

## دراسة عددية لبعض الحالات الخاصة لمسألة ثلاثة أجسام فلكية

محي الدين نظام \*  
نبيل جودية \*\*  
حمود العرابي \*\*\*  
حنان أمين \*\*\*\*

(تاريخ الإيداع ٢٠٢٠ / ٦ / ٦ . قُبل للنشر ٢٠٢١ / ٨ / ٤)

### الملخص

قمنا في هذا البحث بدراسة المسألة العامة لثلاثة أجسام فلكية ودراسة صيغها والتكاملات العشرة الكلاسيكية المرافقة وصيغة جاكوبي-لاگرانج، ودراسة حالات خاصة لمسألة ثلاثة أجسام من أجل كتل متساوية و هدفنا الرئيس هو تطوير برنامج يستطيع حساب مسارات الأجسام من خلال الشروط البدائية (المواضع والسرع) وبالاعتماد على معادلة الحركة الكلاسيكية ويستطيع هذا البرنامج رسم الطاقة (الكامنة والحركية والكلية)، باستخدام طريقتين عدديتين (طريقة رنج كوتا وطريقة أولر).

يمكن استخدام النتائج التي حصلنا عليها من هذه الدراسة لفهم مسألة ثلاثة أجسام ومناقشة قابلية الحل بطرق أولر ورنج كوتا والحلول العددية لبعض الحالات الخاصة لمسألة ثلاثة أجسام.

الكلمات المفتاحية: الصيغة الكلاسيكية، صيغة لاگرانج، صيغة جاكوبي، صيغة هاملتون وصيغة دولاناي، التكاملات الكلاسيكية، متطابقة لاگرانج و جاكوبي.

---

\*أستاذ في قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية  
\*\*مدرس في قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة دمشق - دمشق - سورية  
\*\*\* مدرس في قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة دمشق - دمشق - سورية  
\*\*\*\* طالبة دكتوراه في قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

## A numerical study of some special cases of the problem of three astronomical masses

.Mohey Aldin Nizam\*

Nabil Joudieh\*\*

.Hammoud ALorabi\*\*\*

Hanan Amin\*\*\*\*

(Received 6 / 6 / 2020 . Accepted 4 / 8 / 2021 )

### Abstract

In this research, we study the general problem of three astronomical bodies and study their formulations and the ten classical integrals and the lagrange-jacobi identity, and study a special cases of the 3-body problem for equal masses. The primary goal is to develop program which can calculate trajectories from Initial conditions (Positions and velocity) based on the classical equation of motion; The program will also plot Energy (potential, Kinetic (total), Using two numerical methods (Runge–Kutta and Euler's methods).

The obtained results from this study can be used to understand the problem of three bodies and discuss the solvability with Runge–Kutta and Euler's methods and numerical solutions of some special cases of three-body problem.

**Keywords:** the classical formulation, the lagrangian formulation, the jacobi formulation, the hamilton and delaunay formulation, the classical integrals, The Lagrange-Jacobi identity

---

\*Professor at department of physics, Faculty of science, Tishreen University, Lattakia, Syria

\*\*Assistant Professor at department of physics, Faculty of science, university of Damascus, Damascus, Syria

\*\*\*Assistant Professor at department of physics, Faculty of science, university of Damascus, Daascus, Syria

\*\*\*\* postgraduate student, department of physics, Faculty of science, Tishreen University, Lattakia, Syria

## مقدمة:

نشأت مسألة ٣ أجسام كما نعتبرها من أعمال نيوتن Newton في بداية القرن ال ١٧ وأقترح في الوقت نفسه، كيبler قوانينه الخاصة بحركة الكواكب والتي يصف فيها مدارات الكوكب حول الشمس والتي هي عبارة عن قطع ناقصه. صاغ نيوتن هذه الأفكار في عام ١٦٨٧ في عمله [1] وهو أحد أهم الأعمال في تاريخ العلم على وجه الخصوص صياغته لقانون يصف قوة الجاذبية بين أي كتلتين نقطتين بالعلاقة:

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$m_1, m_2$  كتلتين تبعدان مسافة  $r$  و  $G$ : ثابت الجاذبية العام .

حاول نيوتن دراسة أنظمة أكثر تعقيداً من نظام كوكب- الشمس، درس نظام شمس - أرض - قمر ومع ذلك كان عمله يعاني من صعوبات ولم يتم إحراز أي تقدم في هذه المسألة إلا بعد حياة نيوتن. حوّل في هذا الأثناء أولر Euler [2] انتباهه أيضاً إلى مسألة ثلاثة أجسام واقترح مسألة ثلاثة أجسام مقيّدة والتي هي تبسيط للمسألة العامة، حيث اعتبر كتلة الجسم الثالث مهملة وأن المدارات دائرية من أجل الكتلتين الأخرتين وعُرفت بمسألة ثلاثة أجسام لأولر "The Euler three body problem" واستخدم أيضاً اختلاف البارامترات لدراسة الاضطرابات للحركة الكوكبية.

أحرز أيضاً في هذه الأثناء، لاغرانج Lagrange [3] تقدماً كبيراً في مسألة ثلاثة أجسام عامة. حيث تضمنت مساهمات لاغرانج الرئيسية بنظرية اختصاراً للنظام من نظام ب ١٨ معادلة تفاضلية إلى نظام يحتوي ٧ معادلات ووصف نوعين في الحلول الخاصة للمسألة العامة. واستطاع بتطويره لميكانيك لاغرانج من تطوير مسألة ثلاثة أجسام والنظرية العامة للأنظمة الديناميكية.

أختصر جاكوبي Jacobi [4] المسألة العامة للنظام من المرتبة السادسة والمسألة المقيدة لنظام من المرتبة الرابعة، وأوجد ثابت الحركة المعروف باسمه تكامل جاكوبي وهو الكمية المحفوظة الوحيدة المعروفة للمسألة المقيدة. اقترح هيل Hill [5] في عام ١٨٧٨ تطبيقاً مفيداً لتكامل جاكوبي حيث يصف مناطق الحركة المحتملة وذلك من أجل الجسم ذو الكتلة المهملة.

مساهمة أخرى في نظرية المسألة كان دولاناي Charles Eugène Delaunay بأخذ التحويلات القانونية المتكررة للمسألة والتي تتطلب عدداً كبيراً من الحسابات استغرقت أكثر من عقدين لإكمال أساليب دولاناي [6] في عام ١٨٤٦ تم نشر طرائق دولاناي ولكن نتائجها النهائية لم يتم نشرها حتى عام ١٨٦٠-١٨٦٧ ، حيث نشرت في مجلدين ضخمين يحتوي كل مجلد على أكثر من ٩٠٠ صفحة وكانت إحدى هذه النتائج لهذا العمل إدخال متحولات دولاناي والتي تعطي معادلات الحركة عن طريق الهاملتوني.

تميزت نهاية الفترة الكلاسيكية للعمل على مسألة ثلاثة أجسام بالعمل المؤثر لبوانكاريه Henri Poincaré [7] في أواخر القرن ال ١٩. وعلى الرغم من أنه لم يحلّ المسألة إذ تضمن بحثه على خطأ رياضي أدى إلى استقرار خاطئ لجملة ثلاثة أجسام. بعد ذلك قام بنشر ورقة محدثة لتصحيح الخطأ، أثار من خلالها العديد من الأفكار المؤثرة التي أدت إلى تطوير نظرية الفوضى [8]، وغيرت الأفكار الأساسية للدراسة الرياضية للديناميك. قدم أيضاً مفهوم خريطة العودة الأولى، والتي تعرف الآن أيضاً باسم خريطة "بوانكاريه" [9].

في الواقع فإن المسألة لم يتم حلها حتى عام ١٩١٢ بواسطة ساندمان Sandman من أجل  $N=3$  ، ظلت الحالة العامة [10] بدون حلّ حتى عام ١٩٩١ ، عندما نشر وانغ Quidong Wang الحلّ الشامل لمسألة  $N$  جسم .

بعد أن تم وضع الكثير من الأسس من قبل بوانكاريه . Poincaré [11] شهد القرن العشرين تقدماً كبيراً في جبهات عديدة مختلفة. تم تحليل إصدارات مبسطة من مسألة ثلاثة اجسام مقيدة [12,13] على سبيل المثال. مسألة كوبنهاجن الذي افترض أن الكتلتين متساويتين [14] وقد درسها سترومغرن Strömghren وزملاؤه بالتفصيل منذ عام ١٩١٣.

