مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (5) 2021

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (5) 2021

# دراسة الترابط وفق مفهوم المجموعات قبل المفتوحة

د. عائدة صائمة*

د. عدنان ظريف**

ريم نعمه***

(تاريخ الإيداع 9/ 3/ 2021– تاريخ النشر 25/ 10/ 2021)

□ ملخّص □

نقدّم في هذا البحث نوعاً جديداً من الفضاءاتِ المُترابطةِ هو الفضاءُ قبل المُترابطِ، وذلك بالاستفادةِ من المجموعةِ قبل المفتوحةِ (pre – open set)، والتي عرّفها الباحث علي مشهور وآخرون في عام ١٩٨٢، ثم نقدّم دراسةً لبعضِ خصائصِ الفضاءِ قبل المُترابطِ.

الكلمات المفتاحية: مجموعة قبل مفتوحة، فضاء مُترابط، فضاء قبل مُترابط.

---

*مُدرّسة – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس.

** أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين.

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (5) 2021

**Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (5) 2021**

# Studying connectedness by concept of Pre-open sets

**Dr.Aaeda Saema***
**Dr.Adnan Zaref****
**Reem Neame*****

**(Received 9/3 /2021.Accepted 25/10/2021)**

**□ABSTRACT □**

In this paper, we present a new type of connectedness in topological space, which is the pre-connectedness, by making use of the pre-open set, which was defined by the researcher A.S. Mashhour and all in 1982, and then we present a study of some characteristics of the pre-connectedness.
Keywords: pre- open set, connected space, pre- connected space.

---

* Lecturer, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University.
** Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University.
*** Master student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University.

## مقدّمة:

يُعدّ الترابط أحد الخصائص التبولوجية الأساسية التي تُستخدم في تمييز الفضاءات التبولوجية، حيث لا يمكن تمثيل الفضاء المُترابط على شكل اجتماع منفصل لإثنين أو أكثر من المجموعات المفتوحة غير الخالية.

نظراً لدور الترابط المهم تم إيجاد أنماط متعددة من الترابط مثل: شبه الترابط، شبه الترابط من النوع *، قبل الترابط، وغيرها من الأنماط.

## أهميّة البحث وأهدافه:

ينتمي هذا البحث إلى مجال التبولوجيا العامة، والهدف منه هو دراسةُ بعضِ المفاهيم الجديدة في الفضاءات التبولوجية باستخدام مفهوم المجموعات قبل المفتوحةِ بدلاً من المجموعات المفتوحةِ، مما نتجَ عن ذلكَ إحداثُ بنيةٍ جديدةٍ للفضاءات التبولوجية تختلف عن بنية الفضاءاتِ التبولوجية المعروفة.

## طرائق البحث ومواده:

يعتمد هذا البحث في مجال الرياضيات البحتة على مفهوم المجموعات قبل المفتوحة في الحصول على نتائج جديدة متعلقة بالترابط في الفضاءات التبولوجية.

**تعاريف ونتائج مساعدة:**

**تعريف (1) [5]: المجموعة قبل المفتوحة (pre-open set):**

يقال عن مجموعة $A$ إنّها مجموعة قبل مفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X,\tau)$ إذا تحققتِ العلاقة:

$A \subseteq Int\big(cl(A)\big)$ ، ويرمزُ لأسرةِ جميع المجموعات قبل المفتوحةِ بالرمز *Po(X)*.

**تعريف (2) [1]: المجموعة قبل المُغلقة (pre-closed set):**

إنّ متممة المجموعة قبل المفتوحة تُدعى مجموعة قبل المُغلقة ويرمز لأسرةِ جميعِ المجموعات قبل المُغلقة بالرمز *Cp(X)*.

**تعريف (3) [1]: قبل لصاقة المجموعة المفتوحة (pre-closure set):**

لتكن $A$ مجموعةً جُزئيةً من الفضاءِ التبولوجي $(X, \tau)$، يسمى تقاطع كل المجموعات قبل المفتوحة الحاوية على المجموعة $A$: قبل لصاقة المجموعة $A$ ويرمز لها بالرمز $Cl_p(A)$.

**ملاحظة (1) [2]:** تقاطع مجموعتين قبل مفتوحتين في فضاء تبولوجي $(X, \tau)$ ليس بالضرورة مجموعة قبل مفتوحة.

**مثال (1) [2]:**

لتكن: $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

$$po(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}\}.$$

إذا أخذنا مجموعتين قبل مفتوحتين مثل $A = \{a, b, c, e\}$، $B = \{a, b, d, e\}$ عندئذٍ $A \cap B$ ليست مجموعة قبل مفتوحة.

