

تقنية عددية لحل مسائل القيم الحدية متعددة الحالات من المرتبتين الثانية والثالثة

سليمان محمد محمود*

نضال حسن**

زينب كيسيبي***

(تاريخ الإيداع ٢٥ / ٥ / ٢٠٢٠ . قُبل للنشر ٤ / ٨ / ٢٠٢١)

الملخص

تم في هذا البحث تطوير تقنية عددية تعتمد على كثيرات حدود شرائحية من الدرجة الثامنة لحل مسائل القيم الحدية المتعددة الحالات من المرتبتين الثانية والثالثة. تم تحويل كل مسألة قيمة حدية متعددة الحالات إلى مسألتين من مسائل القيم ابتدائية متعددة الحالات وتطبيق التقريبات الشرائحية مع خمس نقاط تجميع لهما. تم في الدراسة إثبات التناسق والاستقرار وتحديد دالة الحد الأعلى للخطأ ومرتبة التقارب للتقنية عند تطبيقها على مسألة اختبار من نمط المسألة. كما تم رسم مناطق الاستقرار التي تحددها التقنية. اخترنا التقنية المقترحة لحل مسألتين من المرتبتين الثانية والثالثة حيث تبين المقارنات لنتائجنا مع نتائج الطرق الأخرى إلى أفضلية وأهمية التقنية المقترحة.

الكلمات المفتاحية: كثيرات حدود شرائحية، نقاط مجمعة، مسائل القيم الحدية متعددة الحالات، الاستقرار المطلق، التناسق، التقارب.

* أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية. E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com

** أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة طرطوس - سورية.

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة طرطوس - سورية.

Numerical Technique for Solving Second and Third Order Boundary Value Obstacle Problems

Suliman M. Mahmood*

Nidal E. Hassan **

Zainab Keeseeny***

(Received 25 / 5 / 2020 . Accepted 4 / 8 / 2021)

ABSTRACT

In this paper, a numerical technique based on eighth-order spline polynomials is developed to solve second and third-order boundary value obstacle problems(BVOPs). Each a boundary value obstacle problem is transformed into two initial value obstacle problems, after that the spline approximations with five collocations points are used to solve them. In the study, consistency and stability were established, and the truncation error function and the order of convergence are determined for the technique when applied to a test problem of type BVOP. The stability regions of proposed technique are also plotted. We tested the proposed technique by solving two problems of the second and third order. The comparisons of our results with the results of other methods indicate the preference and importance of the proposed technique.

Keywords: Spline Polynomials, Collocation Points, Boundary Value Obstacle Problems, Absolute Stability, Consistency, Convergence

* Prof., Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

** Associate Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tartous Universty, Tartous, Syria.

***Postgraduate student, Depart. of Mathematics, Tartous Universty, Tartous, Syria.

مقدمة:

اهتم الباحثون بدراسة المعادلات التفاضلية بأنواعها وأصنافها المختلفة نظراً لمساهمتها الكبيرة في تفسير الكثير من الظواهر الطبيعية والواقعية في عصرنا الحاضر. فهي نماذج رياضية تحاكي حركة الآلات في الصناعة وتحتاج للتحكم بها، والحركات الاهتزازية للجسور تحتاج لمعرفة قدرة تحملها، ومسائل التدفق للسوائل والغازات والهواء، وحركة الخط والتفاعلات الكيميائية، وحركة النمو السكاني، وفي العلوم الطبية حركة مقاومة رد فعل الكريات للأجسام المصابة بالمرض لأي فيروس وبائي، في السيطرة الملاحية للسفن والتحكم بحركة الطائرات، وحركة الأقمار الصناعية والمراكب الفضائية الخ.

ركزت بعض الدراسات العلمية الحديثة على أنماط خاصة من المنظومات التفاضلية تدعى بالمعادلات التفاضلية العادية متعددة الحالات، والتي يمكن أن يعبر عنها كمسائل قيم حدية من المرتبة الثانية بالشكل: [1,2,4,8]

$$u'' = \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x)u(x) + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

(1.1)

مع الشروط الحدية:

$$u(a) = \alpha, u(b) = \beta$$

(1.2)

وأيضاً مسائل قيم حدية من المرتبة الثالثة بالشكل: [9,11-15]

$$u''' = \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x)u(x) + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

(1.3)

مع الشروط الحدية:

$$u(a) = \alpha_0, u'(a) = \alpha_1, u'(b) = \beta.$$

(1.4)

حيث u و u' و u'' دوال مستمرة عند c و d ، و $F(x)$ ، $G(x)$ هما دالتان مستمرتان على المجالين $[a, b]$ و $[c, d]$ على الترتيب، و R ثابت حقيقي.

قدم الباحثون مؤخراً العديد من الأبحاث التي تقترح طرائق عددية لحل مسائل القيم الحدية متعددة الحالات من الأنماط (1.1)–(1.4). فعلى سبيل المثال، قدم Noor and Tirmizi في عام 1986 طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية من الأنماط (1.1)، (1.3)، (1.1) باستخدام طريقة تغيير المتحول وتقريب بادي من المرتبتين الثانية والرابعة. كما اقترح AL-Said في عام 1996 حلولاً شرائية للمسألة (1.2)–(1.1) باستخدام كثيرة حدود تربيعية وأعطت هذه الطريقة تقريب عددي للحل ولمشتقه الأول وكانت الطريقة متقاربة من المرتبة الثانية. وطور Islam وآخرون في عام 2007 طريقة بشرائح مثلثية من المرتبة الرابعة ليست من نمط كثيرات الحدود لحل المسألة (1.3)–(1.4). عدل Noor وآخرون في عام 2011 طريقة تغيير المتحول الوسيطية لحل مسألة من النمط (1.3)–(1.4) وهي تهجين لطريقة تغيير المتحول مع تحليل أدوميان، تعطي الحل سلاسل تقريبية. وقدم Mahmoud في عام 2011 طريقة تجميعية شرائية، اعتمدت

على شرائح هرميت من الدرجة الخامسة مع ثلاث نقاط تجميع استخدمت لحل المسألة من النمط (1.3)-(1.4). ودرس Gao and Chi في عام 2013 حلول عددية لمسائل من النمطين (1.1)-(1.4) بتطوير خوارزميات استيفاء تسمى RBF. وقدم Iqbal وآخرون في عام 2014 صيغة غالاركين للعناصر المنتهية باستخدام كثيرات حدود هرميت لحل المسألة (1.3)-(1.4) حيث تعتمد طريقة غالاركين على تابع أساس مناسب تم تطبيقه على عنصر محدود في كامل المجال للحصول على التوافق بين العناصر من حيث الإزاحة والميل لذلك استخدموا كثيرات حدود استيفاء هرميت التكعيبية للحصول على تقريب أملس للحل. طور Pandey في عام 2016 تقنية عددية تعتمد على صيغة الفروق المنتهية وكثيرات حدود شرائحية من الدرجة الرابعة لحل مسائل من النمط (1.3)-(1.4). طور Hussein في عام 2017 طريقة سلسلة القوة لإيجاد حلول تحليلية عددية للمسألة من النمط (1.1)-(1.2). اقترح Mahmoud وآخرون في عام 2019 طريقة شرائحية بأربع نقاط تجميع من المرتبة السابعة، استخدمت لحل معادلات فولتيرا التفاضلية التكاملية. قدم Lin وآخرون في عام 2021 خوارزميتين باستخدام دوال *Shape* بالإضافة إلى طريقة التقيفة لإيجاد الحلول العددية لمسائل القيم الحدية من المرتبتين الثانية والثالثة.

أهمية البحث وأهدافه: Importance of Research and its Objectives

يهدف هذا البحث إلى تطوير تقنية عددية فعالة وذات دقة عددية عالية لإيجاد الحل العددي لبعض مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية العادية متعددة الحالات من المرتبتين الثانية والثالثة نظرا لأهميتها الكبيرة في التطبيقات العلمية الحديثة وظهورها الواسع في الحقول المختلفة. كما نهدف إلى تحديد صيغة للحد الأعلى للخطأ ودراسة الاستقرار والتقارب للتقنية المقترحة لضمان الدقة والفعالية في الحلول العددية التي سنحصل عليها. كما سنقوم بتنفيذ التقنية المقترحة بلغة برمجية عالية المستوى، واختبار الفعالية التطبيقية بحل بعض المسائل ومقارنة النتائج التي نتوصل إليها مع نتائج لطرائق أخرى. كما ويتجلى هدفنا بشكل أساس في دعم وتطوير البحث العلمي في القسم، وتزويد الباحثين وطلاب الدراسات العليا بمعلومات إضافية من الناحيتين النظرية والتطبيقية.