طبق فالتونن Valtonen وكارتونن Karttunen طرقاً إحصائية [15] وتمت مقارنة هذه النتائج مباشرة مع القيم التجريبية، والتي يمكن تنفيذها بفضل انتشار أجهزة الكمبيوتر القوية في نهاية القرن العشرين.

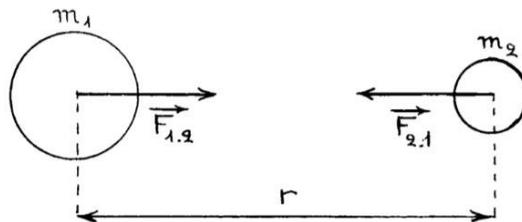
### أهمية البحث وأهدافه

تتم أهمية البحث بأنه يتناول موضوعاً هاماً ومازال العمل به قائم من قبل العلماء، والاستفادة من تطور أدوات التحليل العددي وتطور البرمجة في وضع عدة برامج لدراسة مسارات ثلاثة أجسام وإيجاد عدد من الحلول الخاصة لها بالإضافة لدراسة الطاقة لهذه الأجسام ومناقشة نظرية المسألة العامة وأيضاً للحلول الخاصة من خلال النتائج التي تم التوصل إليها من خلال طريقتين عدديتين ( طريقة رنج كوتا وطريقة أولر).

### طرائق البحث ومواده

الصياغة الدقيقة لمسألة ثلاثة أجسام:

لدينا كتلتين نقطتين  $m_1, m_2$  تبعدان بالمسافة  $r$  وينجذبان لبعضهما .



الشكل(١): قانون الجذب العام

حيث :

الكتلة  $m_1$  تعطي القوة  $\vec{F}_{1,2}$  والكتلة  $m_2$  تعطي القوة المعاكسة  $\vec{F}_{2,1}$  :

$$\|\vec{F}_{1,2}\| = \|\vec{F}_{2,1}\| = Gm_2 \cdot m_1 \cdot r^{-2} \quad (1)$$

$G$  هو ثابت الجاذبية العام، وهو يساوي  $6.672 \times 10^{-11} m^3/s^2 \cdot kg$ .

أظهر نيوتن أن القوى  $\vec{F}_{1,2}$  و  $\vec{F}_{2,1}$  تبقى كما هي إذا كان للكتل  $m_2, m_1$  تناظر كروي بدلاً من أن تكون كتل نقطية ( $r$  هي المسافة بين المراكز). إن معادلات مسألة ثلاثة أجسام لها أشكال عديدة؛ سننظر في الأكثر شيوعاً.

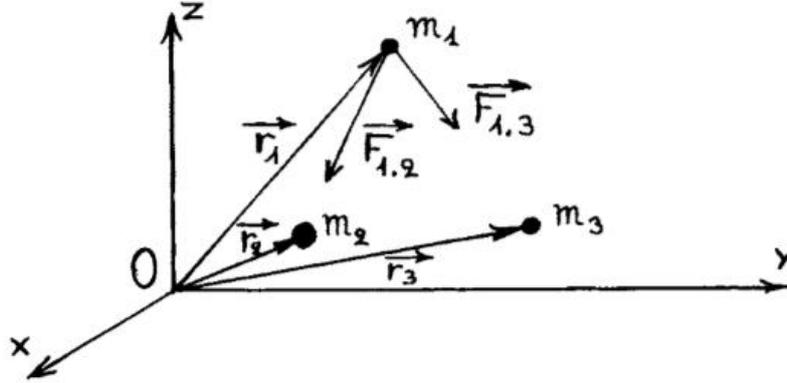
### الصياغة الكلاسيكية:

استخدمنا مجموعة من محاور Galilean وهي مجموعة من المحاور كما في الشكل (٢)، التي يكون فيها قانون العطالة هو القانون النيوتوني الكلاسيكي: التسارع = الكتلة/ القوة .

إذا كانت  $\vec{r}_1$  شعاع نصف القطر للكتلة  $m_1$  فإن السؤول عن معادلة الحركة لمسألة ثلاثة أجسام هو :

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21})}{m_1} \quad (2)$$

في هذه المعادلة، يكون البارامتر الذي يصف  $t$  هو الزمن المطلق لنيوتن، ندعوها ببساطة الزمن ، و  $\vec{F}_{1,2}$  و  $\vec{F}_{1,3}$  هي قوى الجاذبية للكتلة  $m_1$  باتجاه الكتل  $m_2$  و  $m_3$ .



الشكل (٢): الصياغة الكلاسيكية

يمكننا كتابة الشعاع  $\vec{r}_{ij}$  من الكتلة  $m_i$  إلى الكتلة  $m_j$  ونكتب طول الشعاع  $r_{ij}$ :

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i; r_{ij} = \|\vec{r}_{ij}\| \quad (3)$$

$$\|\vec{F}_{12}\| = Gm_1 m_2 / r_{12}^2 \quad (4) \quad \text{حيث}$$

وفي حال  $\vec{F}_{12}$  في اتجاه شعاع الوحدة  $\vec{r}_{12}/r_{12}$ :

$$\vec{F}_{12} = Gm_1 m_2 \vec{r}_{12} / r_{12}^3 \quad (5)$$

لقد توصلنا لمعادلات الحركة الكلاسيكية من أجل ثلاثة كتل، بتعميم العلاقة (٢) نجد:

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G(m_j \vec{r}_{ij} r_{ij}^{-3} + m_k \vec{r}_{ik} r_{ik}^{-3}) \quad ; i, j, k = (1,2,3) \quad (6)$$

تكتب هذه المعادلات الثلاثة عندما تكون الكتل لا متناهية في الصغر بالشكل:

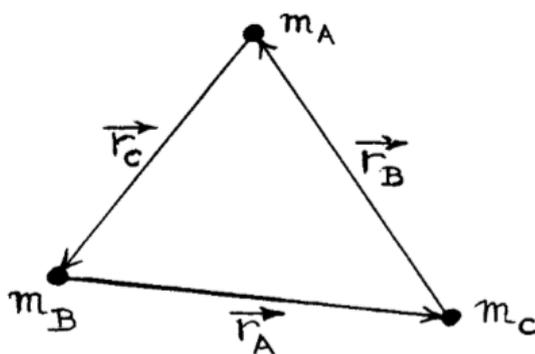
$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \quad ; i = ((1,2,3)) \quad (7)$$

$$U = \text{"potential"} = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \quad (8)$$

الصياغة اللاغرانجية:

إن المتحولات اللاغرانجية هي عبارة عن الأشعة  $\vec{r}_{12}, \vec{r}_{23}, \vec{r}_{31}$ . يتم تحديدها وفقاً لمؤشر الكتلة المقابلة في مثلث الأجسام الثلاثة. من أجل السهولة ، سوف ندعي الكتل الثلاثة  $m_A, m_B, m_C$  و الأشعة الثلاثة  $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{BC}, \vec{r}_B = \vec{r}_{CA} \text{ و } \vec{r}_C = \vec{r}_{AB}, \text{ مع ((٣)) الشكل}$$



الشكل (٣): المتحولات اللاغرانجية

طالما  $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  ، لدينا

$$d^2\vec{r}_{12}/dt^2 = d^2\vec{r}_2/dt^2 - d^2\vec{r}_1/dt^2 \quad (9)$$

من السهل استنتاج معادلات الحركة للاغرانج من المعادلات (٦).

$$\frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} = G \left( m_B \left( \frac{\vec{r}_B}{r_B^3} + \frac{\vec{r}_C}{r_C^3} \right) - (m_B + m_C) \frac{\vec{r}_A}{r_A^3} \right) \quad (10)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2} = G \left( m_C \left( \frac{\vec{r}_C}{r_C^3} + \frac{\vec{r}_A}{r_A^3} \right) - (m_C + m_A) \frac{\vec{r}_B}{r_B^3} \right) \quad (11)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = G \left( m_A \left( \frac{\vec{r}_A}{r_A^3} + \frac{\vec{r}_B}{r_B^3} \right) - (m_A + m_B) \frac{\vec{r}_C}{r_C^3} \right) \quad (12)$$