**نتيجة (1) [2]:** إذا كانت $A$، $B$ مجموعتين جزئيتين من فضاءٍ تبولوجي $(X, \tau)$ بحيث $A$ مجموعة مفتوحة و$B$ مجموعة قبل مفتوحة عندئذٍ: $A \cap B$ مجموعة قبل مفتوحة.

**نتيجة (2) [2]:** إذا كانت $\{A_{i\ ;\ i \in I}\}$ أسرةٌ من المجموعاتِ قبل المفتوحةِ في الفضاءِ التبولوجي $(X, \tau)$ عندئذ $\bigcup_{i \in I} A_i$ هي مجموعةٌ قبل مفتوحةٍ في $X$.

**نتيجة (3) [2]:** يقال عن المجموعة الجزئية $A$ من الفضاءِ التبولوجي $(X, \tau)$ أنها مجموعة قبل مفتوحة، اذا وفقط وجدت مجموعة مفتوحة مثل $G$ تحقق: $A \subseteq G \subseteq cl(A)$.

**ملاحظة (2) [5]:** كلُّ مجموعةٍ مفتوحةٍ في الفضاءِ التبولوجي $(X, \tau)$ هي مجموعةٌ قبلَ مفتوحةٍ لكن العكسَ ليس صحيحاً بالضرورة.

**ملاحظة (3)[9]** :لا تشكل أسرة المجموعات قبل المفتوحة تبولوجيا في الحالة العامة.

**مثال (2)[9] :**

ليكن لدينا الفضاء التبولوجي $(X, \tau)$ حيث أن:

$X = \{1,2,3\}$  $\tau = \{X, \emptyset, \{2,3\}\}$

$$Po(X) = \{X, \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2\}\}$$

نلاحظ أن $\{1,3\} \cap \{1,2\} = \{1\} \notin Po(X)$.

ومنه فإن $Po(X)$ لاتشكل تبولوجيا على $X$.

**نتيجة (4)[9]** : إن تقاطع مجموعتين قبل مغلقتين في أي فضاء تبولوجي هو مجموعة قبل مغلقة.

**نتيجة (5)[2]** : لتكن $A, B$ مجموعتين جزئيتين من فضاءٍ تبولوجي $(X, \tau)$ ، إذا كانت $A$ مجموعة قبل مغلقة عندئذٍ: $Cl_p(A \cap B) \subseteq A \cap Cl_p(B)$.

**نتيجة (6)[4]** :ليكن $X$ فضاء تبولوجي عندئذ القضايا الآتية محققة:

١. $X$ فضاء قبل مترابط.
٢. $X$ لا يمكن التعبير عنه كاجتماع لمجموعتين قبل مغلقتين غير خاليتين.
٣. المجموعتان الوحيدتان قبل المغلقتين و قبل المفتوحتين بآن واحد هما $X, \emptyset$.

**تعريف (4) [3]:** يقالُ عن الفضاءِ التبولوجي $(X, \tau)$ أنهُ فضاءٌ مترابطٌ إذا لم توجد مجموعتان مفتوحتان في $(X, \tau)$ مثل $T$ , $G$ تحققان: $X = T \cup G$ , $T \cap G = \emptyset$ , $G \neq \emptyset$ , $T \neq \emptyset$.

**مثال (3):** إذا كانت $X$ مجموعة غير منتهية كيفية و$\tau$ تبولوجيا المتممات المنتهيةِ المُعرّفةِ على $X$ فإن الفضاءَ

$(X , \tau)$ مترابطٌ.