طرائق البحث ومواده: Methodology

تعتمد طرائق البحث على تقنيات التحليل العددي والخوارزميات والبرمجة، وكذلك بعض المفاهيم في الجبر الخطي والتحليل الدالي مثل فضاء التقريبات بكثيرات حدود. كما تم الاطلاع على بعض الطرائق والتقنيات العددية المذكورة في المراجع العلمية الحديثة التي تطرقت لحل مسائل من الأنماط المطروحة. تم إجراء هذا البحث في قسم الرياضيات-كلية العلوم- جامعة طرطوس في الفترة الواقعة بين آذار 2021 وأيار 2021.

تحويل مسائل القيم الحدية إلى مسائل قيم ابتدائية:

تهدف هذه الفقرة إلى تقديم الخطوات اللازمة لتحويل كل من مسألة من القيم الحدية (1.1)-(1.4) إلى مسألتين من مسائل القيم الابتدائية لتلافي المشاكل التي تنضوي عليها مسائل القيم الحدية وصعوبة حلها بالطرق المعروفة. مسألة القيمة الحدية متعددة الحالات من المرتبة الثانية [1,2,4,7,11] :

لنبرهن أن $u(x)$ هو الحل الوحيد لمسألة القيم الحدية متعددة الحالات (1.1)-(1.2). من الواضح أن هذا الحل مرتبط بحلين لمسألتين من مسائل القيم الابتدائية متعددة الحالات، ولهذا سنفرض أن $V(x)$ هو الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية متعددة الحالات الأولى الآتية:

$$V''(x) = \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x)V(x) + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

ξ(1).

مع الشروط الابتدائية

$$V(a) = \alpha, V'(a) = 0$$

ξ(1.1).

كما سنفرض أيضا أن $J(x)$ هو الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية الثانية المتجانسة متعددة الحالات الآتية:

$$J''(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq c \\ G(x)J(x), & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \leq b \end{cases}$$

ξ(2).

مع الشروط الابتدائية

$$J(a) = 0, J'(a) = 1$$

عندئذ فإن $u(x)$ يمكن التعبير عنه كتركيب خطي من الحلين $V(x)$ و $J(x)$ للمسألتين (4.1)-(4.2)

كالآتي:

$$u(x) = V(x) + \gamma J(x)$$

(4.3)

حيث γ ثابت حقيقي مجهول سيتم تعيينه من الشروط الحدية للمسألة متعددة الحالات (1.1)-(1.2). إن التركيب الخطي $u(x) = V(x) + \gamma J(x)$ هو حل للمسألة الحدية متعددة الحالات (1.1)-(1.2) للأسباب

التالية:

$$u''(x) = V''(x) + \gamma J''(x) = \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x)V(x) + F(x) + R + \gamma \begin{cases} 0, & a \leq x \leq c \\ G(x)J(x), & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \leq b \end{cases} \\ F(x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(x) + (\gamma)(0), & a \leq x \leq c \\ G(x)[V(x) + \gamma J(x)] + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x) + (\gamma)(0), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x)u(x) + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

من جهة أخرى، يتبقى إثبات أن التركيب $u(x) = V(x) + \gamma J(x)$ يحقق الشروط الحدية (1.2) للمسألة، أي أن:

$$u(a) = V(a) + \gamma J(a) = \alpha + (\gamma)(0) = \alpha$$

$$u(b) = V(b) + \gamma J(b) = \beta$$

يعني بوضع $u(b) = \beta$ نجد من المعادلة الأخيرة أن:

$$\gamma = \frac{[\beta - V(b)]}{J(b)} \quad (4.4)$$

لقد أثبتنا أن التركيب $u(x) = V(x) + \gamma J(x)$ يحقق المعادلة التفاضلية (1.1) ويحقق شروطها الحدية (1.2) وبالتالي فهو حل وحيد لها وهذا بحسب تعريف الحل الوحيد لمسألة القيم الحدية، وهو المطلوب.

مسألة القيمة الحدية متعددة الحالات من المرتبة الثالثة [3, 5, 8, 9, 10]:

بطريقة مشابهة لما سبق، لنبرهن أن $u(x)$ هو الحل الوحيد للمسألة الحدية متعددة الحالات من المرتبة

الثالثة (1.3)-(1.4). سنجد أن هذا الحل مرتبط بحلين لمسألتين من مسائل القيم الابتدائية من المرتبة الثالثة متعددة الحالات، ولهذا سنفرض أن $V(x)$ هو الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية الأولى الآتية:

$$V'''(x) = \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x)V(x) + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

(4.5)

مع الشروط الابتدائية:

$$V(a) = \alpha_0, V'(a) = \alpha_1, V''(a) = 0.$$

(4.5.1)

كما سنفرض أيضاً أن $J(x)$ هو الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية الثانية المتجانسة المتعددة الحالات الآتية:

$$J'''(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq c \\ G(x)J(x), & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \leq b \end{cases}$$

(4.6)

مع الشروط الابتدائية:

$$J(a) = 0, J'(a) = 0, J''(a) = 1.$$

(4.6.1)

عندئذ فإن $u(x)$ يمكن التعبير عنه كتركيب خطي من الحلين $V(x)$ و $J(x)$ للمسألتين (4.5)-(4.6)

كالآتي:

$$u(x) = V(x) + \eta J(x)$$

(4.7)

حيث η ثابت حقيقي مجهول سيتم تعيينه من الشروط الحدية للمسألة متعددة الحالات (1.3)-(1.4).
إن التركيب الخطي $u(x) = V(x) + \eta J(x)$ هو حل للمسألة الحدية متعددة الحالات (1.3)-(1.4)
للأسباب التالية:

$$u'''(x) = V'''(x) + \eta J'''(x) = \begin{cases} F(x) + (\eta)(0), & a \leq x \leq c \\ G(x)[V(x) + \eta J(x)] + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x) + (\eta)(0), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x) y(x) + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

يتبقى إثبات أن $u(x) = V(x) + \eta J(x)$ يحقق الشروط الحدية (1.4) للمسألة الحدية (1.3)-(1.4)، يعني أن:

$$u(a) = V(a) + \eta J(a) = \alpha_0 + (\eta)(0) = \alpha_0$$

$$u'(a) = V'(a) + \eta J'(a) = \alpha_1 + (\eta)(0) = \alpha_1.$$

$$u'(b) = V'(b) + \eta J'(b)$$

وبوضع $u'(b) = \beta$ نجد من المعادلة الأخيرة أن:

$$\eta = \frac{[\beta - V'(b)]}{J'(b)} \quad (4.8)$$

أثبتنا أن التركيب $u(x) = V(x) + \eta J(x)$ يحقق المعادلة التفاضلية (1.3) ويحقق شروطها الحدية (1.4) وبالتالي فهو حل وحيد لها وهو المطلوب.

تقنية الحل العددي:

لنختار n عدد صحيح من مضاعفات العدد 4، ولنأخذ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ تجزئة منتظمة للمجال $[a, b]$ ، ودون فقدان مبدأ العمومية نأخذ $c = (3a+b)/4$ ، $d = (a+3b)/4$ ، $h = (b-a)/n$ ، وبالتالي نحصل على المجالات الجزئية، $k=0,1,\dots,n-1$ ، $I_i = [x_i, x_{i+1}]$.