طبعاً مع :

$$\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C = 0 \quad (13)$$

$$r_A = \|\vec{r}_A\| ; r_B = \|\vec{r}_B\| ; r_C = \|\vec{r}_C\| \quad (14)$$

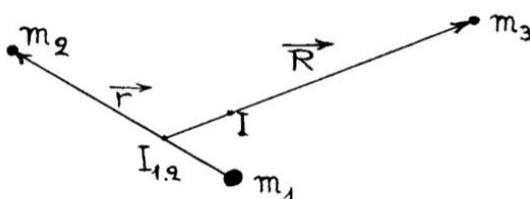
تكتب أحياناً معادلات الحركة اللاغرانجية (١٢)، (١١)، (١٠) بالشكل:

$$d^2\vec{r}_j/dt^2 = G(m_j\vec{W} - M\vec{r}_j r_j^{-3}) \quad : \quad j = (A, B, C) \quad (15)$$

$$\vec{W} = \vec{r}_A r_A^{-3} + \vec{r}_B r_B^{-3} + \vec{r}_C r_C^{-3} \quad (16)$$

$$M = m_A + m_B + m_C = \text{total mass.} \quad (17)$$

صياغة جاكوبي:



الشكل (٤): تحليل جاكوبي لمسألة ثلاثة أجسام

استخدم جاكوبي شعاعين رئيسيين: شعاع  $\vec{r}_{1,2}$  ويدعى الشعاع  $\vec{r}$  والشعاع  $\vec{R}$  من  $I_{1,2}$  (مركز الكتلة لـ

$m_1$  و  $m_2$ ) إلى  $m_3$  ، بالتالي  $\vec{R}$  تعبر من خلال  $I$  ، وهو مركز الكتلة الكلي .

نفرض مايلي :

$$m_1/m_1 + m_2 = \alpha ; \quad m_2/m_1 + m_2 = \beta \quad (18)$$

$$\alpha + \beta = 1 ; \quad \vec{r}_{13} = \vec{R} + \beta \vec{r} ; \quad \vec{r}_{23} = \vec{R} - \alpha \vec{r} \quad (19) \quad \text{أصبح لدينا :}$$

$$\vec{R} = \alpha \vec{r}_{13} + \beta \vec{r}_{23} \quad (20) \quad \text{وأيضاً :}$$

تصبح بالتالي من (١٠) و(١١) و(١٢) ، معادلات جاكوبي لمسألة ثلاثة أجسام هي :

$$d^2\vec{r}/dt^2 = -G(m_1 + m_2)r^{-3} \vec{r} + Gm_3(\alpha r_{13}^{-3} \vec{r}_{13} + \beta r_{23}^{-3} \vec{r}_{23}) \quad (21)$$

$$d^2\vec{r}/dt^2 = -GM(\alpha r_{13}^{-3} \vec{r}_{13} + \beta r_{23}^{-3} \vec{r}_{23}) \quad (22)$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 = \text{total mass} \quad (23) \quad \text{حيث}$$

عندما  $r/R$  صغيرة ( حالة القمر ) أو عندما  $(m_2 + m_3)/M$  ( حالة الكواكب ) يكون تحليل جاكوبي أكثر

موائمة . بسبب كون :

$$d^2\vec{r}/dt^2 = -G(m_1 + m_2)\vec{r}.r^{-3} \quad (24)$$

$$d^2\vec{R}/dt^2 = -GM\vec{R}.R^{-3} \quad (25)$$

سوف نسمي العناصر المدارية المتذبذبة المقابلة  $n_i, a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, M_i$  بالنسبة لـ المدار الداخلي inner"orbit" ( المدار لـ  $\vec{r}$  ) و  $n_e, a_e, e_e, i_e, \Omega_e, \omega_e, M_e$  للمدار الخارجي "exterior orbit" ( المدار لـ  $\vec{R}$  و  $m_3$ مع مراعاة  $I_{1.2}$  ).

تعرف هذه العناصر المدارية المتذبذبة من خلال التعبيرات الكبلرية المعتادة التالية.

$$\vec{v} = \vec{V}, \quad \text{هما متجهات السرعة:} \quad (26)$$

$$d\vec{r}/dt ; \quad \vec{V} = d\vec{R}/dt$$

أنصاف المحاور الرئيسية  $a_e, a_i$  تعطى بالشكل:

$$a_i = \left\{ \frac{2}{r} - \frac{v^2}{G(m_1 + m_2)} \right\}^{-1} ; \quad a_e = \left\{ \frac{2}{R} - \frac{V^2}{GM} \right\}^{-1} \quad (27)$$

تعطى  $n_i, n_e$  بالشكل:

$$n_i = \{G(m_1 + m_2)/a_i^3\}^{1/2} ; \quad n_e = \{GM/a_e^3\}^{1/2} \quad (28)$$

الانحرافات  $e_i, e_e$  تعطى بالشكل:

$$e_i = \left\{ 1 + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})^2 - r^2 v^2}{G(m_1 + m_2)a_i} \right\}^{1/2} ; \quad e_e = \left\{ 1 + \frac{(\vec{R} \cdot \vec{V})^2 - R^2 V^2}{GMa_e} \right\}^{1/2} \quad (29)$$

**THE HAMILTON AND DELAUNAY FORMULATION:** صياغة هاميلتوني وصياغة دولاناي:

وجد دولاناي مجموعة من البارامترات بحيث تكون معادلات ثلاثة أجسام للحركة لها شكل الهاملتوني.

نعرف الكتلتين المختزلتين  $m$  و  $\mu$  :

$$m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) ; \quad \mu = m_3 (m_1 + m_2) / M \quad (30)$$

تصبح، مع العناصر المدارية السابقة للمدارات الداخلية والخارجية لصيغة جاكوبي، عناصر دولاناي هي

$$\left. \begin{aligned} L_i &= m n_i a_i^2 & ; & \quad \ell_i = M_i \\ G_i &= m n_i a_i^2 \sqrt{1 - e_i^2} & ; & \quad g_i = \omega_i \\ H_i &= m n_i a_i^2 \sqrt{1 - e_i^2} \cos i_i & ; & \quad h_i = \Omega_i \end{aligned} \right\} \text{كالتالي:} \quad (31)$$

$$L_e = \mu n_e a_e^2 \quad ; \quad \ell_e = M_e$$

$$G_i = \mu n_e a_e^2 \sqrt{(1 - e_e^2)} \quad ; \quad g_e = \omega_e$$

$$H_e = \mu n_e a_e^2 \sqrt{(1 - e_e^2)} \cos i_e \quad ; \quad h_e = \Omega_e$$

$$H = -\frac{G^2 m^3 (m_1 + m_2)^2}{2L_i^2} - \frac{G^2 \mu^3 M^2}{2L_e^2} + Gm_3 \left( \frac{m_1 + m_2}{R} - \frac{m_1}{r_{1,2}} - \frac{m_2}{r_{2,3}} \right) \quad (32)$$

إن الهاملتوني  $H$  للمسألة هو تكامل الطاقة نفسه يكتب بالشكل:  
يجب كالعادة في المسائل الهاملتونية، التعبير عن الهاملتوني من حيث البارامترات المرافقة الاثني عشر  $L_i, G_i, h_e, \dots$ . إن القسم الأضعف من هذه الطريقة يكونها تعبر عن أطوال  $R, r_{1,2}, r_{2,3}$  تبعاً لبارامترات ديلوناي (*Delaunay*) وهذا أمر ليس سهلاً.

فيما يلي التعبيرات الهاملتونية المعتادة للمعادلات التفاضلية للحركة.

$$\begin{aligned} dL_i/dt &= \partial H / \partial \ell_i ; & dG_i/dt &= \partial H / \partial g_i ; & dH_i/dt &= -\partial H / \partial h_i ; \\ d\ell_i/dt &= \partial H / \partial L_i ; & dg_i/dt &= \partial H / \partial G_i ; & dh_i/dt &= \partial H / \partial H_i ; \\ dL_e/dt &= \partial H / \partial \ell_e ; & dG_e/dt &= -\partial H / \partial g_e ; & dH_e/dt &= -\partial H / \partial h_e ; \\ d\ell_e/dt &= \partial H / \partial L_e ; & dg_e/dt &= \partial H / \partial G_e ; & dh_e/dt &= \partial H / \partial H_e ; \end{aligned} \quad (33)$$

إن العديد من الصيغ الأخرى لمسألة ثلاثة أجسام ممكنة. تتنافس "إحداثيات مركزية الشمس" مع متحولات جاكوبي في حالة الكواكب، في حين تعتبر "معادلات لاجرانج الكوكبية" غالباً ماتعتبر أبسط من معادلات دولاناي.