وذلكَ لأنّهُ لو فرضنا جدلاً أنَّ $(X, \tau)$ فضاءٌ غيرُ مُترابطٍ عندئذٍ: توجدُ مجموعتان مفتوحتان مثل $T,G$ تحققان

$$T \neq \emptyset \ , \quad G \neq \emptyset \ , \ T \cap G = \emptyset \ , \ X = T \cup G$$
$$X \backslash (T \cap G) = X \backslash \emptyset \Longrightarrow (X \backslash T) \cup (X \backslash G) = X$$

وبما أنَّ $T \neq \emptyset$ , $G \neq \emptyset$ فإنَّ $X \backslash T$ مجموعةٌ منتهيةٌ و$X \backslash G$ مجموعةٌ منتهيةٌ فإنَّ $(X \backslash T) \cup (X \backslash G)$ مجموعةٌ منتهيةٌ بالتالي حسبَ العلاقةِ السابقةِ تكونُ $X$ مجموعةً منتهيةً وهذا مخالفٌ للفرض حسب كون $X$ مجموعةً غير منتهيةٍ، وسببُ التناقضِ أنَّ الفضاءَ $(X, \tau)$ غير مترابطٍ بالتّالي $(X, \tau)$ هو فضاءٌ مترابطٌ.

**تعريف (6) [6]:** يقالُ عن الفضاءِ التبولوجي أنّه فضاءٌ قبل مترابطٍ إذا لم توجد مجموعتان قبل مفتوحتين في $(X, \tau)$ مثل $T,G$ تحققان: $X = T \cup G$ , $T \cap G = \emptyset$ , $G \neq \emptyset$ , $T \neq \emptyset$

**ملاحظة (4) [4]:** كلُّ فضاء قبل مترابطٍ هو فضاءٌ مترابطٌ لكن العكسَ ليس صحيحاً بالضرورة.

**مثال (4):**

لتكن: $X = \{a, b, c\}$

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$$

$(X, \tau)$ فضاءٌ مترابطٌ لأنَّه لا يمكن التعبير عن $X$ كاجتماعٍ لمجموعتين مفتوحتين.

$$Po(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$$

لكنَّ الفضاءَ $(X, \tau)$ ليسَ فضاءً قبل مترابطٍ لأنَّهُ يمكن التعبير عن $X$ كاجتماعٍ لمجموعتين قبل مفتوحتين مثل $\{b\} \cap \{a, c\}=\{a,b,c\}=X$.

**ملاحظة (5) [7]:** إذا كانت $A$ مجموعةً قبل مترابطةٍ كيفيةٍ من فضاءٍ تبولوجي $(X, \tau)$ وكانت $B$ مجموعةً أُخرى من الفضاءِ $(X, \tau)$ بحيثُ أنَّ $A \subseteq B \subseteq cl_p(A)$ عندئذٍ تكونُ المجموعةُ $B$ قبل مترابطةٍ أيضاً.

**تعريف (6) [8]: الدالة قبل المستمرة (pre−continuous Function):**

يقالُ عن الدالةِ $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$ أنَّها قبل مستمرةٍ:

إذا كانت الصورة العكسية لكلّ مجموعةٍ مفتوحةٍ في الفضاءِ $(Y, \tau^*)$ هي مجموعةٌ قبل مفتوحةٍ في الفضاءِ $(X, \tau)$.

## النتائج والمناقشة:

**مبرهنة** (1): لتكن $\{A_{i;i\in I}\}$ أسرةً من المجموعاتِ قبل مترابطة بحيث $\cap A_i \neq \emptyset ; i \in I$ عندئذٍ تكون $A = \cup A_{i;i\in I}$ مجموعةً قبل مترابطة.

**البرهان:** لنفرض جدلاً أنَّ $A = \cup A_{i;i\in I}$ليست مجموعةً قبل مترابطةٍ عندئذٍ: توجدُ مجموعتان قبل مفتوحتين مثل $T,G$ غير خاليتين بحيث:

$$A \cap T \neq \emptyset \ \ , A \cap G \neq \emptyset \ , \ \ A \cap T \cap G = \emptyset \, , \ \ \ A \subseteq T \cup G$$

من جهة أولى: إن أي عنصر من عناصر الأسرة $\{A_{i;i\in I}\}$ لا يمكن أن تتقاطع بنفس الوقت مع المجموعتين $T,G$ بنفس الوقت لأنه لو فرضنا جدلاً وجودَ عنصر $A_{i0}$ من الأسرة $\{A_{i;i\in I}\}$ بحيث

$$T \cap A_{i0} \neq \emptyset, G \cap A_{i0} \neq \emptyset$$

$$A_{i0} \cap T \cap G \subseteq A \cap T \cap G; A \cap T \cap G = \emptyset \Longrightarrow A_{i0} \cap T \cap G = \emptyset$$

$$A_{i0} \subseteq A \subseteq T \cup G \Longrightarrow A_{i0} \subseteq T \cup G$$

