مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (4) 2021

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (4) 2021

دراسة قابلية حل المعادلتين

$x^2 - \Delta y^2 = 3$ وَ $ax^2 + 2bxy + 3ay^2 = \pm 1$

د. نبيل علي*

د. حسن سنكري**

احمد عبدو***

(تاريخ الإيداع 21/6/ 2021– تاريخ النشر 20/ 9/ 2021)

□ ملخّص □

درسنا في هذا العمل المعادلتين:

$$ax^2 + 2bxy + 3ay^2 = \pm 1 \quad (I)$$
$$x^2 - \Delta y^2 = 3 \quad (II)$$

وقد برهنّا أنّه إذا كانت المعادلة (II) غير قابلة للحل فإنَّ المعادلة (I) تكون غير قابلة للحل أيضاً، ثمَّ أوجدنا شرطاً لازماً وكافياً كي تكون المعادلة (I) قابلة للحل بفرض أنَّ المعادلة (II) قابلة للحل، كذلك أوجدنا شرطاً لازماً وكافياً كي تكون المعادلة (II) قابلة للحل بفرض أنَّ المعادلة (I) قابلة للحل. وأخيراً أثبتنا في حالة خاصة عندما يكون Δ عدداً أولياً أنَّ الشرط اللازم والكافي كي تكون المعادلة (I) تكون قابلة للحل هو أن تكون المعادلة (II) قابلة للحل.

الكلمات المفتاحية: معادلة بل، الحقول التربيعيّة، مرافق عدد تربيعي.

* استاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس.

** استاذ دكتور – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين.

*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – كلية العلوم – قسم الرياضيات – جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (4) 2021

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (4) 2021

Studying of the solvability of the equations $x^2 - \Delta y^2 = 3$ and $ax^2 + 2bxy + 3ay^2 = \pm 1$

Dr. Nabil Ali*

Dr. Hasan Sankari**

Ahmad Abdo***

(Received 21/6/2021.Accepted 20/9/2021)

□ABSTRACT □

The aim of this article is studying the equations

$$ax^2 + 2bxy + 3ay^2 = \pm 1 \quad (I)$$

$$x^2 - \Delta y^2 = 3 \quad (II)$$

we proved that if equation (II) is unsolvable then the equation (I) is unsolvable, also we proved necessary and sufficient condition such that the equation (I) is solvable when the equation (II) is solvable, and we proved necessary and sufficient condition such that the equation (II) is solvable when the equation (I) is solvable. finally, we proved that if Δ is prime number then the equation (I) is solvable iff the equation (II) is solvable.

Key words: Pell equation, Quadratic Fields, conjugate of quadratic number.

*Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University.
**Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University.
***Master student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University.

المقدمة

تُعَدُّ المعادلات الديوفنتية من المواضيع المهمّة في الرياضيات، لذلك انصبّ اهتمام كثير من الباحثين على دراستها منذ مئات السنين، وحتّى يومنا هذا، وهناك العديد من ذوي الاختصاص والمهتمين في هذا المجال.

إنَّ الكثير من المعادلات الديوفنتية لم تُحلّ حتى الآن، على سبيل المثال المعادلة $x^2 - \Delta y^2 = 1$ حيث Δ عدد صحيح، والتي تُسمّى معادلة بِل، درسها في القرن السابع عشر كل من ($J.Wallis$ ،$W.Brouncker$، $Euler$، $Gauss$،....)

وفي القرن الثامن عشر استخدم لاغرانج الكسر المستمر لحل المعادلة $x^2 - \Delta y^2 = 1$ وليعطي البرهان الأول الكامل بأنَّها دوماً قابلة للحل في مجموعة الأعداد الصحيحة.

عمَّم الرياضيون معادلة بِل إلى المعادلة $x^2 - \Delta y^2 = N$ وسُمّيت معادلة بِل المُعمَّمة، حيث N عدد صحيح.

حديثاً في أواخر القرن الماضي درس بعض الرياضيين معادلة بِل المُعمَّمة من أجل قيم محددة لِ N وقيم محددة لِ Δ، على سبيل المثال في [1] درس $K.S.Williams$ وَ $K.Hardy$ المعادلة $dv^2 - 2evw - dw^2 = 1$ وفي [4] درس $P.Zarzycki$ المعادلة $x^2 - kxy + y^2 + x = 0$ وفي [8] درس $Refik$ وَ $Kekin$ $Zafersir$ قابلية حل المعادلة $x^2 - kxy + y^2 + 2^n = 0$ وأيضاً في [12] درس $Sankari$ قابلية حل المعادلتين $ax^2 + 2bxy - 3ay^2 = \pm 1$ وَ $x^2 - \Delta y^2 = -3$.

في هذه المقالة ندرس قابلية حل المعادلتين:

$$ax^2 + 2bxy + 3ay^2 = \pm 1 \qquad (I)$$

$$x^2 - \Delta y^2 = 3 \qquad (II)$$

معاً في آنٍ واحد، في مجموعة الأعداد الصحيحة.

