{k,\ell}+\hat{M}_{i\,j}\,\vartheta\right)\hat{n}_j=\hat{S}'_i\quad \text{on } \partial B_2\times A\ , \tag{3.41}$$

$$\vartheta=\vartheta'\quad \text{on } \partial B_3\times A\ , \tag{3.42}$$

$$-\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,j}\,\hat{n}_i=q'\quad \text{on } \partial B_4\times A\ , \tag{3.43}$$

حيث:

$$\partial B=\partial B_1\cup\partial B_2=\partial B_3\cup\partial B_4\ , \tag{3.44}$$

$$\partial B_1\cap\partial B_2=\partial B_3\cap\partial B_4=\Phi\ , \tag{3.45}$$

والمقاطع التنسورية الناطقة $\{\hat{u}'_i\,,\hat{S}'_i\,,\vartheta',q'\}$ مفروضة، و $\hat{n}_i$ المركبات الديكارتية لمقطع الواحدة المتجهي $\mathbf{n}$ على السطح ∂B، والموجه نحو خارج ∂B.

تعريف٣: ندعو المقطعين التنسوريين الناطقين: $\{\hat{u}_i\,,\vartheta\}$ (النتائج)، المحققين للمعادلات الترموديناميكية المعممة (3.37)–(3.36)، للشروط الابتدائية(3.39)–(3.38) والشروط الحدية (3.45)–(3.40)، ندعوهما بسلوك Lame الترموديناميكي المعمم في $B\times A$ للجسم (L–S)، والمتوافق مع الحمول الترموديناميكية المفروضة (المسببات):

$$\{\,\hat{b}_i\ ,\,r\,,\hat{u}_{i\,0}\,,\dot{\hat{u}}_{i\,0}\,,\,\vartheta_0\,,\dot{\vartheta}_0,\hat{u}'_i\,,\hat{S}'_i\,,\,\vartheta',q'\,\} \tag{3.46}$$

النتائج والمناقشة:

سنناقش الشكل التنسوري الصامد للأسس الترموديناميكية المعممة ولوصف Lame الترموديناميكي المعمم للجسم (L–S) المتجانس وغير متماثل المناحي، باتباع طريقة هي تعميم الطريقة المستخدمة في [2,3,7,10]، انطلاقاً من حقيقية أن اللامتغيرات ومنها المقاطع التنسورية، لا تتغير بتغيير النظام الاحداثي المنحني. يتألف الشكل التنسوري الصامد، للأسس الترموديناميكية المعممة للجسم (L–S)، المتجانس وغير المتماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط والمحدودة B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3، يتألف من المعادلات التنسورية الصامدة، التالية المحققة في $B\times A$ [7,10]:

$$\mathbf{E}:=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T\,] \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{S}+\mathbf{b}=\rho\ddot{\mathbf{u}} \tag{4.2}$$

$$-\operatorname{div}\mathbf{q}+r=C_E\,\dot{\vartheta}-\theta_0\mathbf{M}:\dot{\mathbf{E}}\ , \tag{4.3}$$

$$\mathbf{S}=\mathbf{C}[\mathbf{E}]+\mathbf{M}\,\vartheta\ , \tag{4.4}$$

$$L\,\mathbf{q}=-\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\ , \tag{4.5}$$

أو من المعادلات التنسورية الصامدة، التالية المحققة في $B \times A$:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \tag{4.6}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{4.7}$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} + r = C_S \dot{\vartheta} + \theta_0 \mathbf{A} : \dot{\mathbf{S}} , \tag{4.8}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}[\mathbf{S}] + \mathbf{A} \vartheta , \tag{4.9}$$

$$\nabla \vartheta = -\boldsymbol{\lambda} L \, \mathbf{q} , \tag{4.10}$$

حيث: الرمز: $\nabla = \mathbf{e}_i \, \partial_i$ ؛ $\nabla \mathbf{u} \equiv \operatorname{grad} \mathbf{u} = \hat{u}_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$، والرمز الرمز $\mathbf{Q}^T$ يدل على منقول المقطع التنسوري $\mathbf{Q}$[٣]، والرمز div يرمز للتفرق: $\operatorname{div} \mathbf{S} = (\partial_j \hat{S}_{ji}) \, \mathbf{e}_i$، حيث ∂_k يمثل المشتق الجزئي بالنسبة للموضع X_k ؛ $\partial_k \hat{S}_{ji} = \dfrac{\partial \hat{S}_{ji}}{\partial X_k} \equiv \hat{S}_{ji,k}$، والرمز $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{E}}$ يمثل الجداء الداخلي للمقطع التنسوري $\mathbf{M} = \hat{M}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ مع المقطع التنسوري $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\hat{E}}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$، وبحسب تعريفه يعطى بـ : $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{E}} = \hat{M}_{ij} \dot{\hat{E}}_{ij}$. كما أن: $\mathbf{C}[\mathbf{E}] = \hat{C}_{ijk\ell} \hat{E}_{k\ell} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$، أخيراً: $\mathbf{k} \nabla \vartheta = \hat{k}_{ij} \vartheta_{,j} \mathbf{e}_i$.