يمكن إنشاء التقريبات الشرائحية $S(x)$ من الدرجة الثامنة في كل مجال جزئي I_i كما يلي:

$$S(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{(x-x_i)^k}{k!} S_i^{(k)} + \sum_{k=4}^8 \frac{(x-x_i)^k}{k!} C_{i,k-3} \quad (5.1)$$

نشق كثيرة الحدود $S(x)$ بالنسبة لـ x من المرتبة الأولى حتى المرتبة الثالثة:

$$S'(x) = \sum_{k=1}^3 \frac{(x-x_i)^{k-1}}{(k-1)!} S_i^{(k)} + \sum_{k=4}^8 \frac{(x-x_i)^{k-1}}{(k-1)!} C_{i,k-3} \quad (5.2)$$

$$S''(x) = \sum_{k=2}^3 \frac{(x-x_i)^{k-2}}{(k-2)!} S_i^{(k)} + \sum_{k=4}^8 \frac{(x-x_i)^{k-2}}{(k-2)!} C_{i,k-3} \quad (5.3)$$

$$S''''(x) = S_i^{(3)} + \sum_{k=4}^8 \frac{(x-x_i)^{k-3}}{(k-3)!} C_{i,k-3} \quad (5.4)$$

نشكل خمس نقاط نعرفها كالآتي:

$$x_{i+z_j} = x_i + z_j h, \quad j = 1, 2, \dots, 5 \quad (5.5)$$

في كل مجال جزئي $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ ، ترتبط هذه النقاط بخمس وسطاء تجميع تحقق الآتي:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < 1 \text{ and } z_5 = 1 \quad (5.6)$$

الحل العددي الشرائحي لمسألة القيم الحدية متعددة الحالات (1.1)-(1.2):

لإيجاد الحل العددي للمسألة الحدية متعددة الحالات (1.1)-(1.2) نطبق كثيرات الحدود الشرائحية (5.3)

(5.1) مع نقاط التجميع الخمس (5.5)-(5.6) في كل مجال جزئي $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ ، على مسألتين القيم الابتدائية

(4.1)-(4.2) على الترتيب:

$$S_V''(x_{i+z_j}) = \begin{cases} F(x_{i+z_j}), & a \leq x_{i+z_j} \leq c \\ G(x_{i+z_j})V(x_{i+z_j}) + F(x_{i+z_j}) + R, & c \leq x_{i+z_j} \leq d \\ F(x_{i+z_j}), & d \leq x_{i+z_j} \leq b \end{cases} \quad (5.7)$$

$$S_V(a) = \alpha, S_V'(a) = 0. \quad (5.7.1)$$

$$S_J''(x_{i+z_j}) = \begin{cases} 0, & a \leq x_{i+z_j} \leq c \\ G(x_{i+z_j})J(x_{i+z_j}), & c \leq x_{i+z_j} \leq d \\ 0, & d \leq x_{i+z_j} \leq b \end{cases} \quad (5.8)$$

$$S_J(a) = 0, S_J'(a) = 1. \quad (5.8.1)$$

بحل المعادلتين (5.7)-(5.8) تدريجياً في جميع نقاط التجزئة x_i ، فنحصل على الحلين الشرائحيين

$S_V(x_i), S_J(x_i)$ ويتعويضهما في (4.3) نحصل على الحل الشرائحي لمسألة القيم الحدية متعددة الحالات

(1.1)-(1.2) كالآتي:

$$S_u(x_i) = S_V(x_i) + \frac{[\beta - V(b)]}{J(b)} S_J(x_i), \quad i=1, 2, \dots, n$$

(5.9)

الحل العددي لمسألة القيم الحدية متعددة الحالات (1.3)-(1.4):

بأسلوب مشابه لما سبق نجد الحل الشرائحي للمسألة الحدية من المرتبة الثالثة (1.3)-(1.4) بتطبيق كثيرات

الحدود الشرائحية (5.1)-(5.4) مع نقاط التجميع (5.5)-(5.6) في كل مجال جزئي $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ ، على مسألتين

القيم الابتدائية (4.5)-(4.6) على الترتيب:

$$S_V'''(x_{i+z_j}) = \begin{cases} F(x_{i+z_j}), & a \leq x_{i+z_j} \leq c \\ G(x_{i+z_j})V(x_{i+z_j}) + F(x_{i+z_j}) + R, & c \leq x_{i+z_j} \leq d \\ F(x_{i+z_j}), & d \leq x_{i+z_j} \leq b \end{cases} \quad (5.10)$$

$$S_V(a) = \alpha_0, S_V'(a) = \alpha_1, S_V''(a) = 0.$$

(5.10.1)

$$S_J'''(x_{i+z_j}) = \begin{cases} 0, & a \leq x_{i+z_j} \leq c \\ G(x_{i+z_j})J(x_{i+z_j}), & c \leq x_{i+z_j} \leq d \\ 0, & d \leq x_{i+z_j} \leq b \end{cases}$$

(5.11)

$$S_J(a) = 0, S_J'(a) = 0, S_J''(a) = 1. \quad (5.11.1)$$

بحل كل من المعادلتين (5.10)-(5.11) تدريجياً فنحصل على الحلين الشرائحيين $S_V(x_i), S_J(x_i)$ في x_i ، وبتعويضهما في المعادلة (4.7) ، نحصل على الحل الشرائحي لمسألة القيم الحدية متعددة الحالات (1.3)-(1.4) :

$$S_u(x_i) = S_V(x_i) + \frac{[\beta - V'(b)]}{J'(b)} S_J(x_i), \quad i=0,1,\dots \quad (5.12)$$

حليل الخطأ ومرتبة التقارب للتقنية مطبقة على المسألة المطروحة من المرتبة الثانية :

تعريف (1)[6]: يقال عن طريقة عددية إنها متناسقة (Consistent) من الرتبة p إذا كان

$$\max_{0 \leq i \leq n} \bar{\tau}_i = C h^p, \quad \text{حيث } \bar{\tau}_i \text{ هو خطأ الاقتطاع الموضوعي للطريقة عند } x_i, \text{ و } C \text{ ثابت مستقل عن } h.$$

ندرس خصائص ومرتبة التقارب للتقنية الشرائحية المقترحة عندما تطبق على مسألة الاختبار من المرتبة الثانية

الآتية.

$$u''(x) = f(x, u(x)) \quad (6.1)$$

وباستخدام التقريبات (3.1) - (3.3) مع النقاط التجميعية $x_{i+z_j} = x_i + h z_j$ في المعادلة (4.1) ينتج

لدينا:

$$S_i'' + (h z_j) S_i''' + \frac{(h z_j)^2}{2} C_{i,1} + \frac{(h z_j)^3}{6} C_{i,2} + \frac{(h z_j)^4}{24} C_{i,3} + \frac{(h z_j)^5}{120} C_{i,4} +$$

$$\frac{(h z_j)^6}{720} C_{i,5} = f(x_{i+z_j}, S(x_{i+z_j})), \quad j=1(1)5, \quad i=0(1)n-1$$

(6.2)

نعيد كتابة (6.2) بصيغة المصفوفات كالاتي:

$$\bar{A} \bar{C}_i + \bar{S}_i = \bar{F}_i, \quad i=0,1,\dots,n-1$$

(6.3)

حيث

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{h^2 z_1^2}{2} & \frac{h^3 z_1^3}{6} & \frac{h^4 z_1^4}{24} & \frac{h^5 z_1^5}{120} & \frac{h^6 z_1^6}{720} \\ \frac{h^2 z_2^2}{2} & \frac{h^3 z_2^3}{6} & \frac{h^4 z_2^4}{24} & \frac{h^5 z_2^5}{120} & \frac{h^6 z_2^6}{720} \\ \frac{h^2 z_3^2}{2} & \frac{h^3 z_3^3}{6} & \frac{h^4 z_3^4}{24} & \frac{h^5 z_3^5}{120} & \frac{h^6 z_3^6}{720} \\ \frac{h^2 z_4^2}{2} & \frac{h^3 z_4^3}{6} & \frac{h^4 z_4^4}{24} & \frac{h^5 z_4^5}{120} & \frac{h^6 z_4^6}{720} \\ \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{6} & \frac{h^4}{24} & \frac{h^5}{120} & \frac{h^6}{720} \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_i = \begin{bmatrix} S_i'' + h z_1 S_i''' \\ S_i'' + h z_2 S_i''' \\ S_i'' + h z_3 S_i''' \\ S_i'' + h z_4 S_i''' \\ S_i'' + h S_i''' \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_{i,1} \\ C_{i,2} \\ C_{i,3} \\ C_{i,4} \\ C_{i,5} \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_{k+z_j} = \begin{bmatrix} f(x_{i+z_1}, S(x_{i+z_1})) \\ f(x_{i+z_2}, S(x_{i+z_2})) \\ f(x_{i+z_3}, S(x_{i+z_3})) \\ f(x_{i+z_4}, S(x_{i+z_4})) \\ f(x_{i+1}, S(x_{i+1})) \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المنظومة (6.3) قابلة للحل لأجل قيم للوسطاء تحقق الشروط $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1$ ويمكن تعيين المجاهيل \bar{C}_i تكرارياً، وبالتالي فالحل العددي الشرائحي موجود لأن محدد المصفوفة \bar{A} غير صفري، كما نجد:

$$|\bar{A}| = \frac{h^{20}(z_1-1)z_1^2(z_1-z_2)(z_2-1)z_2^2(z_1-z_3)(z_2-z_3)(z_3-1)z_3^2(z_1-z_4)(z_2-z_4)(z_3-z_4)(z_4-1)z_4^2}{24883200} \neq 0$$