أهمّية البحث و أهدافه

إنَّ هدف هذا البحث هو دراسة قابلية حل المعادلتين:

$$ax^2 + 2bxy + 3ay^2 = \pm 1 \qquad (I)$$

$$x^2 - \Delta y^2 = 3 \qquad (II)$$

حيث Δ عدد صحيح حرّ من التربيع (أيّ أنَّ قواسمه الأولية مختلفة مثنى مثنى)، وتكمن أهمية هذا البحث في أنّه يُقدم شرطاً لازماً وكافياً لقابلية حل المعادلتين معاً في آنٍ واحد. بالإضافة لذلك يُبيّن أنه إذا كانت إحدى المعادلتين غير قابلة للحل فإنَّ المعادلة الأخرى تكون غير قابلة للحل أيضاً.

مواد البحث وطرائقه:

إنَّ البحث موضوع رياضي مجرد تم إنجازه بالاعتماد على مراجع علمية تخصصية وبحوث علمية منشورة في دورات عالمية، ونعرض في الآتي تعاريف ومبرهنات ونتائج متعلقة بدراسة بعض أنواع المعادلات الديوفنتية التربيعية:

تعريف 1:[3,10,11]

ليكن D عدداً صحيحاً حراً من التربيع، يُعرّف الحقل التربيعي $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (حيث $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسرية) بأنّه المجموعة:

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{\, n + m\sqrt{D}\,; n, m \in \mathbb{Q}\}$$

وتُعرّف حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة $\mathcal{O}_k$ في هذا الحقل بأنّها المجموعة:

$$\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{\, a + b\sqrt{D}\,; a, b \in \mathbb{Z}\,\}$$

إذا كان $D \not\equiv 1\ (mod\ 4)$ ، وبأنَّها المجموعة:

$$\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right] = \left\{ a + b\frac{1+\sqrt{D}}{2}\ \ ; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

وذلك عندما يكون $D \equiv 1\ (mod\ 4)$.

والجدير بالذكر أنَّ $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ حلقة جزئية من الحلقة $\mathcal{O}_k$ عندما $D \equiv 1\ (mod\ 4)$ أيّ أنَّ:

$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right] \supseteq \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.

تعريف 2:[3 , 11]

إذا كان $\propto = n + m\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ فإنَّ :

مرافق $\propto$ يُرمز له بالرمز $\propto'$ ويُعرّف بالشكل:

$$\propto' = n - m\sqrt{D}$$

أما نظيم $\propto$ فيُرمز له بالرمز $N(\propto)$ ويُعرّف وفق الصيغة الآتية:

$$N(\propto) = \propto.\propto' = n^2 - Dm^2$$

نتيجة 1: [3 , 11]

إذا كان $\propto_1, \propto_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ وَ $a \in \mathbb{Q}$ فإنّه يمكن البرهان بسهولة أنَّ:

i. $N(\propto_1.\propto_2) = N(\propto_1).N(\propto_2)$

ii. $N\left(\frac{\propto_1}{\propto_2}\right) = \frac{N(\propto_1)}{N(\propto_2)}$

iii. $N(\propto_1) = N(\propto_1')$

iv. $N(a) = a^2$

ملاحظة 1:

عندما نقول إنَّ المعادلة $x^2 - Dy^2 = N$ قابلة للحل، فهذا يعني أنّه يوجد $\propto = x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ بحيث $N(\propto) = N(x + y\sqrt{D}) = N$ ، بتالي يمكن القول إنَّ $x + y\sqrt{D}$ بدلاً من القول إنَّ (x, y) حلاً لها.

تعريف 3: [9]

يُسمّى العدد $\propto \in \mathcal{O}_k$ عنصر الوحدة في $\mathcal{O}_k$ إذا كان $N(\propto) = \pm 1$.

ملاحظة 2:

إذا كان $D \not\equiv 1\ (mod\ 4)$ وكان $\propto = x + y\sqrt{D}$ عنصر الوحدة في $\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ فإنَّ $x^2 - Dy^2 = \pm 1$، أيّ إنّه لإيجاد عنصر الوحدة في $\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ فإننا نقوم بحل المعادلة $x^2 - Dy^2 = \pm 1$.

إذا كان $D \equiv 1\ (mod\ 4)$ وكان $\propto = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{D}$ عنصر الوحدة في $\mathcal{O}_k =$

$\mathcal{O}_k =$ حيث $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{D}\right] = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right]$

$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{D}\right] = \left\{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{D}\,; x, y \in \mathbb{Z}\,, x \equiv y\ (mod\ 2)\right\}$ فإنَّ: $(\frac{x}{2})^2 -$

$D(\frac{y}{2})^2 = \pm 1$، وبالتالي $x^2 - Dy^2 = \pm 4$، أيّ إنَّه لإيجاد عناصر الواحدة في $\mathcal{O}_k$ فإننا نقوم بحل المعادلة $x^2 - Dy^2 = \pm 4$.

وبشكل خاص: عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ هيَّ $\{\pm 1\}$.

تعريف 4:[3, 11]

يُسمّى العنصر $\propto$ من $\mathcal{O}_k$ غير خزول إذا كانت قواسمه عناصر الواحدة أو من الشكل $\varepsilon \propto$ حيث ε عنصر الوحدة.