تكاملات الحركة الكلاسيكية العشرة ومتطابقة لاغرانج وجاكوبي :

التكاملات الكلاسيكية هي تكامل مركز الكتلة (ست بارامترات)، تكامل العزم الزاوي (ثلاثة بارامترات) وتكامل الطاقة (بارامتر واحد).

تكامل مركز الكتلة:

$$\begin{aligned} \text{طالما } \vec{r}_{ij} &= -\vec{r}_{ji} \text{ فإن معادلات الحركة الكلاسيكية الثلاثة (6) تعطينا التعريف التالي:} \\ d^2(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3) / dt^2 &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \text{الشعاع } \vec{r}_I &= (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3) / M \text{ هو شعاع نصف القطر لمركز الكتلة وتكامل المعادلة} \\ \vec{r}_I &= \vec{A}t + \vec{B} \end{aligned} \quad (35) \quad (34)$$

مركز الكتلة لديه حركة مستقيمة منتظمة..

في معظم الحالات  $\vec{A}, \vec{B}$  يتم أخذها مساوية للصفر وبالنتيجة مجموعة المحاور هي "نظام إحداثيات مركز الكتلة". تكامل عزم الحركة:

تعطينا معادلات الحركة (6) تعريف ثانياً:

$$\sum_{j=1}^3 m_j \vec{r}_j \times (d^2 \vec{r}_j / dt^2) = 0 \quad (36)$$

نعتبر الأشعة  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  أشعة السرعة في حالة الصياغة الكلاسيكية وأيضاً نعتبر الأشعة  $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$  السرعة في حالة الصياغة اللاغرانجية.

$$\vec{v}_j = d\vec{r}_j / dt \quad ; \quad j = (1, 2, 3, A, B, C) \quad (37)$$

يمكن مكاملة المعادلة (36) للحصول على:

$$\vec{C} = \sum_{j=1}^3 m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j \quad (38)$$

يكون ثابت العزم الزاوي  $\vec{C}$  مهماً عندما يعبر عنه نظام مركز الكتلة، وهو مساوي للتعبير التالية في صيغ

لاغرانجيان، جاكوبي، دولاناي :

صياغة لاغرانج:

$$\vec{C} = \frac{m_A m_B m_C}{M} \left( \frac{\vec{r}_A \times \vec{v}_A}{m_A} + \frac{\vec{r}_B \times \vec{v}_B}{m_B} + \frac{\vec{r}_C \times \vec{v}_C}{m_C} \right) \quad (39)$$

صياغة جاكوبي (مع الكتل المختزلة المعطاة في (٣٠):

$$\vec{C} = m\vec{r} \times \vec{v} + \mu\vec{R} \times \vec{V} \quad (40)$$

$$\sqrt{(G_i^2 - H_i^2)} = K_i \quad ; \quad \sqrt{(G_e^2 - H_e^2)} = K_e \quad (41) \quad \text{صياغة دولاناي:}$$

لدينا:

$$\vec{C} = (K_i \sinh_i + K_e \sinh_e \quad ; \quad -K_i \cosh_i - K_e \cosh_e \quad ; \quad H_i + H_e) \quad (42)$$

إن المستوي الذي يحوي على مركز الكتلة هو مستوي ثابت، إذا كانت  $\vec{C} = 0$  و  $m\mu \neq 0$  ، تظهر المعادلة (٤٠) ان جميع الأشعة الأربعة  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{R}, \vec{V}$  تنتمي إلى المستوي نفسه وأن الحركة لثلاثة أجسام تبقى دائماً المستوي نفسه.

تكامل الطاقة:

إن هذا التكامل الشهير يملك التعبير التالي:

$$E = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2) - G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \quad (43)$$

ومن السهولة باستخدام المعادلات (٦)،(٧)،(٨) اثبات أنه اشتقاق  $dh/dt$  مساوي للصفر.

إذا تم التعبير عنها في نظام احداثيات مركز الكتلة ، تكون مساوية للتعبير التالية.

صيغة لاغرانج:

$$E = \frac{m_A m_B m_C}{M} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{v_A^2}{m_A} + \frac{v_B^2}{m_B} + \frac{v_C^2}{m_C} \right) - GM \left( \frac{1}{m_A r_A} + \frac{1}{m_B r_B} + \frac{1}{m_C r_C} \right) \right\} \quad (44)$$

صيغة جاكوبي:

$$E = \frac{1}{2} (m v^2 + \mu V^2) - G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \quad (45)$$

صياغة دولاناي:

إن الطاقة  $h$  مطابقة للهاملتوني  $H$  المكتوب في المعادلة (٣٢) ، يمكن التعبير عنه تبعاً لعناصر دولاناي الاثني عشر ولكنه معقد.

متطابقة لاغرانج وجاكوبي:

$$E = T - U \quad (46)$$

حيث:

$$T = \text{الطاقة الحركية} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 m_j v_j^2 = \frac{1}{2} (m v^2 + \mu V^2) \quad (47)$$

$$U = \text{الكامنة الطاقة} = G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \quad (48)$$

ومن جهة أخرى لدينا  $I$  عزم العطالة (في جملة إحداثيات مركز الكتلة) :

$$I = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) = \frac{m_1 m_2 m_3}{2M} \left( \frac{v_{12}^2}{m_3} + \frac{v_{13}^2}{m_2} + \frac{v_{23}^2}{m_1} \right) = \frac{1}{2}(mr^2 + \mu R^2) \quad (49)$$

لاحظ لاغرانج أن الاشتقاق الثاني لـ  $I$  له شكل بسيط (ووسع جاكوبي هذه الملاحظة لتشمل مسألة  $n$  جسم )

$$dI/dt = m_1 \vec{r}_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{r}_3 \vec{v}_3 \quad (50)$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \sum_{j=1}^3 m_j (v_j^2 + \vec{r}_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2}) = 2T - U \quad (51)$$

تقود هذه المعادلة مع المعادلة (٤٦) لشكل الاعتيادي لمتطابقة جاكوبي ولاغرانج:

$$d^2 I/dt^2 = U + 2E \quad (52)$$

أدت هذه المعادلات (٤٦) إلى (٥٢) إلى النتائج النوعية الأولى لمسألة ثلاثة أجسام.

*a.* حالة  $E < 0$

$$U = T - E \geq -E > 0 \quad (53) \quad \text{ترودنا (٤٦) و (٤٧):}$$

تم إعطاء  $U$  في (٤٨) ويشير الحد الأدنى الإيجابي  $(-E)$

$$\inf(r_{12}, r_{13}, r_{23}) \leq -\frac{G}{h}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) \quad (54)$$

وبالتالي إذا كانت تكامل الطاقة  $E$  سالبة ، فإن أصغر مسافة نسبية تظل محدودة و من المستحيل أن

تكون جميع المسافات النسبية  $r_{ij}$  أكبر من الطول المكتوب في الجانب الأيمن من (٥٤). لنجعل هذا الطول

$2a$  سوف نسميه "المحور الرئيسي المعمم".

*b.* حالة  $E \geq 0$

بمأن معادلة  $U > 0$  (٥٢) تقود إلى :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = U + 2E > 0 \quad (55)$$

عند الزمن البدائي  $t_1$  لدينا  $I = I_1$  ولدينا  $dI/dt = \dot{I}_1$  ويزودنا الشرط  $d^2 I/d^2 I > 2E$  عند

كل الأزمنة بحيث تكون الحركة معرفة بالشكل:

$$I \geq I_1 + \dot{I}_1(t - t_1) + E(t - t_1)^2 \quad (56)$$

إذا كانت  $E > 0$  أو  $\dot{I}_1 > 0$  فإن عزم العطالة لا يمكنه البقاء إلى الأبد محدود. هذا أيضاً في حالة  $E = 0$

و  $\dot{I}_1 \leq 0$ . بالإضافة  $d^2 I/d^2 I = U$  وعندما  $I$  محدود  $U$  يكون موجباً ومحدوداً بعيداً عن الصفر

. وبالتالي، إذا كانت تكامل الطاقة  $E$  موجباً أو صفر، فإن أكبر مسافة نسبية لا يمكن أن تظل محدودة إلى

الأبد ، ولكنها تذهب إلى اللانهاية مع  $t$  إذا ظلت الحركة معرفة إلى الأبد ؛ ويقال أن المدار المقابل "مفتوح".

### النتائج والمناقشة:

إن الدراسة التحليلية للجملة المكونة من ثلاثة أجسام لم تكتمل بعد، لذلك نلجأ إلى طرق التحليل العددي الذي

يمكننا من حساب بعض الحالات الخاصة لمسألة ثلاثة أجسام العامة.