بفرض أن $u(x) \in C^9[a, b]$ هو حل وحيد للمسألة (4.1) وأن $S(x)$ هو الحل الشرائحي لها وبفرض أن $T = (\bar{\tau}_i)$ متجهة من البعد خمسة، و $\bar{\tau}_i$ يرمز للخطأ المتقطع الموضوعي للتقنية المقترحة. بتطبيق التقريب الشرائحي (3.1) مع نقاط التجميع $x_{i+z_j} = x_i + h z_j$ نحصل على صيغة الخطأ المتقطع الموضوعي كالآتي:

$$\bar{\tau}_i = \begin{bmatrix} u(x_i + z_1 h) \\ u(x_i + z_2 h) \\ u(x_i + z_3 h) \\ u(x_i + z_4 h) \\ u(x_i + h) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S(x_i + z_1 h) \\ S(x_i + z_2 h) \\ S(x_i + z_3 h) \\ S(x_i + z_4 h) \\ S(x_i + h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_i + z_1 h) \\ u(x_i + z_2 h) \\ u(x_i + z_3 h) \\ u(x_i + z_4 h) \\ u(x_i + h) \end{bmatrix} - A\bar{C}_i - \tilde{S}_i \quad (6.4)$$

حيث

$$\tilde{S}_i = \begin{bmatrix} S_i + h z_1 S'_i + \frac{(h z_1)^2}{2} S''_i + \frac{(h z_1)^3}{6} S'''_i \\ S_i + h z_2 S'_i + \frac{(h z_2)^2}{2} S''_i + \frac{(h z_2)^3}{6} S'''_i \\ S_i + h z_3 S'_i + \frac{(h z_3)^2}{2} S''_i + \frac{(h z_3)^3}{6} S'''_i \\ S_i + h z_4 S'_i + \frac{(h z_4)^2}{2} S''_i + \frac{(h z_4)^3}{6} S'''_i \\ S_i + h S'_i + \frac{h^2}{2} S''_i + \frac{h^3}{6} S'''_i \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{h^4 z_1^4}{4!} & \frac{h^5 z_1^5}{5!} & \frac{h^6 z_1^6}{6!} & \frac{h^7 z_1^7}{7!} & \frac{h^8 z_1^8}{8!} \\ \frac{h^4 z_2^4}{4!} & \frac{h^5 z_2^5}{5!} & \frac{h^6 z_2^6}{6!} & \frac{h^7 z_2^7}{7!} & \frac{h^8 z_2^8}{8!} \\ \frac{h^4 z_3^4}{4!} & \frac{h^5 z_3^5}{5!} & \frac{h^6 z_3^6}{6!} & \frac{h^7 z_3^7}{7!} & \frac{h^8 z_3^8}{8!} \\ \frac{h^4 z_4^4}{4!} & \frac{h^5 z_4^5}{5!} & \frac{h^6 z_4^6}{6!} & \frac{h^7 z_4^7}{7!} & \frac{h^8 z_4^8}{8!} \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & \frac{h^7}{7!} & \frac{h^8}{8!} \end{bmatrix}$$

(6.5)

نحسب من المنظومة (6.3) على متجهة المجاهيل $\bar{C}_i = \bar{A}^{-1}(-\bar{S}_i + \bar{F}_i)$ وبالتعويض في العلاقة (6.4) واستخدام منشورات تايلور لدالة الحل $u(x)$ حول x_i وتثبيت القيم $z_1 = 0.25, z_2 = 0.5, z_3 = 0.75, z_4 = 0.9$ تنتج لدينا دالة الخطأ المتقطع الموضوعي :

$$\bar{\tau}_i = \begin{bmatrix} \frac{3541 u^{(9)}(c_i)}{3329438515200} h^9 \\ \frac{29 u^{(9)}(c_i)}{13005619200} h^9 \\ \frac{27 u^{(9)}(c_i)}{8220835840} h^9 \\ \frac{269001 u^{(9)}(c_i)}{62720000000000} h^9 \\ \frac{u^{(9)}(c_i)}{203212800} h^9 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^8 \frac{(x-x_i)^k}{k!} u^{(k)}(x_i) + \frac{(x-x_i)^9}{9!} u^{(9)}(c_i), c_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

ومنه نجد أن مرتبة الخطأ المقطع المحلي عند كل نقطة x_i هي التاسعة:

$$\hat{\tau}_i = \text{Max}|\bar{\tau}_i| = \frac{K}{203212800} h^9 \quad (6.6)$$

حيث

$$K = \max_{x_i \in [a,b]} |u^{(9)}(c_i)|$$

وبالتالي مرتبة الخطأ الشامل على كامل مجال الحل تقدر كآتي:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq n} |\hat{\tau}_i| = n \frac{K}{203212800} h^9 \equiv O(h^8) \quad (6.7)$$

نتيجة 1:

نجد من التعريف (1) أن التقنية الشرائحية المطبقة على مسألة اختبار من نمط المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية ستكون متناسقة من المرتبة الثامنة إذا تم تثبيت الوسطاء بالقيم $z_1 = 0.25, z_2 = 0.5, z_3 = 0.75, z_4 = 0.9$

تحليل الخطأ ومرتبة التقارب للتقنية المطبقة على المرتبة الثالثة :

بشكل مشابه لما سبق سنطبق التقنية الشرائحية على مسألة الاختبار من المرتبة الثالثة الآتية.

$$u'''(x) = f(x, u(x)) \quad (6.8)$$

وباستخدام التقريبات (3.1) - (3.4) مع النقاط التجميعية $x_{i+z_j} = x_i + h z_j$ في المعادلة (4.8) نحصل

على:

$$S_i''' + h z_j C_{i,1} + \frac{(h z_j)^2}{2} C_{i,2} + \frac{(h z_j)^3}{6} C_{i,3} + \frac{(h z_j)^4}{24} C_{i,4} + \frac{(h z_j)^5}{120} C_{i,5} = f(x_{i+z_j}, S(x_{i+z_j})), j=1(1)5, i=0(1)n-1$$

(9)

نعيد كتابة (6.9) بصيغة المصفوفات كآتي:

$$\tilde{A} \bar{C}_i + \bar{S}_i = \bar{F}_i, \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (6.10)$$

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_{i,1} \\ C_{i,2} \\ C_{i,3} \\ C_{i,4} \\ C_{i,5} \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_i = \begin{bmatrix} f(x_{i+z_1}, S(x_{i+z_1})) \\ f(x_{i+z_2}, S(x_{i+z_2})) \\ f(x_{i+z_3}, S(x_{i+z_3})) \\ f(x_{i+z_4}, S(x_{i+z_4})) \\ f(x_{i+1}, S(x_{i+1})) \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} h z_1 & \frac{h^2 z_1^2}{2} & \frac{h^3 z_1^3}{6} & \frac{h^4 z_1^4}{24} & \frac{h^5 z_1^5}{120} \\ h z_2 & \frac{h^2 z_2^2}{2} & \frac{h^3 z_2^3}{6} & \frac{h^4 z_2^4}{24} & \frac{h^5 z_2^5}{120} \\ h z_3 & \frac{h^2 z_3^2}{2} & \frac{h^3 z_3^3}{6} & \frac{h^4 z_3^4}{24} & \frac{h^5 z_3^5}{120} \\ h z_4 & \frac{h^2 z_4^2}{2} & \frac{h^3 z_4^3}{6} & \frac{h^4 z_4^4}{24} & \frac{h^5 z_4^5}{120} \\ h & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{6} & \frac{h^4}{24} & \frac{h^5}{120} \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_i = \begin{bmatrix} S_i''' \\ S_i''' \\ S_i''' \\ S_i''' \\ S_i''' \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المنظومة (6.10) قابلة للحل لأجل أي قيم للوسطاء تحقق الشروط $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1$ ويمكن تعيين المجاهيل \bar{C}_i تكرارياً، وبالتالي فالحل الشرائحي موجود لأن محدد المصفوفة \tilde{A} غير صفري، كما نجد:

$$|\tilde{A}| = \frac{h^{15} (z_1-1)z_1(z_1-z_2)(z_2-1)z_2(z_1-z_3)(z_2-z_3)(z_3-1)z_3(z_1-z_4)(z_2-z_4)(z_3-z_4)(z_4-1)z_4}{34560} \neq 0$$

بفرض أن $u(x) \in C^9[a, b]$ هو حل وحيد للمنظومة (6.8) وأن $S(x)$ هو الحل الشرائحي وبفرض أن $T = (\bar{\tau}_i)$ متجه من البعد خمسة، و $\bar{\tau}_i$ يرمز للخطأ المقطع الموضوعي للتقنية. بتطبيق التقريب الشرائحي (5.1) مع نقاط التجميع $x_{i+z_j} = x_i + h z_j$ نحصل على صيغة الخطأ المقطع الموضوعي كالآتي:

$$\bar{\tau}_i = \begin{bmatrix} u(x_i + z_1 h) \\ u(x_i + z_2 h) \\ u(x_i + z_3 h) \\ u(x_i + z_4 h) \\ u(x_i + h) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S(x_i + z_1 h) \\ S(x_i + z_2 h) \\ S(x_i + z_3 h) \\ S(x_i + z_4 h) \\ S(x_i + h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_i + z_1 h) \\ u(x_i + z_2 h) \\ u(x_i + z_3 h) \\ u(x_i + z_4 h) \\ u(x_i + h) \end{bmatrix} - A\bar{C}_i - \bar{S}_i \quad (6.11)$$

حيث A, \bar{S}_i كما هما في (6.5).