ويُسمّى العنصر $\propto$ من $\mathcal{O}_k$ (حيث $\propto \neq 0$ وَ $\propto$ ليس عنصر الوحدة) عدداً أوّلياً إذا كان $\propto / \beta\gamma$ فإنَّ $\propto / \beta$ أو $\propto / \gamma$.

والجدير بالذكر أنَّ العنصر $\propto$ من $\mathcal{O}_k$ يكون عدداً أولياً في $\mathcal{O}_k$ إذا كان $N(\propto) = p$ حيث p عدد أوّلي في حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.

تعريف 5:[3]

الحلقة $\mathcal{O}_k$ تُسمّى ساحة تحليل وحيد إذا كان كل عنصر $\propto$ من $\mathcal{O}_k$ يُكتب بشكل جداء وحيد كجداء منتهٍ لعناصر غير خزولة.

تمهيدية 1:[11]

المعادلة $x^2 - 3y^2 = N$ قابلة للحل إذا وفقط إذا كان:

$$N = \varepsilon 2^{\propto} 3^{\beta} {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_r}^{\alpha_r} . {q_1}^{\beta_1} {q_2}^{\beta_2} \ldots {q_s}^{\beta_s}$$

حيث ε إشارة مناسبة، p_i أعداد أولية تطابق ± 1 بالمقاس 12، q_i أعداد أولية تطابق ± 5 بالمقاس 12، $\propto_i, \beta_i$ أعداد صحيحة موجبة.

تمهيدية 2:[7]

إذا كانت $\mathcal{O}_k$ ساحة تحليل وحيد، وكان $\propto, \beta \in \mathcal{O}_k$ حيث $\propto \beta = \gamma^2$ وَ $(\propto, \beta) = 1$ فإنَّه يوجد $\mu, \delta \in \mathcal{O}_k$ بحيث $\alpha = \varepsilon \mu^2 , \beta = \varepsilon' \delta^2 , \gamma = \mu\delta$ حيث $\varepsilon, \varepsilon'$ عناصر واحدة.

تمهيدية 3:[10]

التطابق $x^2 \equiv 3 \ (mod\ D)$ قابل للحل إذا وفقط إذا كانت الأعداد الأولية التي تقسم D من الشكل $D \equiv \pm 1 \ (mod\ 12)$.

النتائج والمناقشة

إنَّ النتائج والأفكار التي ذكرناها، فضلاً عن بعض الأفكار الرياضية الجديدة التي أضفناها إلى هذه النتائج (مناقشة قابلية حل المعادلتين (II) أو(I) بالاعتماد على قابلية حل المعادلة الأخرى)، ذلك سمح لنا بدراسة قابلية حل المعادلتين (I) وَ (II) معاً في آنٍ واحد. تمَّ الحصول على نتائج نأمل أن تكون جديدة ومهمّة في هذا المجال، نعرضها فيما يأتي:

لتكن المعادلة (I) $ax^2 + 2bxy + 3ay^2 = \pm 1$ حيث a, b عددين صحيحين ، عندئذٍ نلاحظ وضوحاً أنَّ المعادلة (I) لا تكون قابلة للحل إذا كان a عدداً زوجياً أو إذا كان لـ $a , 2b$ أو لـ a , b قاسماً مشتركاً، لذلك سوف نفرض أنَّ a عدداً فردياً وأنَّ a , b أوليان فيما بينهما، بالإضافة لذلك نفرض أنَّ المعادلة (I) قابلة للحل إذا كانت إحدى المعادلتين:

$ax^2+2bxy+3ay^2=1$ أو $ax^2+2bxy+3ay^2=-1$

قابلة للحل، كذلك نفرض أنَّ العدد الصحيح الموجب $\Delta=b^2-3a^2$ حرّ من التربيع وسنسميه مميز المعادلة (I) .

لنناقش قابلية حلّ المعادلتين

$$ax^2+2bxy+3ay^2=\pm 1 \qquad (I)$$
$$x^2-\Delta y^2=3 \qquad (II)$$

على النحو الآتي:

مبرهنة 1:

لتكن المعادلتين:

$$ax^2+2bxy+3ay^2=\pm 1 \qquad (I)$$
$$x^2-\Delta y^2=3 \qquad (II)$$

حيث أنَّ $a\,,b$ عددين صحيحين أوليين فيما بينهما و $\Delta=b^2-3a^2$ عدد صحيح حرّ من التربيع، عندئذٍ:

إذا كانت المعادلة (II) غير قابلة للحل فإنَّ المعادلة (I) تكون غير قابلة للحل أيضاً.