نعتبر لدينا ٣ كتل  $m_i$  ( $i=1,2,3$ ) ومواقعها  $(\vec{r}_i)$  في جملة إحداثيات عطالية ديكارتية

نعرف شعاع الموضع النسبي

$$\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad ; i \neq j = \quad (57)$$

نضع معادلات الحركة باعتبار قوة نيوتن هي القوة الوحيدة المؤثرة على الأجسام:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \cdot \vec{r}_i \quad (58)$$

فنحصل على المعادلات التالية:

$$\frac{d^2 r_{1i}}{dt^2} = m_2 \cdot \left( \frac{r_{2i} - r_{1i}}{r_{12}^3} \right) + m_3 \left( \frac{r_{3i} - r_{1i}}{r_{13}^3} \right) \quad (59)$$

$$\frac{d^2 r_{2i}}{dt^2} = m_1 \cdot \left( \frac{r_{1i} - r_{2i}}{r_{21}^3} \right) + m_3 \left( \frac{r_{3i} - r_{2i}}{r_{23}^3} \right) \quad (60)$$

$$\frac{d^2 r_{3i}}{dt^2} = m_1 \cdot \left( \frac{r_{1i} - r_{3i}}{r_{31}^3} \right) + m_2 \left( \frac{r_{2i} - r_{3i}}{r_{32}^3} \right) \quad (61)$$

ويتم حساب الطاقة (الكامنة والحركية والكلية) من العلاقة

$$E = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2) - G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \quad (62)$$

يمثل القسم الأول من المعادلة (62) الطاقة الحركية ويمثل القسم الثاني الطاقة الكامنة للجلمة.

قمنا بدراسة هذه الجلمة باستخدام بيئة الـ (matlab) حيث تم كتابة عدة برامج فيه من أجل رسم مسار هذه الأجسام ورسم مخطط طاقتها (الحركية والكامنة والكلية) بتابعية الزمن حيث تم كتابة هذه البرامج (حساب المسار والطاقة) بطريقة رنج كوتا من الدرجة الرابعة (ode45) وأيضاً كتابة برامج مماثلة بطريقة أولر، وتم استخدام طريقة رنج كوتا لمقارنة الدقة في النتائج واختبار طريقة أولر وسلوكها على جلمة ثلاثة أجسام فلكية .

بداية لدينا في مسألة ثلاثة أجسام العامة ثلاث أجسام تتحرك بفراغ ثلاثي البعد تحت تأثير قوة الجاذبية المتبادلة فقط، حتى نتمكن من حل هذه المسألة، نحن بحاجة لمعرفة حركات الأجسام السابقة والمستقبلية ومن خلالها نستطيع تحديد المواقع والسرعات الحالية لذلك تم استخدام شروط بدء تجريبية للمواضع والسرعة وذلك لكل جسم أي لدينا  $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, v_{x_1}, v_{y_1}, v_{x_2}, v_{y_2}, v_{x_3}, v_{y_3})$  نفترض أن كتل الأجسام الثلاثة متساوية ومساوية للواحد وثابت الجاذبية العام  $G = 1$  وأن الحركة مستوية في المستوى  $(x, y)$ .

ننوه أنه تم الاعتماد على طريقة رنج كوتا من الدرجة الرابعة لمثل هكذا معادلات بالاعتماد على المرجع [16] والتأكد منها.

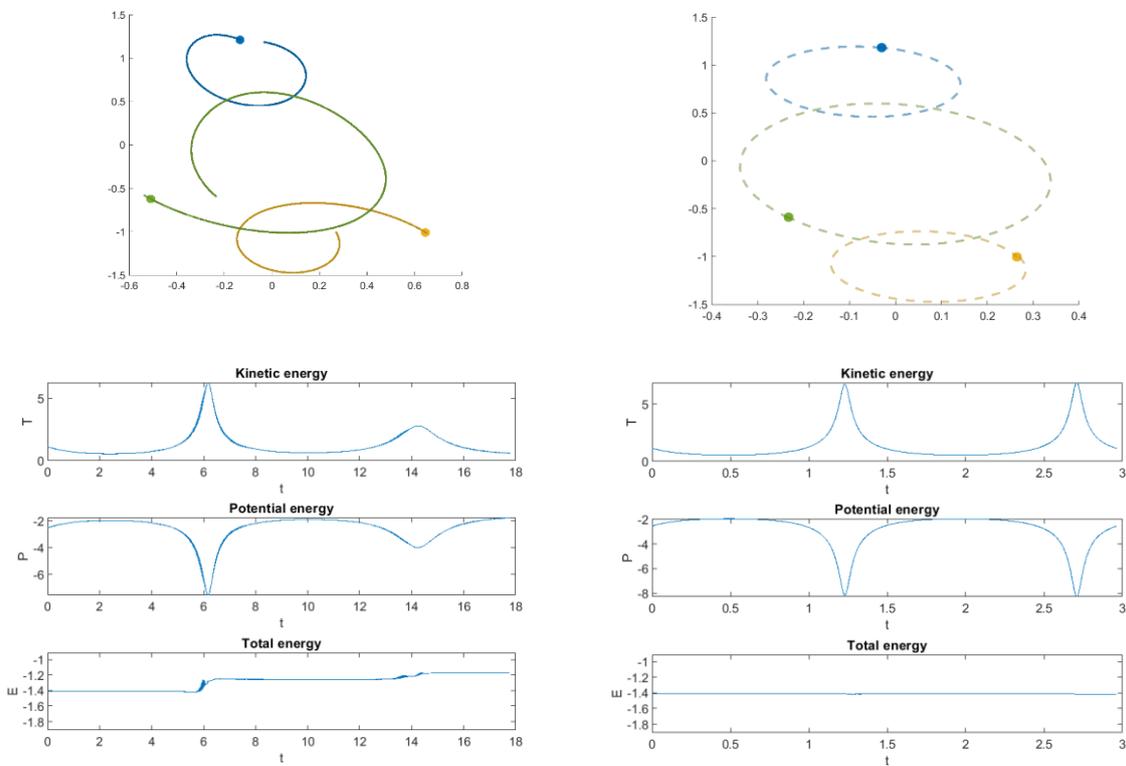
نورد فيما يلي النتائج التي تم التوصل لها:

وضعنا على الجهة اليمنى النتائج بطريقة رنج كوتا ووضعنا على الجهة اليسرى النتائج بطريقة أولر من أجل جميع الحالات الخاصة (المسارات والطاقة)، وفي جميع الأشكال المرسومة.

الحالة الأولى:

الجدول (1) شروط البدء للحالة الأولى:

$x_1$	-0.0347	$vx_1$	0.2495
$y_1$	1.1856	$vy_1$	-0.1076
$x_2$	0.2693	$vx_2$	0.2059
$y_2$	-1.0020	$vy_2$	-0.9396
$x_3$	-0.2328	$vx_3$	-0.4553
$y_3$	-0.5978	$vy_3$	1.0471