الشكل التنسوري الصامد للنموذج الرياضي من نوع Lame للجسم الترموديناميكي المعمم (L−S)، المتجانس، وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

نحصل على هذا انموذج الرياضي من النظام المعادلاتي التنسوري الصامد (4.5)−(4.1)، بحذف المقاطع التنسورية: $\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{q}$، ذلك باتباع مايلي. بتعويض (4.1) في (4.3) و (4.4)، ومن ثم الأخذ بعين الاعتبار أن [10]:

$$\mathbf{M} : (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T = \mathbf{M} : \nabla \dot{\mathbf{u}} \ , \ \mathbf{C}\left[(\nabla \mathbf{u})^T\right] = \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] ,$$

$$\mathbf{M} : \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \mathbf{M} : \left[\nabla \dot{\mathbf{u}} + (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T\right] = \mathbf{M} : \nabla \dot{\mathbf{u}} \ , \tag{4.11}$$

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}] = \frac{1}{2} \mathbf{C}\left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\right] = \frac{1}{2}\left\{\mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] + \mathbf{C}\left[(\nabla \mathbf{u})^T\right]\right\} = \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] ,$$

فنحصل على المعادلين النصوريتين الصامدتين، التاليتين المحققتين في $B \times A^+$:

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} + r = C_E \dot{\vartheta} - \theta_0 \mathbf{M} : \nabla \dot{\mathbf{u}} \ , \tag{4.12}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] + \mathbf{M} \vartheta , \tag{4.13}$$

بتطبيق المؤثر L على طرفي (4.12)، وبالأخذ بعين الاعتبار استقلال $\mathbf{M}$ و C_E عن الزمن نحصل على المعادلة التنسورية الصامدة التالية المحققة في $B \times A^+$:

$$-\operatorname{div} L \, \mathbf{q} + L r = C_E L \dot{\vartheta} - \theta_0 \mathbf{M} : \nabla (L \dot{\mathbf{u}}) \ , \tag{4.14}$$

في الخطوة الأخيرة، بتعويض (4.13) في (4.2) و (4.5) في (4.14)، نحصل على معادلتي الإزاحة والحرارة التاليتين بشكلهما التنسوري الصامد في $B \times A^+$:

---

[٣] انظر [10] صفحة 6.

$$\operatorname{div}\{\mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}]\} + \operatorname{div}(\mathbf{M}\vartheta) + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \ , \qquad (4.15)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{k}\nabla\vartheta) + L\,r = C_E\,L\,\dot{\vartheta} - \theta_0\,\mathbf{M} : \nabla(L\dot{\mathbf{u}}) \ , \qquad (4.16)$$

وبما أن [7.p.12]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{k}^T = \mathbf{k} \ , \ \operatorname{div}(\mathbf{M}\vartheta) = \vartheta \operatorname{div}\mathbf{M} + \mathbf{M}\nabla\vartheta \ , \\ &\operatorname{div}\left(\mathbf{k}^T\nabla\vartheta\right) = (\nabla\vartheta) \, . \operatorname{div}\mathbf{k} + \mathbf{k} \, . \nabla(\nabla\vartheta) \ , \end{aligned} \qquad (4.17)$$

فتأخذ المعادلتان التنسوريتان (4.16)−(4.15)، الشكل التالي في $B \times A^+$:

$$\operatorname{div}\{\mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}]\} + \mathbf{M}\nabla\vartheta + \vartheta \operatorname{div}\mathbf{M} + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \ , \qquad (4.18)$$

$$\mathbf{k} \, . \nabla(\nabla\vartheta) + (\nabla\vartheta) \, . \operatorname{div}\mathbf{k} - C_E\,L\,\dot{\vartheta} + \theta_0\,\mathbf{M} : \nabla(L\dot{\mathbf{u}}) = -L\,r \ , \quad (4.19)$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية:

الشروط الابتدائية في B :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \ , \ \ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 \ , \qquad (4.20)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \ , \ \ \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 \ , \qquad (4.21)$$