البرهان:

بفرض أنَّ المعادلة (II) غير قابلة للحل، ولنفرض جدلاً أنَّ المعادلة (I) قابلة للحل، عندئذٍ: يوجد $(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بحيث أنَّ $ak^2+2bkl+3al^2=\pm 1$

علاوة على ذلك، يكون كل من العددين $\propto=b+a\sqrt{3}$ وَ $\beta=(k+l\sqrt{3})^2$ عنصراً في $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ومنه نجد أنَّ:

$$\propto\beta=\left(b+a\sqrt{3}\right)\left(k+l\sqrt{3}\right)^2$$
$$=(bk^2+6akl+3bl^2)+(ak^2+2bkl+3al^2)\sqrt{3} \qquad (1)$$

والآن ليكن $\varepsilon\in\{\pm 1\}$ بحيث أنَّ:

$$\varepsilon(ak^2+2bkl+3al^2)=1$$

وليكن

$$v=\varepsilon(bk^2+6akl+3bl^2)$$

عندئذٍ:

$$v+\sqrt{3}=\varepsilon(bk^2+6akl+3bl^2)+\varepsilon(ak^2+2bkl+3al^2)\sqrt{3}$$

ومنه حسب (1) ينتج أنَّ: $v+\sqrt{3}=\varepsilon\alpha\beta$

لنأخذ النظيم للطرفين، فنجد أنَّ:

$$N\left(v+\sqrt{3}\,\right)=N(\varepsilon\alpha\beta)=N(\varepsilon)N(\alpha)N(\beta)=N(\alpha)N(\beta)$$
$$=(b^2-3a^2)(k^2-3l^2)^2$$

لأنَّ:

$$N(\varepsilon)=\varepsilon^2=1$$
$$N(\beta)=N\left(\left(k+l\sqrt{3}\right)^2\right)=(N(\left(k+l\sqrt{3}\right))^2=(k^2-3l^2)^2$$

لنضع $w=k^2-3l^2$ ، فنجد مما سبق $v^2-3=\Delta w^2$

بالتالي $v^2-\Delta w^2=3$. إذاً (v,w) حل للمعادلة (II) ، وهذا تناقض، فالفرض الجدلي خاطئ.

إذاً ما ورد في نص المبرهنة صحيح.

تمهيدية 4:

إذا كان Δ عدداً صحيحاً حرّ من التربيع، وكانت المعادلة (II) قابلة للحل و (v,w) حلّاً لها، عندئذٍ يكون:

أ- w فردي.

ب-إذا كان Δ زوجيّاً فإنَّ $\Delta = 2\Delta_1$ حيث Δ_1 فردي

وَ يكون $v \equiv w \ (mod\ 2)$.

ج- العددان $v+\sqrt{3}\,,v-\sqrt{3}$ اوليان فيما بينهما في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ أيّ أنَّ:

$\gcd\left(v+\sqrt{3}\,,v-\sqrt{3}\right)=1$.

البرهان:

أ- بفرض أنَّ w زوجي عندئذٍ يكون $w^2 \equiv 0\ (mod\ 4)$

وبالتالي $v^2-\Delta w^2 \equiv 3\ (mod\ 4)$، لذا نجد أنَّ $v^2 \equiv 3\ (mod\ 4)$

وهذا غير ممكن، إذاً wفردي.

ب- بفرض أنَّ Δ زوجي بالتالي $\Delta = 2^i\Delta_1$ حيث $i \geq 1$ و Δ_1 فردي، وكون Δ حرّ من التربيع فإنَّ Δ لا يقبل القسمة على العدد 4 أيّ أنَّ $i=1$ ، إذاً $\Delta = 2\Delta_1$ حيث Δ_1 فردي.

وبالتالي :

$$v^2-\Delta w^2 \equiv v^2-2\Delta_1 w^2\ (mod\ 4)$$

ومن جهة أخرى:

$$v^2-\Delta w^2 \equiv 3\ (mod\ 4)$$

ومن خواص التطابقات، ينتج أنَّ:

$$v^2-2\Delta_1 w^2 \equiv 3\ (mod\ 4)$$

وحسب (أ) فإنَّ $w^2 \equiv 1\ (mod\ 4)$، بالتالي $v^2 \equiv 3+2\Delta_1\ (mod\ 4)$

وكون Δ_1 فردي، فإنَّ: $v^2 \equiv 1\ (mod\ 4)$

بتالي $v \equiv w\ (mod\ 2)$.

ج- بفرض أنَّ $\left(v+\sqrt{3}\,,v-\sqrt{3}\right)=d$ ، عندئذٍ يكون $d/2v$، وبتالي $N(d)/N(2v)=v^2$، لذلك فإنَّ $N(d)$ زوجي،

ويكون لدينا حالتين:

1- Δ فردي، وفي هذه الحالة يكون Δw^2 عدداً فردياً، وذلك حسب (أ)، كما يكون أيضاً $N(d)/N\left(v+\sqrt{3}\right)=\Delta w^2$ ، إذاً:

(2) $N(d)/N\left(v+\sqrt{3}\right)=\Delta w^2$ وهذا مستحيل.

2- Δ زوجي، وفي هذه الحالة، فإنّه حسب (ب) يكون $\Delta = 2\Delta_1$ حيث Δ_1 فردي، ومنه حسب (2) يكون $N(d)/\Delta$، بتالي $N(d)=1\ or\ 2$

إنَّ $N(d)\neq 2$ لأنّه إذا كان $N(d)=2$ فإنّه يوجد $m\,,n\in\mathbb{Z}$ بحيث $d=m+n\sqrt{3}$ وإنَّ $2=N(d)=m^2-3n^2$ وهذا غير ممكن،

لأنّه بالاعتماد على خواص التطابقات، نحل المعادلة الديوفنتية $m^2-3n^2=2$ على النحو الآتي:

إذا كان $m^2 - 3n^2 = 2$، فإنَّ $m^2 \equiv 2 \ (mod\ 3)$، وهذا غير ممكن، إذاً $N(d) \neq 2$
إذاً $N(d) = 1$ وبتالي $d \in \{-1\ , +1\}$ وبما أنَّ d موجب، إذاً $d = 1$ ، ومنه ينتج أنَّ العددان $v + \sqrt{3}\ , v - \sqrt{3}$ اوليان فيما بينهما.