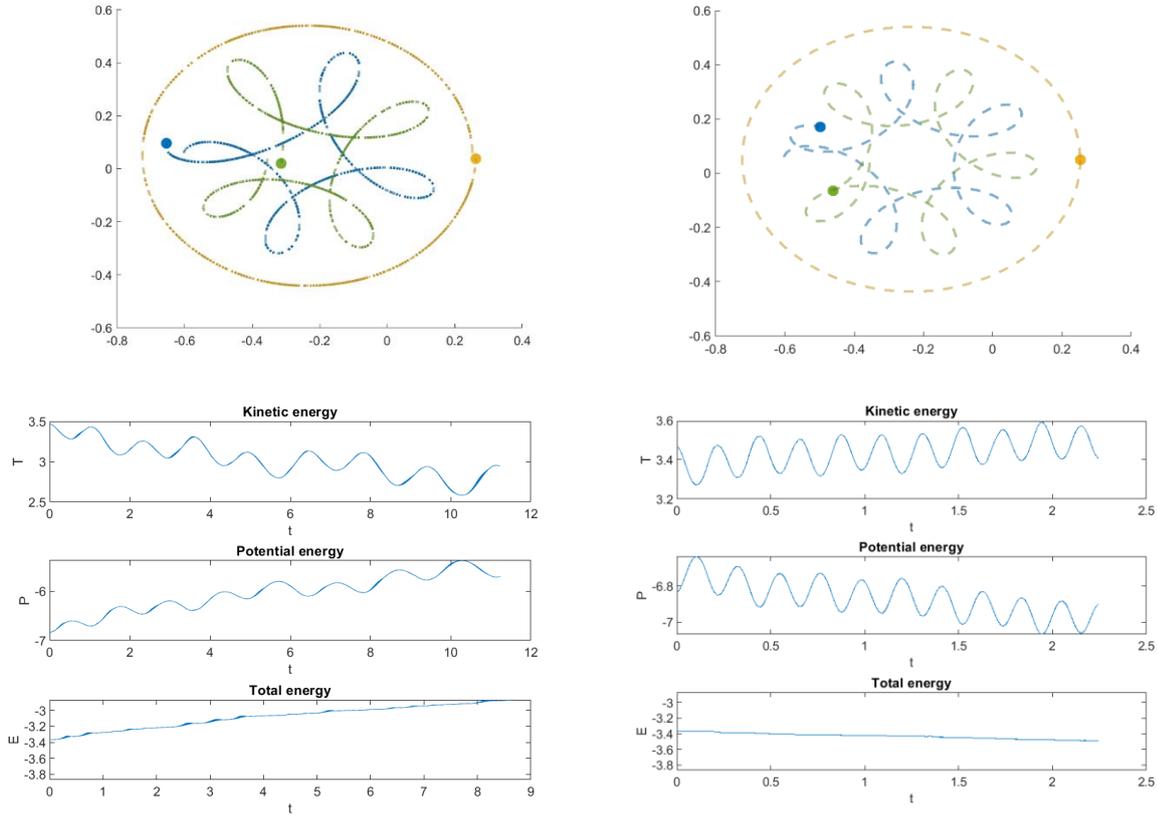
الشكل (٥)

لدينا في (الشكل على اليمين) طريقة رنج كوتا يبدو أن الأجسام الثلاثة ترسم قطوع ناقصة وأيضاً (في الشكل على اليسار) طريقة أولر لدينا ثلاثة مسارات أشبه بقطع ناقص ونلاحظ أن المسارات تبقى مغلقة في طريقة رنج كوتا بينما تكون مسارات مفتوحة في طريقة أولر ، وبالتالي مادام لدينا نسبة من الدورية في طريقة أولر فننتوقع أن تكون الطاقة غير مصانة، متعلقة بتطبيق أولر على الجمل الفيزيائية الدورية أو الهزارة فهي تخرق قانون مصونية الطاقة ولذلك نرى أن مخطط الطاقة بتابعية الزمن فهو ليس خطأ مستقيماً كما هو الحال في طريقة رنج كوتا وهذا يؤكد استنتاجاتنا.

الحالة الثانية:

الجدول (٢) شروط البدء للحالة الثانية:

$x_1$	-0.602885898116520	$vx_1$	0.122913546623784
$y_1$	0.059162128863347	$vy_1$	0.747443868604908
$x_2$	0.252709795391000	$vx_2$	-0.019325586404545
$y_2$	0.058254872224370	$vy_2$	1.369241993562101
$x_3$	-0.355389016941814	$vx_3$	-0.103587960218793
$y_3$	0.038323764315145	$vy_3$	-2.116685862168820



الشكل (٦)

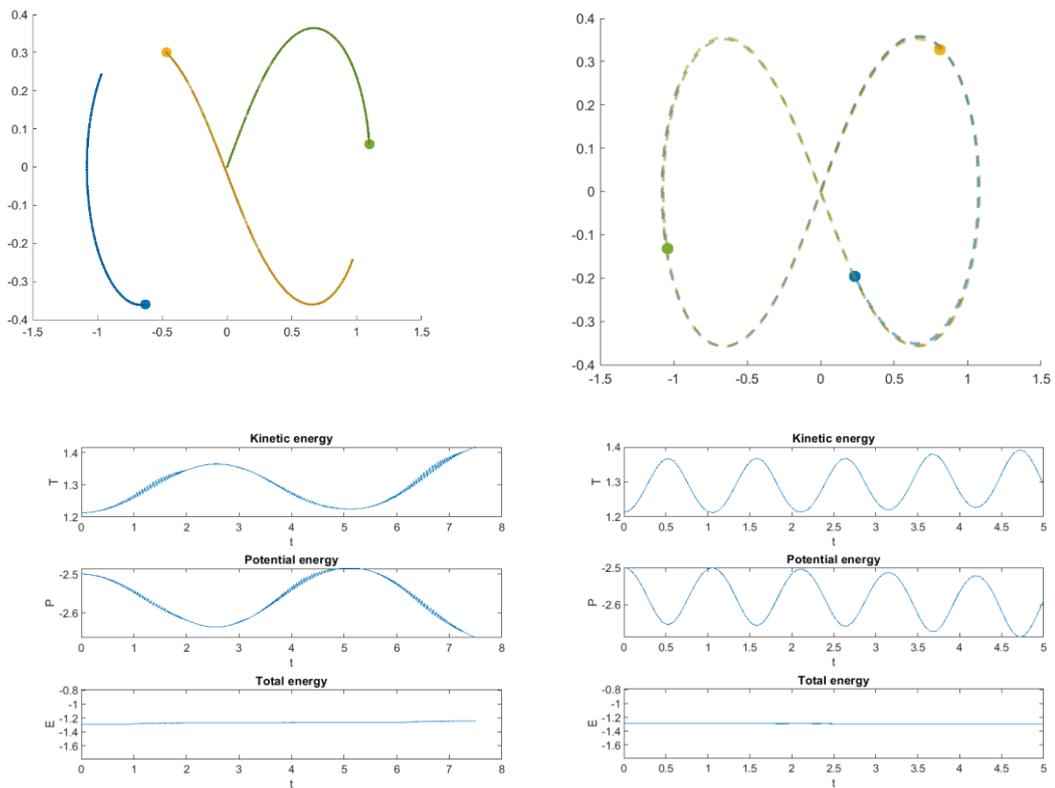
في طريقة رنج كوتا يبدو أن الجسم الخارجي يرسم شكل أشبه بقطع ناقص وأيضاً في أولر لدينا شكل أشبه بقطع ناقص في كلا الحالتين لدينا مسار مغلق والجسمين الداخليين يقومان بحركة دورية في كلا الطريقتين على شكل بتلات، أصبح لدينا حركة دورية للأجسام الثلاثة في كلا الطريقتين ، مادام لدينا حركة دورية في طريقة أولر فننتوقع أن تكون الطاقة غير مصانة، وتابع الطاقة يؤكد تحليلنا.

الحالة الثالثة:

الجدول (3) شروط البدء للحالة الثالثة :

$x_1$	-0.97000436	$vx_1$	$-0.5*0.93240737$
$y_1$	0.24308753	$vy_1$	$-0.5*0.86473146$
$x_2$	0.97000436	$vx_2$	$-0.5*0.93240737$
$y_2$	-0.24308753	$vy_2$	$-0.5*0.86473146$
$x_3$	0	$vx_3$	0.93240737
$y_3$	0	$vy_3$	0.86473146

الجدول (3)