حيث المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0, \vartheta_0, \dot{\vartheta}_0\}$ مفروضة في B،

الشروط الحدية على $\partial B \times A$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' \quad \text{on } \partial B_1 \times A \ , \qquad (4.22)$$

$$\{\mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] + \mathbf{M}\vartheta\}\mathbf{n} = \mathbf{S}' \quad \text{on } \partial B_2 \times A \ , \qquad (4.23)$$

$$\vartheta = \vartheta' \quad \text{on } \partial B_3 \times A \ , \qquad (4.24)$$

$$-(\mathbf{k}\nabla\vartheta)\mathbf{n} = q' \quad \text{on } \partial B_4 \times A \ , \qquad (4.25)$$

تعريف۱: ندعو المقطعين التنسوريين الصامدين: $\{\mathbf{u}, \vartheta\}$ (النتائج)، المحققين للمعادلات التنسورية الناطقة، الترموديناميكية المعممة (4.19)−(4.18)، وللشروط الابتدائية (4.21)−(4.20) وللشروط الحدية (4.25)−(4.22)، ندعوهما بسلوك Lame التنسوري الصامد،الترموديناميكي المعمم في $B \times A$ للجسم (L−S)، والمتوافق مع الحمول الترموديناميكية المفروضة (المسببات):

$$\{\ \mathbf{b}, r, \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0, \vartheta_0, \dot{\vartheta}_0, \mathbf{u}', \mathbf{S}', \vartheta', q'\ \} \qquad (4.26)$$

الاستنتاجات والمقترحات:

أولا) الاستنتاجات: استنتجنا الشكل التنسوري الصامد للأسس الترموديناميكية المعممة وعملية Lame الترموديناميكية المعممة للجسم (L−S) المتجانس وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B محدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3. وتكمن أهمية النتائج بأنه يمكن اسقاطها في نظام الإحداثيات المنحنية، الملائم الذي تسهل فيه حل المسألة.

ثانياً) المقترحات: يمكن أن نختتم البحث باقتراح ثلاث مسائل للمناقشة، هي الآتية:

المسألة الأولى: مناقشة الشكل التنسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي، للأسس الترموديناميكية المعممة ولعملية Lame الترموديناميكية المعممة للجسم (L–S) المتجانس وغير متماثل المناحي.

المسألة الثانية: مناقشة مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية للجسم (L–S) بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$، ذلك بالشكلين التنسوريين الصامد والناطق في نظام احداثي منحني كيفي.

المسألة الثالثة: مناقشة الشكلين التنسورين الصامد والناطق في نظام إحداثي منحني كيفي لكلٍ من العملية الترموديناميكية المعممة بزمني استراحة وسلوك Lame الترموديناميكي المعمم بزمني استراحة، والمتوافقين مع الجسم (G–L) (Green–Lindsay) [1] المتجانس وغير المتماثل المناحي.

المراجع

[1]- Ignaczak, J., Starzewski, M.O., 2010 - Thermoelasticity with Finite Wave Speeds, Oxford University Press Inc., New York.

[2]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y.,2013 - Theory of Elasticity and Thermal Stresses, Springer Science+Business Media Dordrecht.

[3] – Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., 2011 - The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition , CRC Press,Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742.

[4]- *Bertold Lysik, 1970* - Matematyczne Podstawy Teorii Sprężys-tości, Politechnika Wrocłwska.

[5]- Drobot , *S ,1971*-On Cosserat Continua , Zastos .Math. 12, 323 -346

[6]-*Heinbockel ,J.H, 1996*- Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.

[7] - Al-Hasan, M. and Attiah, W., 2019 - The Hooke thermo-dynamical model in a curve coordinate system, Journal of Al-Baath University,Vol.41, Accepted for Publication in 15/7/2019.

[8]-*Philippe G.Ciarlet* , 2005 - An Introduction To Differential Geometry with Applications to Elasticity , Liu Bie Ju Centre For mathematical Sciences ,Gty Unversity of Hong Kong , Department of mathematics.

[9]- *K. Hackl & M. Goodarzi*, 2010 - An Introduction to Linear Continuum Mechanics, Lecture Notes, Ruhr-University Bochum, Faculty of Civil and Environmental Engineering.

[10]- *Truesdell C.*, 1984 - Mechanics of Solids, Volume II, Springer- Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

[11]- *Hung Nguyen-Schåfer*, 2017 - Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[12]- *Rebecca M. Brannon*, 2004 - Curvilinear Analysis in a Euclidean Space, Second Edition, University of New Mexico.