مبرهنة 2:

إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين اوليين فيما بينهما، بحيث أنَّ
$\Delta = b^2 - 3a^2$ حرّ من التربيع، وإنَّ المعادلة (II) قابلة للحل و (v, w) حلاً لها، عندئذٍ:
الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة (I) قابلة للحل، هو أنّ يكون:

$$b + a\sqrt{3} = \begin{cases} \gcd\left(v + \sqrt{3}, \Delta\right) \\ or \\ \gcd\left(v - \sqrt{3}, \Delta\right) \end{cases} \qquad (3)$$

البرهان:

نفرض أنَّ (v, w) حل للمعادلة (II) وأنَّ الشرط (3) محقق، عندئذٍ:
$b + a\sqrt{3}$ يقسم $v - \sqrt{3}$ أو $v + \sqrt{3}$ في $\mathbb{Z}\,[\sqrt{3}]$.
إذا كان $b + a\sqrt{3}$ يقسم $v + \sqrt{3}$ في الحلقة $\mathbb{Z}\,[\sqrt{3}]$ نجد مما سبق أنَّ:

$$\left(\frac{v + \sqrt{3}}{b + a\sqrt{3}}\right)\left(\frac{v - \sqrt{3}}{b - a\sqrt{3}}\right) = w^2$$

وأنَّ كل من العددين $\propto = \frac{v+\sqrt{3}}{b+a\sqrt{3}}$ و $\beta = \frac{v-\sqrt{3}}{b-a\sqrt{3}}$ ينتمي للحلقة $\mathbb{Z}\,[\sqrt{3}]$.
علاوة على ذلك: فإنّه يكون حسب (ج) من التمهيدية 4 أنَّ
$\gcd\left(v + \sqrt{3}\ , v - \sqrt{3}\right) = 1$ بالتالي $\propto, \beta$ اوليان فيما بينهما. ومنه وبحسب التمهيدية 2 فإنّه يوجد $\mu, \delta \in \mathbb{Z}\,[\sqrt{3}]$ حيث

$$\mu = x - y\sqrt{3}\ , \delta = x + y\sqrt{3}$$

وبحيث أنَّ:

$$w = \mu\delta = x^2 - 3y^2\ , \propto = \frac{v + \sqrt{3}}{b + a\sqrt{3}} = \varepsilon\delta^2 = \varepsilon(x + y\sqrt{3})^2$$

فإنّه ينتج من ذلك أنَّ:

$$\begin{aligned} v + \sqrt{3} &= \varepsilon(b + a\sqrt{3})(x + y\sqrt{3})^2 \\ &= \varepsilon(bx^2 + 6axy + 3by^2) + \varepsilon(ax^2 + 2bxy + 3ay^2)\sqrt{3} \end{aligned}$$

وبمطابقة أمثال $\sqrt{3}$ نجد أنه $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ بحيث أنَّ:

$$ax^2 + 2bxy + 3ay^2 = \pm 1$$

أيّ أنَّ المعادلة (I) قابلة للحل.

العكس:

نفرض أنَّ المعادلة (I) قابلة للحل، عندئذٍ يوجد $(k\ , l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ بحيث أنَّ:

$$ak^2 + 2bkl + 3al^2 = \pm 1$$

ومنه وبطريقة مماثلة لإثبات المبرهنة 1 نجد أنّه يوجد $(v, w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ بحيث:

$$v = \varepsilon(bk^2 + 6akl + 3bl^2)\ , w = k^2 - 3l^2$$

بحيث $(v, w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حل للمعادلة (II) ، كما أنَّ:

$$v+\sqrt{3}=(b+\sqrt{3})(k+l\sqrt{3})^2$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\gcd(v+\sqrt{3},\Delta)=(b+a\sqrt{3}).\gcd\left((k+l\sqrt{3})^2,(b-a\sqrt{3})\right)$$

علاوة على ذلك نجد أنَّ:

$$\gcd\left((k+l\sqrt{3})^2,(b-a\sqrt{3})\right)=1$$

وذلك لأنّه إذا كان $\propto\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ حيث $\propto\neq 0$ وكان:

$$\propto/(k+l\sqrt{3})^2\,,\propto/(b-a\sqrt{3})$$

فإنَّ: $\propto/(k+l\sqrt{3})$

وعليه فإنَّ $k+l\sqrt{3}\equiv 0\ (mod\ \propto)$ ، وبتالي $k\equiv -l\sqrt{3}\ (mod\ \propto)$ ، ومنه ومن عبارة v السابقة نجد أنَّ:

$$\begin{aligned} v&=\varepsilon(b(-l\sqrt{3})^2+6a(-l\sqrt{3})l+3bl^2\\ &=\varepsilon(3bl^2-6al^2\sqrt{3}+3bl^2\\ &=\varepsilon(6l^2)(b-a\sqrt{3})\\ &\equiv 0\ (mod\ \propto)\end{aligned}$$