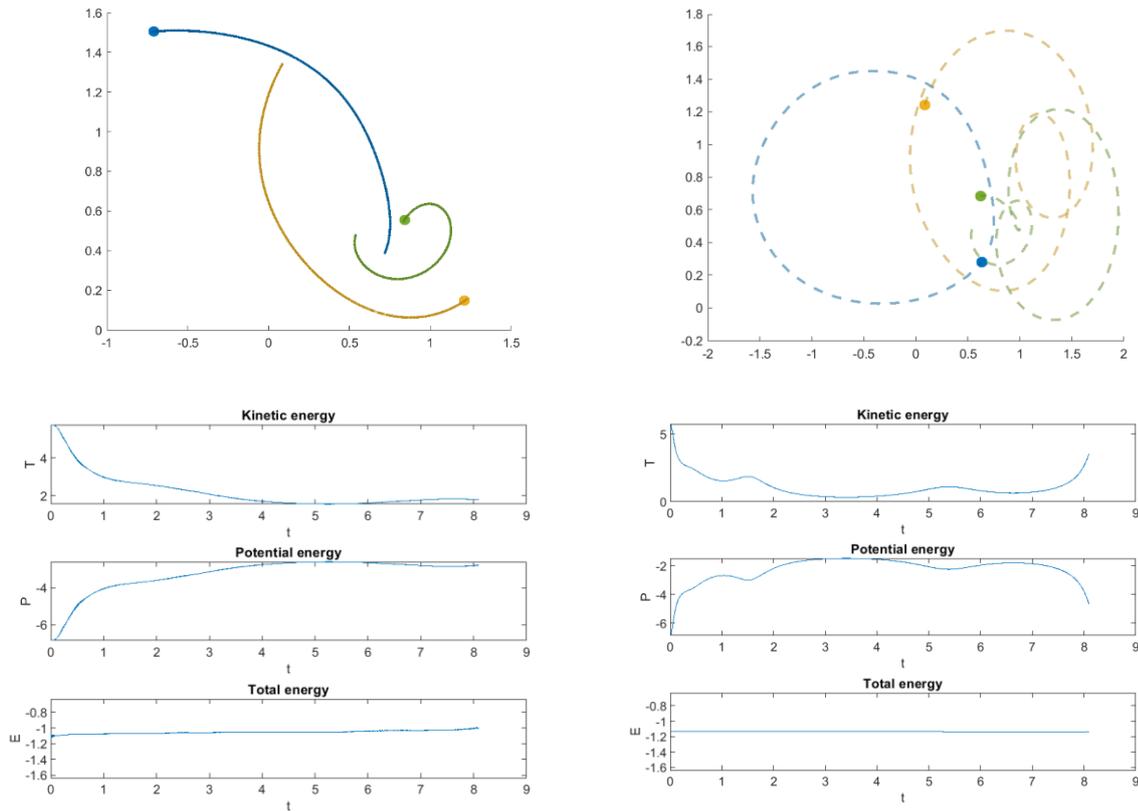
الشكل (7)

كما نلاحظ من الشكل أنه يوجد اختلاف كلي بين أولر على اليسار ورنج كوتا على اليمين حيث الشكل يشبه رقم ثمانية ولكن المسارات في أولر لاتظهر دورية وبالتالي تبقى الطاقة مصانة فيها ولذلك نرى أن مخطط الطاقة بتابعية الزمن يبقى مصان كما هو الحال في طريقة رنج كوتا .

الحالة الرابعة:

الجدول (٤) شروط البدء للحالة الرابعة:

$x_1$	0.716248295712871	$vx_1$	1.245268230895990
$y_1$	0.384288553041130	$vy_1$	2.444311951776573
$x_2$	0.086172594591232	$vx_2$	0.675224323690062
$y_2$	1.342795868576616	$vy_2$	-0.962879613630031
$x_3$	0.538777980807643	$vx_3$	-0.570043907205925
$y_3$	0.481049882655556	$vy_3$	-1.481432338146543



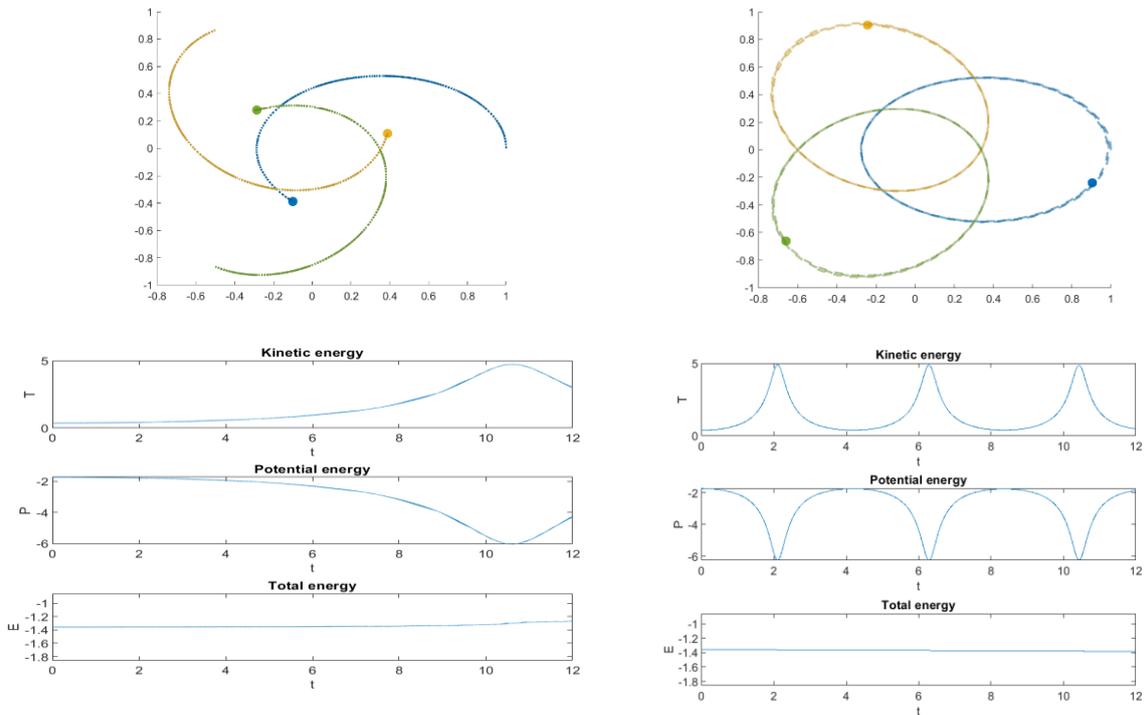
الشكل (٨)

المسارات هنا مختلفة بالطريقتين والمسارات في أولر لا تظهر دورية أيضا فتابع الطاقة الكلية يبقى تقريبا مضافا ولدينا الحركة دورية والطاقة مضافا في طريقة رنج كوتا

الحالة الخامسة

الجدول (٥) شروط البدء للحالة الخامسة:

$x_1$	1	$vx_1$	0
$y_1$	0	$vy_1$	0.5
$x_2$	-0.5	$vx_2$	0.4330127019
$y_2$	0.8660254038	$vy_2$	-0.25
$x_3$	-0.5	$vx_3$	0.4330127019
$y_3$	-0.8660254038	$vy_3$	-0.25



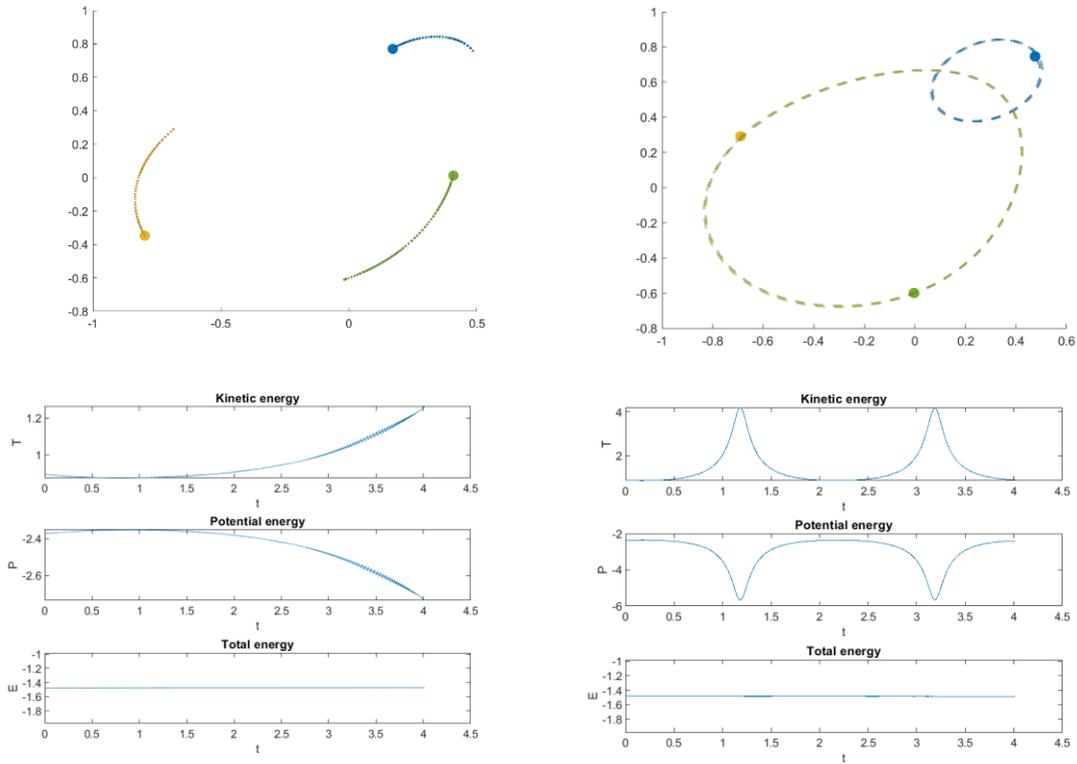
الشكل (٩)

لدينا الأجسام في طريقة رنج كوتا ترسم ثلاثة قطوع ناقصة بينما حركة هذه الأجسام تكون غير دورية في طريقة أولر وليس لها شكل معين وتبقى الطاقة مصادنة في كلا الحالتين.