نحسب من المنظومة (6.10) متجهة المجاهيل $\bar{C}_i = \tilde{A}^{-1}(-\bar{S}_i + \bar{F}_i)$ ونعوض في العلاقة (6.11)

وباستخدام منشورات تايلور لدالة الحل $u(x)$ حول x_i ونشبيت الوسطاء

نتنتج لدينا دالة الخطأ المقطع الموضوعي : $z_1 = 0.25, z_2 = 0.5, z_3 = 0.75, z_4 = 0.9$

$$\bar{\tau}_i = \begin{bmatrix} \frac{689 u^{(9)}(c_i)}{95126814720} h^9 \\ \frac{43 u^{(9)}(c_i)}{928972800} h^9 \\ \frac{27 u^{(9)}(c_i)}{234881024} h^9 \\ \frac{767637 u^{(9)}(c_i)}{448000000000} h^9 \\ \frac{u^{(9)}(c_i)}{4644864} h^9 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^8 \frac{(x-x_i)^k}{k!} u^{(k)}(x_i) + \frac{(x-x_i)^9}{9!} u^{(9)}(c_i), c_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

ومنه نجد أن مرتبة الخطأ المقطع المحلي عند كل نقطة x_i هي التاسعة:

$$\hat{\tau}_i = \text{Max}|\bar{\tau}_i| = \frac{L}{4644864} h^9 \quad (6.12)$$

حيث

$$L = \max_{x_i \in [a,b]} |u^{(9)}(c_i)|$$

ومنه نحصل على مرتبة الخطأ النظري الشامل على كامل مجال الحل كالاتي:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq n} |\hat{\tau}_i| = n \frac{L}{4644864} h^9 \equiv O(h^8) \quad (6.13)$$

نتيجة 2:

نجد من التعريف (1) أن التقنية الشرائحية المطبقة على مسألة اختبار من نمط المعادلات التفاضلية من المرتبة الثالثة ستكون متناسقة من المرتبة الثامنة إذا تم تثبيت الوسطاء بالقيم

$$z_1 = 0.25, z_2 = 0.5, z_3 = 0.75, z_4 = 0.9$$

7-استقرار الطريقة الشرائحية : Stability of Spline Method

قبل البدء نطرح السؤال الآتي، ما هو الاستقرار العددي؟:

يقال عن تقنية عددية إنها تنتج متتالية عددية مستقرة إذا كان تأثير كل خطوة مثبتة لخطأ التدوير يكون محدود بشكل مستقل عن عدد نقاط التجزئة المستخدمة. بمعنى أدق من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كان $|S_0 - \bar{S}_0| < \delta(\varepsilon)$ فإن الفرق بين أي حلين عددين مختلفين S_n, \bar{S}_n بالتقنية العددية نفسها يحقق $|S_n - \bar{S}_n| < \varepsilon$

من أجل كل $0 \leq h \leq h_0$ ، حيث S_0, \bar{S}_0 حلان ابتدائيان مختلفان بتغييرات طفيفة.

ندرس أولاً الاستقرار المطلق الخطي بتطبيق التقنية العددية المقترحة على معادلة الاختبار الخطية من المرتبة الثانية:

$$u''(x) = \lambda^2 u(x), \quad (7.1)$$

$$u(a) = \alpha_0, u'(a) = \alpha_1 \quad (7.1.1)$$

حيث λ ثابت اختياري. وتطبيق التقريبات (5.1) - (5.3) مع النقاط التجميعية $x_{i+z_j} = x_i + h z_j$ على (7.1) :

$$A_1 C_i + h^2 S_{1,i} = h^2 \lambda^2 (A_2 C_i + S_{2,i}), \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (7.2)$$

وبالتالي:

$$C_i = (A_1 - h^2 \lambda^2 A_2)^{-1} (SS_i), \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (7.3)$$

حيث $SS_i = (-h^2 S_{1,i} + h^2 \lambda^2 S_{2,i})$ ، وسنضع $p = h^2 \lambda^2$.

الآن، باستخدام التقريب الشرائحي (5.1) في نقاط التجميع $x_{i+z_j} = x_i + h z_j$ نحصل على:

$$S_{i+1} = A_2 C_i + S_{2,i}, \quad i=0,1,\dots,n-1$$

(7.4)

وبتعويض (7.3) في العلاقة (7.4) نحصل على متتالية الحل العددي الشرائحي كالآتي:

$$S_{i+1} = A_2 (A_1 - pA_2)^{-1} (SS_i) + S_{2,i}, \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (7.5)$$

فإذا أخذنا، \bar{S}_{i+1} متتالية حل شرائحي آخر بالتقنية ذاتها بشروط بدء مختلفة قليلاً، وحساب الفرق ينتج لدينا:

$$E_{i+1} = S_{i+1} - \bar{S}_{i+1} = [A_2 (A_1 - pA_2)^{-1}]^i (SS_0 - \bar{SS}_0), \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (7.6)$$

حيث SS_0, \bar{SS}_0 قيم ثابتة معلومة من شروط البدء، و لدينا:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{z_1^2}{2} & \frac{z_1^3}{6} & \frac{z_1^4}{24} & \frac{z_1^5}{120} & \frac{z_1^6}{720} \\ \frac{z_2^2}{2} & \frac{z_2^3}{6} & \frac{z_2^4}{24} & \frac{z_2^5}{120} & \frac{z_2^6}{720} \\ \frac{z_3^2}{2} & \frac{z_3^3}{6} & \frac{z_3^4}{24} & \frac{z_3^5}{120} & \frac{z_3^6}{720} \\ \frac{z_4^2}{2} & \frac{z_4^3}{6} & \frac{z_4^4}{24} & \frac{z_4^5}{120} & \frac{z_4^6}{720} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} \end{bmatrix}, S_{1,i} = \begin{bmatrix} S_i'' + h z_1 S_i''' \\ S_i'' + h z_2 S_i''' \\ S_i'' + h z_3 S_i''' \\ S_i'' + h z_4 S_i''' \\ S_i'' + h S_i''' \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} h^4 C_{i,1} \\ h^5 C_{i,2} \\ h^6 C_{i,3} \\ h^7 C_{i,4} \\ h^8 C_{i,5} \end{bmatrix},$$

$$S_{2,i} = \begin{bmatrix} S_i + h z_1 S_i' + \frac{(h z_1)^2}{2} S_i'' + \frac{(h z_1)^3}{6} S_i''' \\ S_i + h z_2 S_i' + \frac{(h z_2)^2}{2} S_i'' + \frac{(h z_2)^3}{6} S_i''' \\ S_i + h z_3 S_i' + \frac{(h z_3)^2}{2} S_i'' + \frac{(h z_3)^3}{6} S_i''' \\ S_i + h z_4 S_i' + \frac{(h z_4)^2}{2} S_i'' + \frac{(h z_4)^3}{6} S_i''' \\ S_i + h S_i' + \frac{h^2}{2} S_i'' + \frac{h^3}{6} S_i''' \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \frac{z_1^4}{4!} & \frac{z_1^5}{5!} & \frac{z_1^6}{6!} & \frac{z_1^7}{7!} & \frac{z_1^8}{8!} \\ \frac{z_2^4}{4!} & \frac{z_2^5}{5!} & \frac{z_2^6}{6!} & \frac{z_2^7}{7!} & \frac{z_2^8}{8!} \\ \frac{z_3^4}{4!} & \frac{z_3^5}{5!} & \frac{z_3^6}{6!} & \frac{z_3^7}{7!} & \frac{z_3^8}{8!} \\ \frac{z_4^4}{4!} & \frac{z_4^5}{5!} & \frac{z_4^6}{6!} & \frac{z_4^7}{7!} & \frac{z_4^8}{8!} \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{7!} & \frac{1}{8!} \end{bmatrix}$$

(7.7)

تدعى $R(h, p) = A_2 (A_1 - pA_2)^{-1}$ دالة الاستقرار للتقنية الشرائحية المطبقة على مسألة الاختبار (7.1)

الخطية في المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية:

تعريف (2) [12]:

يقال عن طريقة عددية إنها مستقرة (Stable) إذا كان $|\bar{R}(h, p)| = |A_2 (A_1 - pA_2)^{-1}| < 1$ لأجل أي

$h > 0$ ، وقيم مثبته مناسبة لوسطاء التجميع تحقق $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1$ ، حيث $p = x + Iy$.