بتالي فإنَّ $\propto/v$ وبتالي $N(\propto)/N(v)=v^2$

ولدينا: $w=k^2+3l^2=(k+l\sqrt{3})(k-l\sqrt{3})$

ينتج من ذلك: $\propto/w$

فإنَّ: $N(\propto)/N(w)=w^2$

فإنَّ: $N(\propto)/\gcd(v^2,w^2)$

لدينا $\gcd(v,w)=1$ لأنه إذا فرضنا جدلاً أنَّ $\gcd(v,w)=d$ حيث $d>1$

فإنَّ: $d/v\ ,d/w$ ، فإنَّ: $d/v^2\ ,d/w^2$

وعليه فإنَّ: $v^2-\Delta w^2=3$، بتالي $d^2{v_1}^2-\Delta d^2{w_1}^2=3$

وبتالي $d^2({v_1}^2-\Delta{w_1}^2)=3$، فإنَّ $d^2/3$، وبما أنَّ $d>1$

فإنَّ $d=\sqrt{3}\notin\mathbb{Z}$.

ينتج من ذلك $N(\propto)=1$ ، فإنَّ $\propto=1$.

إذاً:

$$\gcd\left((k+l\sqrt{3})^2,(b-a\sqrt{3})\right)=1$$

فإنَّ:

$$b+a\sqrt{3}=\gcd(v+\sqrt{3},\Delta)$$

مثال 1:

إذا كان $a=1\,,b=6$ فإنَّ $\Delta=b^2-3a^2=33$ عدد فردي حرّ من التربيع، وأنَّ $(v,w)=(6,1)$ حل للمعادلة (II) ، وبتالي:

$$v+\sqrt{3}=6+\sqrt{3}\,,b+a\sqrt{3}=6+\sqrt{3}$$

ومنه نجد أنَّ $6+\sqrt{3}=\gcd(b+\sqrt{3}\,,\Delta)$، وبتالي حسب المبرهنة 2 نجد أنَّ المعادلة (I) قابلة للحل، وعليه فإنَّ المعادلة $x^2+12xy+3y^2=\pm 1$ قابلة للحل.

لإيجاد الحل لهذه المعادلة، لدينا:

$$x^2+12xy+3y^2=\pm 1 \Leftrightarrow (x+6y)^2-36y^2+3y^2=\pm 1$$
$$\Leftrightarrow (x+6y)^2-33y^2=\pm 1$$

لنضع $y=y_1$ وَ $x+6y=x_1$ ، فنجد أنَّ المعادلة (I) قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت المعادلة $(4)\quad {x_1}^2-\Delta {y_1}^2=\pm 1$ قابلة للحل

وبما أنَّ المعادلة (4) قابلة للحل دوماً، و $(x_1,y_1)=(23,4)$ حلاً لها

وعليه فإنَّ $(x,y)=(-1,4)$ حل للمعادلة $x^2+12xy+3y^2=\pm 1$.

مثال 2:

إذا كان $a=1\,,b=3$ فإنَّ $\Delta=b^2-3a^2=6$ عدد فردي حرّ من التربيع، وأنَّ $(v,w)=(3,1)$ حل للمعادلة (II) ، وبتالي:

$$v+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}\,,b+a\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$$

ومنه نجد أنَّ $3+\sqrt{3}=\gcd(b+\sqrt{3}\,,\Delta)$، وبتالي حسب المبرهنة 2 نجد أنَّ المعادلة (I) قابلة للحل، وعليه فإنَّ المعادلة $x^2+6xy+3y^2=\pm 1$ قابلة للحل.

لإيجاد الحل لهذه المعادلة، لدينا:

$$x^2+6xy+3y^2=\pm 1 \Leftrightarrow (x+3y)^2-9y^2+3y^2=\pm 1$$
$$\Leftrightarrow (x+3y)^2-6y^2=\pm 1$$

لنضع $y=y_1$ وَ $x+3y=x_1$ ، فنجد أنَّ المعادلة (I) قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت المعادلة $(5)\quad {x_1}^2-\Delta {y_1}^2=\pm 1$ قابلة للحل

وبما أنَّ المعادلة (5) قابلة للحل دوماً، و $(x_1,y_1)=(5,2)$ حلاً لها

وعليه فإنَّ $(x,y)=(-1,2)$ حل للمعادلة $x^2+6xy+3y^2=\pm 1$.