## الحالة السادسة

الجدول (٦) شروط البد للحالة السادسة:

$x_1$	0.486657678894505	$vx_1$	-0.182709864466916
$y_1$	0.755041888583519	$vy_1$	0.363013287999004
$x_2$	-0.681737994414464	$vx_2$	-0.579074922540872
$y_2$	0.293660233197210	$vy_2$	-0.748157481446087
$x_3$	-0.022596327468640	$vx_3$	0.761784787007641
$y_3$	-0.612645601255358	$vy_3$	0.385144193447218



الشكل (١٠)

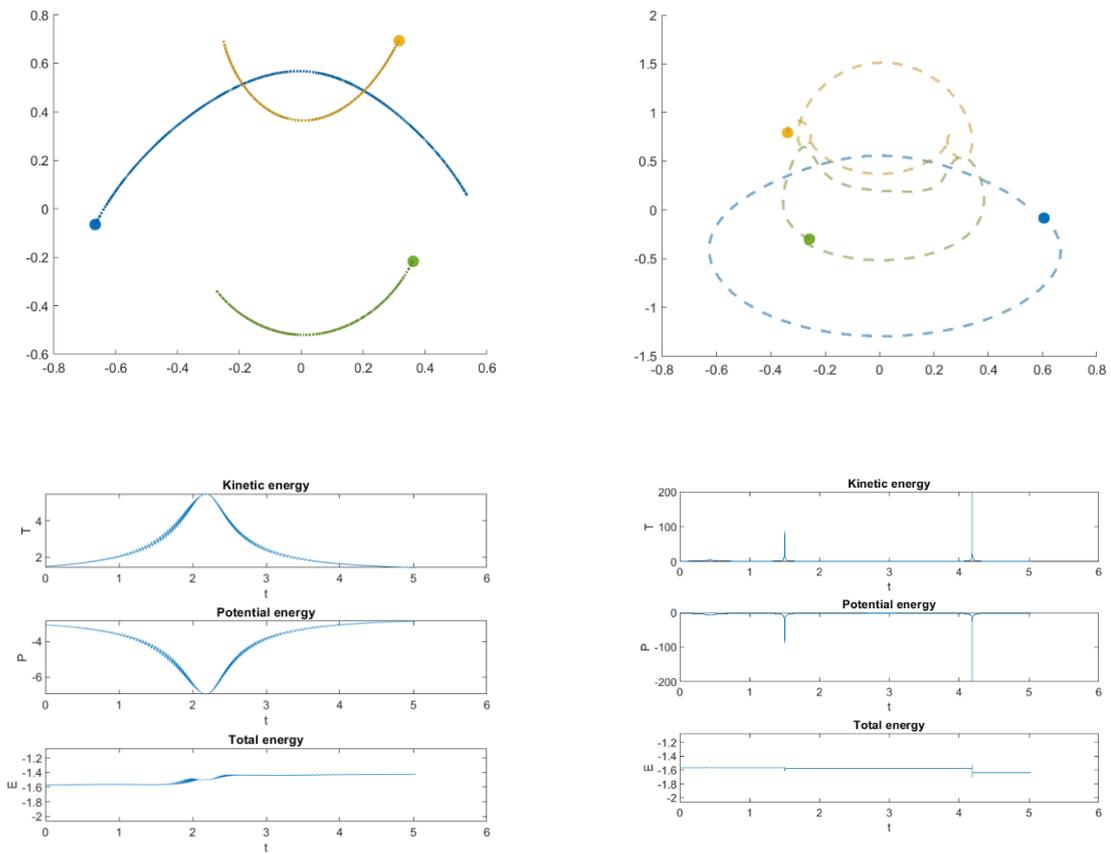
أيضا لدينا اختلاف في المسارات بين الطريقتين وتكون المسارات غير دورية في أولر وتبقى الطاقة مصانة في كلا الطريقتين.

## الحالة السابعة

الجدول (٧) شروط البدء للحالة السابعة:

$x_1$	0.536387073390469	$vx_1$	-0.569379585580752
$y_1$	0.054088605007709	$vy_1$	1.255291102530929
$x_2$	-0.252099126491433	$vx_2$	0.079644615251500
$y_2$	0.694527327749042	$vy_2$	-0.458625997341406
$x_3$	-0.275706601688421	$vx_3$	0.489734970329286
$y_3$	-0.335933589317989	$vy_3$	-0.796665105189482

الجدول (٧)



الشكل (١١)

تظهر النتائج في هذه الحالة أيضاً مشابهة للحالة السابقة، يبدو الاختلاف واضح بين الطريقتين ولا تظهر الدورية في طريقة أولر لذلك تبقى الطاقة تقريباً مصادنة فيها.

### الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا بدراسة عددية (باستخدام طريقة رنج كوتا وطريقة أولر) لها حيث قمنا بوضع عدة برامج في بيئة الـ matlab لايجاد مسار هذه الأجسام من خلال قيم تجريبية لمواضعها وسرعاتها وايضاً أيجاد طاقتها ورسم منحنيات الطاقة (الكامنة والحركية والكلية) بالطريقتين. في معظم الحالات تم خرق قانون مصونية الطاقة في طريقة أولر إذاً هي طريقة تقريبية جداً وغير دقيقة وبشكل خاص من أجل الجمل الدورية ( نواس - هزاز توافقي - المدارات ) ولم تتم دراسة سابقة لمثل هكذا جمل بطريقة أولر وحصلنا على مسارات مفتوحة بينما الطاقة كانت مصادرة في طريقة رنج كوتا وتم الحصول على مسارات مغلقة.

نوصي بإجراء دراسات بطرق عددية أخرى تغني البحث وقد تمكنا من التوصل لنتائج أدق وأفضل.

### المراجع:

1. HINTZ, G. 2015, *Orbital Mechanics and Astrodynamics*, Astronautical Engineering Department University of Southern California, 399.
2. SUCARRAT, E. 2012, *The Full Problem of Two and Three Bodies: Application to Asteroids and Binaries*, Surrey Space Centre, UK, 180.
3. GHAZY, M. 2010, *Analytic Construction of Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem*. Old Dominion University, 261.
4. KOON, W. 2011, *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*, California Institute of Technology, 327.
5. MUSIELAK, Z.E. ; QUARLES, B. 2015, *The three-body problem*, Department of Physics, The University of Texas at Arlington, 68.
6. LACOVERIS, A. 2016, *Practical Astrodynamics*. Springer Aerospace Technology, Italy, 1320.
7. LI, X; LIAO, S. 2017, *More than six hundred new families of Newtonian periodic planar collisionless three-body orbits*, Science China Press and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 7.
8. BATE, R; MUELLER, D; White, J. 1971, *FUNDAMENTALS OF ASTRODYNAMICS*, United States Air Force Academy, New York, 470.
9. GRUTZELIUS, J, H., 2004, *The Three Body Problem*, Karlstad University, 12.
10. CHENCINER, A. 2012, *Poincaré and the Three-Body Problem*, Département de mathématique, Université Paris VII, 89.
11. POINCARÉ, H. 2017, *The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics* Translated by Bruce D. Popp, Springer International Publishing AG, 265.
12. GEIGES, H. 2016 *The Geometry of Celestial Mechanics*, Cambridge University Press, 350.
13. STONE, N; LEIGH, N. 2019, *A statistical solution to the chaotic, non-hierarchical three-body problem*, Columbia Astrophysics Laboratory, Columbia University, USA, 10.
14. WORTHINGTON, J. 2012, *A Study of the Planar Circular Restricted Three Body Problem and the Vanishing Twist*, An essay submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of B.Sc. (Honours), Applied Mathematics University of Sydney, 98.

15. VALTONEN, M ; KARTTUNEN, H. 2005,*THE THREE-BODY PROBLEM*, Vaisala Institute for Space Physics and Astronomy, University of Turku, 365.

16. PRESS, W. H; S. A. *Teukolsky numerical recipes*. 2<sup>nd</sup> edn. (Cambridge University Press , 1997). PP 347–383, 707–714.