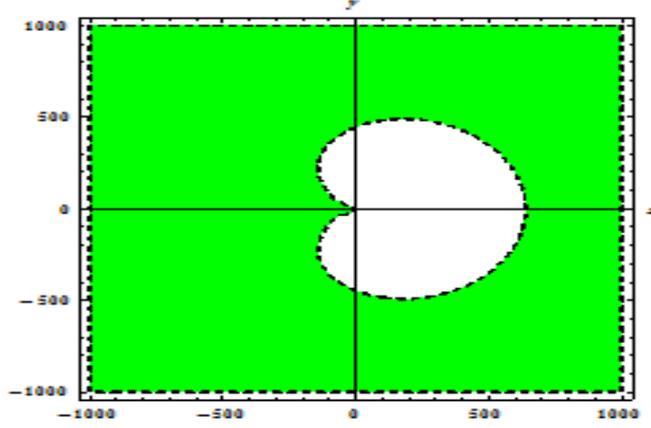
نجد باستخدام **Mathematica** أنه باختيار القيم لوسطاء التجميع

$z_1 = 0.25, z_2 = 0.5, z_3 = 0.75, z_4 = 0.9$ فإن القيم المميزة لمصفوفة الاستقرار

$R(h, p)$ تقع على محيط أو داخل قرص الوحدة في المستوى العقدي، لأن القيم المميزة: $\{1, 1, 0.892521, 0.9076542, 0.973036\}$.

تحديد منطقة الاستقرار للتقنية الشرائحية المطبقة على مسألة اختبار من المرتبة الثانية:

منطقة الاستقرار هي مجموعة النقاط (x, y) من المستوي العقدي التي تجعل مصفوفة الاستقرار تحقق المتراجحة $\bar{R}(h, p) = |A_2(A_1 - pA_2)^{-1}| < 1$ ، حيث $p = x + I y$ ، وباستخدام لغة البرمجة Mathematica نرسم في الشكل (1) منطقة الاستقرار للتقنية الشرائحية مطبقة لمسألة اختبار من المرتبة الثانية.



الشكل (1): منطقة الاستقرار للتقنية الشرائحية مطبقة لمسألة اختبار من المرتبة الثانية هي المنطقة المظلمة من الشكل.

ثانياً: بأسلوب مشابه ندرس الاستقرار المطلق الخطي بتطبيق التقنية المقترحة على معادلة الاختبار من المرتبة

الثالثة:

$$u'''(x) = \lambda^3 u(x), \quad (7.8)$$

$$u(a) = \alpha_0, u'(a) = \alpha_1, u''(a) = \alpha_2 \quad (7.8.1)$$

لأجل λ ثابت اختياري. وبتطبيق التقريبات (5.1) - (5.4) مع النقاط التجميعية $x_{i+z_j} = x_i + h z_j$ على

(7.8):

$$A_3 C_i + h^3 S_{3,i} = h^3 \lambda^3 (A_2 C_i + S_{2,i}) \quad , \quad i=0,1,\dots,n-1$$

(7.9)

وبالتالي:

$$C_i = (A_3 - h^3 \lambda^3 A_2)^{-1} (SS_i) \quad , \quad i=0,1,\dots,n-1$$

(7.10)

$$\text{حيث } SS_i = (-h^3 S_{3,i} + h^3 \lambda^3 S_{2,i}) \text{ ، وسنضع } p = h^3 \lambda^3$$

و بتطبيق التقريب الشرائحي (5.1) مع نقاط التجميع $x_{i+z_j} = x_i + h z_j$ نحصل على العلاقة التكرارية:

$$S_{i+1} = A_2 C_i + S_{2,i}, \quad i=0,1,\dots,n-1$$

(7.11)

وبتعويض متجهة المجاهيل (7.10) في العلاقة (7.11) نحصل على متتالية الحل العددي الشرائحي الآتية:

$$S_{i+1} = A_2 (A_3 - p A_2)^{-1} (SS_i) + S_{2,i}, \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (7.12)$$

بأخذ \hat{S}_{i+1} متتالية حل شرائحي آخر للتقنية الشرائحية ولكن بشروط بدء مختلفة قليلاً، وبحساب الفرق نجد أن:

$$E_{i+1} = S_{i+1} - \hat{S}_{i+1} = [A_2(A_3 - pA_2)^{-1}]^i (SS_0 - \overline{SS}_0), \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (7.13)$$

حيث SS_0, \overline{SS}_0 قيم ثابتة معلومة من شروط بدء المسألة، و $A_2, S_{2,i}$ هي ذاتها في العلاقة (7.7)، و لدينا:

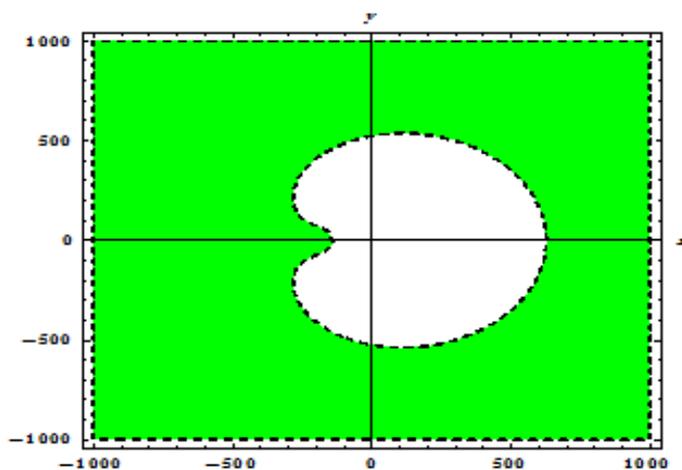
$$A_3 = \begin{bmatrix} z_1 & \frac{z_1^2}{2} & \frac{z_1^3}{6} & \frac{z_1^4}{24} & \frac{z_1^5}{120} \\ z_2 & \frac{z_2^2}{2} & \frac{z_2^3}{6} & \frac{z_2^4}{24} & \frac{z_2^5}{120} \\ z_3 & \frac{z_3^2}{2} & \frac{z_3^3}{6} & \frac{z_3^4}{24} & \frac{z_3^5}{120} \\ z_4 & \frac{z_4^2}{6} & \frac{z_4^3}{6} & \frac{z_4^4}{24} & \frac{z_4^5}{120} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \end{bmatrix}, S_{3,i} = \begin{bmatrix} S_i''' \\ S_i''' \\ S_i''' \\ S_i''' \\ S_i''' \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} h^4 C_{i,1} \\ h^5 C_{i,2} \\ h^6 C_{i,3} \\ h^7 C_{i,4} \\ h^8 C_{i,5} \end{bmatrix}$$

وكذلك تدعى $R(h, p) = A_2(A_3 - pA_2)^{-1}$ دالة الاستقرار للتقنية الشرائحية المطبقة على مسألة الاختبار الخطية في المعادلات التفاضلية من المرتبة الثالثة.

وباستخدام **Mathematica** واختيار القيم لوسطاء التجميع $z_1 = 0.5, z_2 = 0.5, z_3 = 0.75, z_4 = 0.9$ والقيمة المعيارية $p=1$ فإن القيم المميزة لمصفوفة الاستقرار $R(h, p)$ تقع على محيط أو داخل قرص الوحدة في المستوى العقدي، إذ أن قيمها المميزة المطلقة تعطى: $\{1, 1, 1, 0.8760321, 0.995852\}$.

تحديد منطقة الاستقرار للتقنية الشرائحية المطبقة على مسألة اختبار من المرتبة الثالثة:

بأسلوب مشابه نرسم في الشكل (2) منطقة الاستقرار للتقنية الشرائحية مطبقة لمسألة الاختبار من المرتبة الثالثة وهي مجموعة النقاط (x, y) من المستوى العقدي التي تحقق $|R(h, p)| < 1$ ، حيث $p = x + Iy$.



الشكل(2): منطقة الاستقرار للتقنية الشرائحية مطبقة لمسألة اختبار من المرتبة الثالثة هي المنطقة المظلمة من الشكل.