مبرهنة 3:

إذا كان a,b عددين صحيحين موجبين أوليين فيما بينهما، بحيث إنَّ $\Delta=b^2-3a^2$ عدد حرّ من التربيع، وإنَّ المعادلة (I) قابلة للحل، عندئذٍ:

الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة (II) قابلة للحل و (k,l) حلاً لها هو أنّ يوجد عددان صحيحان m,n يحققان:

$$(6)\qquad \begin{cases} l^2=m^2-3n^2 \\ k=bm-3an \\ am-bn=\pm 1 \end{cases}$$

البرهان:

نفرض أنّه يوجد عددان صحيحان يحققان العلاقات (6) عندئذٍ:

$$\begin{aligned} \Delta l^2 &= (b^2-3a^2)(m^2-3n^2) \\ &= (bm-3an)^2-3(bn-am)^2 \\ &= k^2-3 \end{aligned}$$

ينتج من ذلك $k^2-\Delta l^2=3$ إذاً (k,l) حل للمعادلة (II).

العكس:

نفرض أنَّ المعادلة $(II)\quad x^2-\Delta y^2=3$ قابلة للحل وأنَّ (k,l) حلاً لها.

نبرهن وجود العددين الصحيحين m,n حيث $l^2=m^2-3n^2$.

لدينا (k,l) حل للمعادلة (II) بتالي $k^2-\Delta l^2=3$، بتالي $(k,1)$ حلاً للمعادلة $x^2-\Delta' y^2=3$ حيث $\Delta'=\Delta l^2$.

إنَّ l فردي حسب التمهيدية 4، بتالي جميع الأعداد الأولية التي تقسم l تطابق $1\ or\ 11$ بالمقاس 12 ،بتالي حسب التمهيدية 1 تكون إحدى المعادلتين $x^2-3y^2=\pm l$ قابلة للحل، ولنناقش ذلك:

- إذا كانت $x^2-3y^2=l$ قابلة للحل، عندئذٍ يوجد عددان صحيحان c,d حيث:

$$l=c^2-3d^2$$

بتالي:

$$l^2=(c^2-3d^2)^2=(c^2+3d^2)^2-3(2cd)^2$$

نضع $m=c^2+3d^2\ ,n=2cd$ ، فيكون $l^2=m^2-3n^2$.

- إذا كانت $x^2-3y^2=-l$ قابلة للحل، عندئذٍ يوجد عددان صحيحان r,s حيث:

$$-l=r^2-3s^2$$

ولكن:

$$-2=1^2-3.1^2$$

بتالي:

$$2l=(r+3s)^2-3(r+s)^2$$

نضع $m'=r+3s\ ,n'=r+s$ ، فنجد أنَّ:

$$l=\frac{m'^2-3n'^2}{2}$$

بتالي:

$$l^2=\left(\frac{m'^2-3n'^2}{2}\right)^2=\left(\frac{m'^2+3n'^2}{2}\right)^2-3(m'n')^2$$

نضع $m=\frac{m'^2+3n'^2}{2}\ ,n=m'n'$

نجد أنَّ: $l^2=m^2-3n^2$.

نبرهن أنّه إذا كان $x^2-\Delta y^2=3$ حيث $\Delta=b^2-3a^2$ و $l^2=m^2-3n^2$

فإنَّ: $k=bm-3an$ و $am-bn=\pm1$.

$$k^2-3=\Delta l^2=(bm-3an)^2-3(am-bn)^2$$

إذا كان $am-bn\neq1$ من أجل جميع الأعداد الصحيحة a,b,m,n التي تحقق $\Delta=b^2-3a^2$ و $l^2=m^2-3n^2$ ، فإنَّ المعادلة $x^2-\Delta y^2=3$ لن تكون قابلة للحل وهذا تناقض، وينتج من ذلك أنَّ $k=bm-3an$ و $am-bn=\pm1$.

مثال 3:

من أجل $a=1\ ,b=6$ حسب المثال 1 فإنَّ المعادلة (I) قابلة للحل، فضلاً عن ذلك من أجل $n=0\ ,m=1$ فإنَّ $k=6\ ,l^2=1$ أيّ أنَّ (k,l) حل للمعادلة (II) .

مبرهنة 4:

إذا كان a,b عددين صحيحين موجبين أوليين فيما بينهما و $\Delta= b^2-3a^2$ عدداً أولياً، عندئذٍ:

المعادلة (I) قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت المعادلة (II) قابلة للحل.

البرهان:

نفرض أنَّ المعادلة (II) قابلة للحل، عندئذٍ يوجد $(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بحيث:

$$ak^2+2bkl+3al^2=\pm 1$$

نُعرّف العددين $w=k^2-3l^2\ ,v=\pm(bk^2+6akl+3bl^2)$

نجد من المتطابقة:

$$(bk^2+6akl+3bl^2)-3(ak^2+2bkl+3al^2)=\ (b^2-3a^2)(k^2-3l^2)^2$$

ومنه نجد أنَّ (v,w) حل للمعادلة (II) ، أيّ أنَّ المعادلة (II) قابلة للحل.

العكس:

نفرض أنَّ المعادلة (II) قابلة للحل وأنَّ Δ عدد أولي، عندئذٍ يوجد $(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بحيث:

$v^2-\Delta w^2=3$، وبتالي $v^2-3=\Delta w^2\quad(7)$

نكتب Δ في الحلقة $\mathbb{Z}\,[\sqrt{3}]$ بالشكل:

$$\Delta= (b+a\sqrt{3})(b-a\sqrt{3})$$

ونكتب (7) في الحلقة $\mathbb{Z}\,[\sqrt{3}]$ بالشكل:

$$\left(v+\sqrt{3}\right)\left(v-\sqrt{3}\right)=\left(b+a\sqrt{3}\right)\left(b-a\sqrt{3}\right)w^2\quad(8)$$

فنجد أنَّ كلاً من العددين $b+a\sqrt{3}\,,b-a\sqrt{3}$ أوليين في الحلقة $\mathbb{Z}\,[\sqrt{3}]$،

لأنَّ:

$$N\left(b+a\sqrt{3}\right)=N\left(b-a\sqrt{3}\right)=\Delta$$

و Δ عدد أولي، وباعتبار أنَّ $b+a\sqrt{3}<\Delta$ ، فإنّه بحسب (8) :

$$b+a\sqrt{3}/v+\sqrt{3}\ or\ \ b+a\sqrt{3}/v-\sqrt{3}$$

وبتالي يمكن أن نفرض أنَّ $b+a\sqrt{3}/v+\sqrt{3}$، وعليه فإنَّ $b-a\sqrt{3}/v-\sqrt{3}$

كما أنَّ كلاً من العددين $\frac{v-\sqrt{3}}{b-a\sqrt{3}}\,,\frac{v+\sqrt{3}}{b+a\sqrt{3}}$ ينتمي إلى $\mathbb{Z}\,[\sqrt{3}]$، وهما أوليان فيما لبنهما

ومنه وبحسب التمهيدية 2 فإنّه يوجد $k,l\in\mathbb{Z}$ ، بحيث:

$$\frac{v+\sqrt{3}}{b+a\sqrt{3}}=\varepsilon\left(k+l\sqrt{3}\right)^2,w=k^2-3l^2$$

بتالي:

$$v+\sqrt{3}=\varepsilon\left(k+l\sqrt{3}\right)^2\left(b+a\sqrt{3}\right)$$

وبمطابقة أمثال $\sqrt{3}$ نجد أنّه يوجد $(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بحيث أنَّ:

$$ak^2+2bkl+3al^2=\pm 1$$

ومنه نجد أنَّ (k,l) حل للمعادلة (I) ، وبتالي المعادلة (I) قابلة للحل.

مثال 4:

من أجل $a=1\,,b=4$ ، فإنَّ $\Delta= b^2-3a^2=13$ عدد أوليّ، كما أنَّ المعادلة (II) قابلة للحل و $(4,1)$ حل لها، وبتالي المعادلة (I) قابلة للحل وذلك حسب المبرهنة 4، و $(-2,5)$ حل لها.

النتائج والتوصيات:

إنَّ دراسة قابلية حل المعادلتين (I) وَ (II) تفيد في دراسة حالات اخرى من المعادلات الديوفنتية، كما أنها تفيد في دراسة مسألة تمثيل الأعداد الصحيحة بصيغ تربيعية ثنائية، وفي مسألة القيم الأصغرية لصيغة تربيعية.

المراجع:

[1] Hardy, K and William, K. S., 1986. *On the solvability of the Diophantine equation* $dv^2-2evw-dw^2=1$, Pacific journal of mathematics, V.124,No.1,pp.145-158.

[2] Kaplan, P., 1986. *Pells equations* $x^2-Ny^2=-1,-4$ *and continued fraction*. Journal of number theory, V.23,pp.169-182.

[3] Koch, F. H., 2014. *Quadratic Irrationals and introduction to classical number theory*, CRC press.

[4] Marlewski, A., Zarzucki, P., 2014. *Infinitly many positive solutions of the Diophantine equatios* $x^2-kxy+y^2+x=0$, *comput*. Math, Appl, V.47, No.1,pp.115-121.

[5] Mollin, R. A., 2001. *A Simple criterion for solvability of both equatios* $x^2-Dy^2=\pm c$, *New York*, J. Math, V.7, pp.87-97.

[6] Mollin, R. A., 2002. *Ideal criterion for both* $x^2-Dy^2=m_1$ *and* $x^2-Dy^2=m_2$ *to have primitive solutions for any integer* m_1,m_2 *prime to* $D>0$, *Serdica Math*.J, V.28, pp.175-188.

[7] Mordell,L.J.,1969. *Diophantine equations*, *Academic press*, London and New York.

[8] Refik,K., Olcay,K., Zafer,S.,2012. *On the Diophantine equation* $x^2-kxy+y^2+2^n=0$, *Miskolc mathematical notes, V.13, No*.2, pp.357-388.

[9] Robertson,J. P., 2014. *Fundamental Solutions to generalized Pell equation* $x^2-Dy^2=N$, *pp.1-26.*

[10] Rose,H.E.,1988. *A Course in number theory, Clearndom Press.*

[11] Bolken,E.D., 1970. Elementary number theory, An Algebraic Approach, w.A.Benjamin. New York.

المراجع العربية

[12] حسن سنكري، 2018. *دراسة قابلية حل المعادلتين* $ax^2+2bxy+3ay^2=\pm1$ وَ $x^2-\Delta y^2=-3$، مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية. المجلد (38). العدد الأول. 2018.