النتائج العددية:

نقدم في هذه الفقرة حلول عددية لمسألتي اختبار في المعادلات التفاضلية متعددة الحالات من المرتبتين الثانية والثالثة وذلك لاختبار فعالية التقنية المقترحة. تملك المسائل المذكورة حولا تحليلية لنستطيع تقدير الأخطاء المطلقة. تم إعداد البرامج وتنفيذ خوارزمية الطريقة باستخدام لغة البرمجة Mathematica .

مسألة (1): لناخذ المعادلة التفاضلية المتعددة الحالات من المرتبة الثانية [2,4,7,11] الآتية

$$u'' = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ u-1 & \text{for } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 0 & \text{for } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

والخاضعة للشروط الحدية :

$$u(0) = 0, u(\pi) = 0,$$

مع الحل النظري التحليلي :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{4x}{r_1}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1 - \frac{4}{r_2} \cosh\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ \frac{4}{r_1}(\pi - x), & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

$$\cdot r_1 = \pi + 4 \coth\left(\frac{\pi}{4}\right), r_2 = \pi \sinh\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cosh\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{حيث}$$

نلخص في الجدول (1) مقارنات الحل العددي والخطأ المطلق الناتج لطريقتنا مع طريقة سلسلة القوى المقطعة RPS [11]. كما نعرض في الجدول (2) مقارنات لأكبر الأخطاء المطلقة على كامل مجال الحل العددي لطريقتنا مع طريقة شرائح B- [7]، وطريقة موجات Haar [4]، وطريقة الدوال الشرائح التكعيبية [2]. كما ونرسم في الشكلين (3) - (4) الحل العددي بطريقتنا مع الحل الدقيق والخطأ المطلق في الحل العددي بخطوة $h = \pi/16$ على الترتيب.

الجدول (1): أكبر الأخطاء المطلقة على كامل مسار الحل العددي للمسألة (1).

x_i	الخطأ المطلق بطريقة RPS [11,2017]	الحل الدقيق للمسألة	الحل العددي بطريقتنا	الخطأ المطلق بطريقتنا المقترحة
$\pi/16$	9.44076761 E-12	0.0849899857282 8273	0.08498998572828273	1.762091 E-18
$3\pi/16$	2.83223445 E-11	0.2549699571848 482	0.2549699571848482	7.109871 E-18
$\pi/4$	3.77630704 E-11	0.3399599429131 309	0.3399599429131309	1.710378 E-17
$3\pi/8$	6.00832162 E-11	0.4627919271662 765	0.46279192716627543	1.054710 E-15
$\pi/2$	9.17877996 E-11	0.5017095515631 806	0.5017095515631799	7.771563 E-16
$5\pi/8$	1.37415135 E-10	0.4627919271662 765	0.46279192716627626	2.220451 E-16
$3\pi/4$	1.64360081 E-10	0.3399599429131 3114	0.3399599429131311	5.551120 E-17

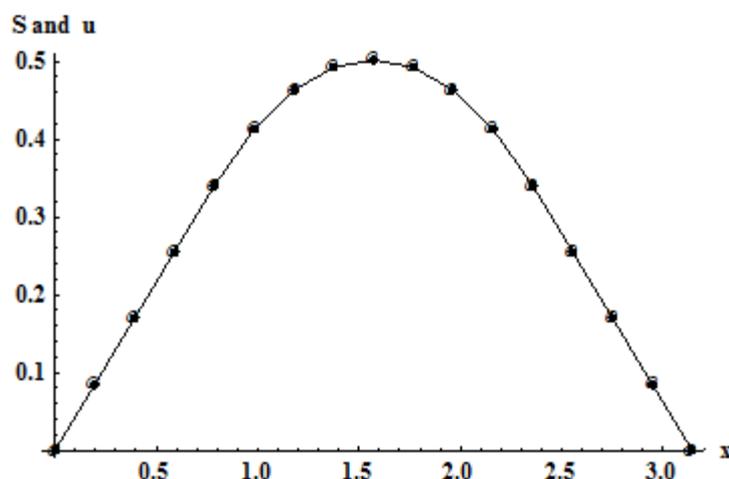
$13\pi/16$	1.23269950 E-10	0.2549699571848 481	0.25496995718484816	5.551122 E-17
$15\pi/16$	4.10899786 E-11	0.0849899857282 8283	0.0849899857282827	1.249321 E-16
π	0	3.1415926535897 93	3.141592653589793	0

الجدول (2): مقارنات لأكبر الأخطاء المطلقة على كامل مجال الحل العددي لطريقتنا مع طرائق أخرى [2,14,4] للمسألة (1).

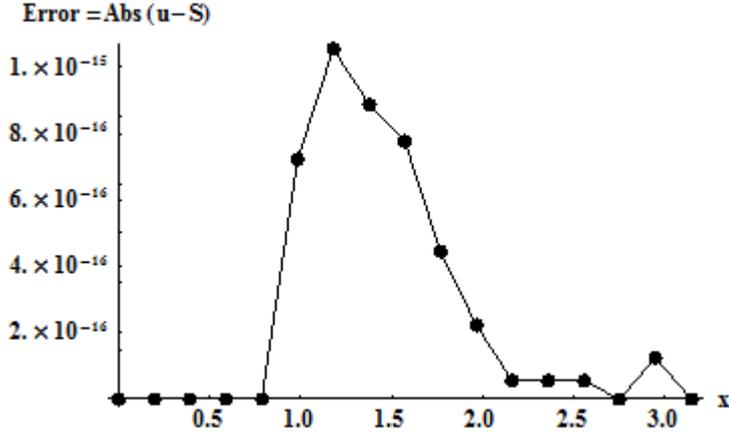
h	B-spline functions [7, 2011]	Haar Wavelets [4, 2010]	Quadratic Spline Functions [2,1996]	طريقتنا المقترحة
$\pi/8$	1.65757E-07	3.6374E-04	-----	2.18048 E-13
$\pi/16$	1.65757E-07	9.7774E-05	9.041E-04	1.054710E-15
$\pi/32$	5.6080E-10	2.5281E-05	2.350E-04	1.66533 E-16
$\pi/64$	1.1997E-10	6.4235E-06	5.989 E-05	1.11022 E-16

ملاحظة 1:

بمقارنة الحل العددي في الجدول (2) لطريقتنا المقترحة مع طريقة سلسلة القوى المقطعة RPS في [11] نجد أن طريقتنا أفضل وأكثر دقة، كما ونجد بمقارنة الأخطاء المطلقة في الجدول (2) طريقتنا أكثر دقة من الطرائق في المراجع [2,4,7].



الشكل (3): الحل العددي بطريقتنا ●●●● مع الحل الدقيق — بتجزئة $n=16$.

الشكل(4): الخطأ المطلق في الحل العددي بطريقتنا بخطوة $h = \pi/16$.

مسألة (2): ولتأخذ المعادلة التفاضلية المتعددة الحالات من المرتبة الثالثة [3,6,8,9,10]:

$$u''' = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ u-1 & \text{for } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{for } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

الخاضعة للشروط الحدية:

$$u(0) = 0, u'(0) = 0, u'(1) = 0,$$

مع الحل النظري التحليلي :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}a_1x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 1 + a_2e^x + e^{-x/2} \left(a_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + a_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right), & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ a_5x(\frac{1}{2}x-1) + a_6, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

حيث:

$$a_1=0.14520742362098, a_2=-0.21130240827197, a_3=-0.78610085318732,$$

$$a_4=-0.24585768969643, a_5=0.05860440434801, a_6=0.04768241777632$$

نلخص في الجدول (3) مقارنات الحل العددي والخطأ المطلق الناتج لطريقتنا مع طريقة استيفاء RPF [8].

و نعرض في الجدول (4) مقارنات لأكبر الأخطاء المطلقة في الحل العددي لطريقتنا مع الطريقة الشرائحية من الدرجة الرابعة في [10]، وطريقة جالركين لعناصر المنتهية في [9]، وطريقة التجميع بشرائح من الدرجة الخامسة في [6]. كما ونرسم في الشكلين (3)-(4) الحل العددي بطريقتنا مع الحل الدقيق والخطأ المطلق في الحل العددي بخطوة

$$h = 1/12$$

الجدول(3): أكبر الأخطاء المطلقة على كامل مسار الحل العددي للمسألة(2).

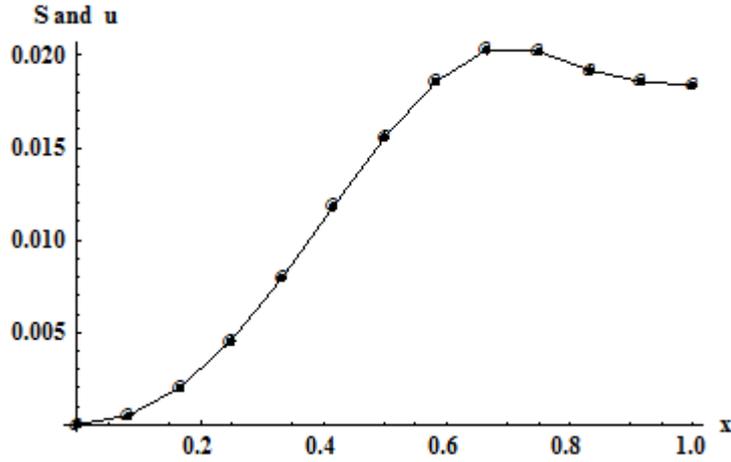
x_i	الحل العددي بطريقة RBF [8,2013]	الحل الدقيق للمسألة	الحل العددي بطريقتنا	الخطأ المطلق بطريقتنا المقترحة
0.1	0.00072504958690	0.00072603711810	0.0007260371181049	1.0842021 E-18
0.2	0.00290536784209	0.00290414847242	0.0029041484724196	4.3368086 E-18
0.3	0.00651038335789	0.00651360507585	0.006513605075847415	2.6020852 E-17
0.4	0.01105193964378	0.01105748825987	0.011057488259865751	6.9388939 E-16
0.5	0.01556193848997	0.01556533144116	0.015565331441162695	4.504141 E-15
0.6	0.01905677849423	0.01905044604835	0.01905044604835502	6.220451 E-15
0.7	0.02053284784996	0.02053013998469	0.020530139984692438	2.185751 E-15
0.8	0.01955135789349	0.01955230368928	0.0195523036892752	3.1225022 E-16
0.9	0.01867204968224	0.01867323762406	0.01867323762405505	3.46944695 E-17
1.0	0.01838334510084	0.01838021560231	0.018380215602315	0

الجدول(4): أكبر الأخطاء المطلقة على كامل مسار الحل العددي للمسألة(2).

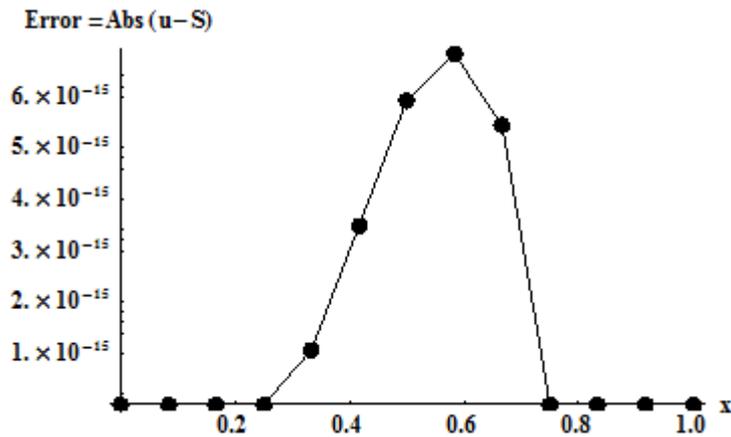
h	Quartic spline [10,2016]	Galerkin's finite element [9,2014]	Quartic non-poly. spline [3,2007]	Quintic Spline Collocation[6,2011]	طريقتنا المقترحة
1/16	1.19E-04	9.6663E-11	7.302E-07	5.8851E-09	2.1065187 E-15
1/32	2.97E-05	5.4816E-11	1.829E-07	7.3726E-10	4.902145 E-16
1/64	7.44E-05	-----	4.574E-08	9.0084E-11	6.2216659 E-17
1/128	1.27E-04	-----	1.143E-08	6.6687E-13	5.8942901 E-17

ملاحظة 2:

بمقارنة الحل العددي في الجدول(3) لطريقتنا المقترحة مع طريقة استيفاء RPF في [8] نجد أن طريقتنا أدق، كما ونجد بمقارنة أكبر الأخطاء المطلقة في الجدول(4) أفضلية طريقتنا على الطرائق في المراجع[3,6,9,10].



الشكل(5):الحل العددي بطريقتنا ●●●● مع الحل الدقيق — بتجزئة $n=12$.



الشكل(6):الخطأ المطلق في الحل العددي بطريقتنا بخطوة $h = 1/12$.

الاستنتاجات والتوصيات:

طورنا في هذا البحث تقنية عددية تستخدم كثيرات حدود شرانجية من المرتبة الثامنة مع خمس نقاط تجميع، طبقت لحل مسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية متعددة الحالات من المرتبتين الثانية والثالثة. بينت الدراسة التحليلية للاستقرار والتقارب أن التقنية المقترحة مستقرة ومتناسقة ومرتبة تقاربها الثامنة وترسم في المستوي العددي مساحات لانهائية من الاستقرار المطلق. كما أشارت النتائج العددية إلى فعالية ودقة التقنية المقترحة وتطابقها مع الحل التحليلي على كامل مجال الحل، كما ونجد بمقارنة نتائج طريقتنا مع نتائج بعض الطرائق الأخرى المختلفة إلى تفوق طريقتنا وأفضليتها. ولهذا نوصي بالآتي:

أولاً: استخدام التقنية المقترحة لحل مسائل القيم الحدية متعددة الحالات من المرتبتين الثانية والثالثة، وتطويرها لحل المسائل متعددة الحالات غير الخطية.

ثانياً: تطوير تقنيات مشابهة لحل مسائل القيم الحدية متعددة الحالات من المرتبة الرابعة.

المراجع:

- NOOR M.N. ; TIRMIZI S.I.A. *Numerical Method For Unilateral Problems*, .١
Journal of Computational and Applied Mathematics , Vol.(16), **1986**, pp.387-395.
- AL-SAID E.A. *Spline Solutions For System of Second-Order Boundary-Value Problems*, Intern. J. Computer Math. , Vol. 62, **1996**, pp.143-154. .٢
- SIRAJ-UL-ISLAM, I.A. TIRMIZI, ; M.A. KHAN, Quartic non-polynomial spline approach to the solution of a system of third-order boundary-value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 335, (2007), 1095-1104. .٣
- SIRAJ-UL-ISLAM, I. AZIZ, B. SARLER, *The Numerical Solution of Second-Order Boundary-Value Problems by Collocation Method With the Haar Wavelets*, Mathematical and Computer Modelling. 52 (2010), 1577-1590. .٤
- NOOR M. A., NOOR K., WAHEED A. ; AL-Said E.A. *An Efficient Method for Solving System of Third-Order Nonlinear Boundary Value Problems*, Hindawi, Mathematical Problems in Engineering Vol.11, **2011**, 1-14. .٥
- MAHMOUD S. M. *Quintic Spline Methods with Three Collocation Points for Solving Third-Order Boundary-Value Problems*, Mu'tah Lil-Buhth wad-Dirasat, Vol.26, No.1, **2011**, pp. 119-139. .٦
- LOGHMANI G. B.; F. MAHDIFAR; S. R. ALAVIZADEH, Numerical Solution of Obstacle Problems by B-Spline Functions, *American Journal of Computational Mathematics*, **2011**, 1, 55-62. .٧
- GAO F. ; CHI C. *Solution of Boundary Value Obstacle Problems Using MQ-RBE and IMQ-RBE*, Hindawi, Mathematical Problems in Engine. , Vol. **2013**, 2013. 1-7. .٨
- IQBAL S. ; AL KHALAF S. ; AL-MARASHI A. S. *Galerkin's Finite Element Formulation Using Hermite Polynomials For The Solution of A system of Third-Order obstacle Problems* ,Sci. Int. (Lahore), 25(5), **2014**, pp.1887-1890. .٩
- PANDEY P. K.. Solving third-order boundary value problems with quartic splines. *Pandey SpringerPlus*, Vol.5, 326 (2016), 1-10. .١٠
- HUSSEIN M. H. I. *Numerical Solutions For Handling Systems of obstacle Boundary Value Problems Using The RPS Method*, International Mathematical Forum, Vol. 12, No.14, **2017**, pp.651-663. .١١
- MAHMOUD S. M; ENJROO S.; DAHER H. N. *Numerical Solutions of liner Volterra Integro-Differential Equations of second kind by Spline collocation Function*, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (14) No. (3), **2019**, pp. 127-142. .١٢
- LIN J; Y. ZHANG ; CH.-S. LIU, *Solving Nonlinear Third-Order Three-Point Boundary Value Problems by Boundary Shape Functions Methods*. *Advances in Difference Equations*. Vol. 2021, 146 , 2021, 1-23. .١٣