وهذا تناقضٌ لأنه حصلنا على مجموعتين قبل مفتوحتين هما $T \ , \ G$ بحيث أن

$$T \cap A_{i0} \neq \emptyset, G \cap A_{i0} \neq \emptyset, A_{i0} \cap T \cap G = \emptyset, A_{i0} \subseteq T \cup G$$

وهذا يعني أنّ المجموعة $A_{i0}$ ليست مجموعةً قبل مترابطةٍ وهذا يتناقض مع الفرض أن جميعِ عناصرِ الأُسرة $\{A_{i;i\in I}\}$ هي قبل مترابطةٍ بالتالي لا يمكنُ أنْ تتقاطعَ أيُّ مجموعةٍ $A_{i0}$ من الأسرةِ $\{A_{i;i\in I}\}$ مع $T$و$G$ بآن معاً.

من جهة ثانية: إنّ جميعَ عناصر الأسرة $\{A_{i;i\in I}\}$ محتواة إما في $T$ أو في $G$ لأنّه لو فرضنا جدلاً وجودَ عنصرين من الأسرة$\{A_{i;i\in I}\}$ مثل $A_{i1}$ , $A_{i2}$ بحيث $A_{i1} \subseteq T, A_{i2} \subseteq G$

عندئذ: $A_{i1} \cap A_{i2} \subseteq A \cap T \cap G \, , A \cap T \cap G = \emptyset \ \Rightarrow \ A_{i1} \cap A_{i2} = \emptyset$

وهذا تناقض مع كون $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$

لذا نجدُ أنّ جميعَ عناصر الأسرة $\{A_{i;i\in I}\}$ موجودةٌ إمّا في $T$ أو في $G$ ولنفرض مثلاً أنّ كل عناصر الأسرة $\{A_{i;i\in I}\}$محتواةٌ في $T$

$$A_i \subseteq T, \forall i \in I \Rightarrow A = \cup_{i\in I} A_i \subseteq T$$

بالتالي: $A \cap G = A \cap T \cap G = \emptyset \Longrightarrow A \cap G = \emptyset$

وهذا تناقض مع الفرض الجدلي لذلك نجدُ أنّ $A = \cup_{i\in I} A_i$ هي مجموعةٌ قبل مترابطةٍ.

**نتيجة (7):** لتكن $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ ثلاث تبولوجياتٍ على المجموعةِ $X$ بحيثُ $\tau_3 \subseteq \tau_2 \subseteq \tau_1$ عندئذٍ:

إذا كان الفضاء$(X, \tau_2)$ فضاءً قبل مترابطٍ فإنه ليس من الضروري أنْ يكونَ $(X, \tau_1)$ فضاء قبل مترابطٍ.

إذا كان الفضاء$(X, \tau_2)$ فضاءً قبل مترابط فإنه ليس من الضروري أنْ يكونَ $(X, \tau_3)$ فضاء قبل مترابطٍ.

**مثال (5):**

$$X = \{a, b, c\}$$
$$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$
$$\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$$
$$\tau_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$$

حيث نلاحظ أنّ: $\tau_3 \subseteq \tau_2 \subseteq \tau_1$

عندئذٍ:

في الفضاء $(X, \tau_1)$: $Po(X) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

نلاحظ أنَّه: يمكن التعبير عن $X$ كاجتماعٍ لمجموعتين قبل مفتوحتين بالتالي $(X, \tau_1)$ ليس فضاءً قبل مترابطٍ.

في الفضاء $(X, \tau_2)$: $Po(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$

نلاحظ أنَّه: لا يمكن التعبير عن $X$ كاجتماعٍ لمجموعتين قبل مفتوحتين بالتالي $(X, \tau_2)$ فضاءً قبل مترابطٍ.

في الفضاء $(X, \tau_3)$: $Po(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

نلاحظ أنَّه: يمكن التعبير عن $X$ كاجتماعٍ لمجموعتين قبل مفتوحتين بالتالي $(X, \tau_3)$ ليس فضاءً قبل مترابطٍ.

**مبرهنة (2):** إذا كانت الدالة $f:(X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^*)$ دالةً قبل مستمرةٍ و غامرة، وكان $(X, \tau)$ فضاءً قبل مترابطٍ عندئذٍ: $(Y, \tau^*)$ فضاءٌ مترابطٌ.

**البرهان:** لنفرض جدلاً أنّ الفضاءَ $(Y, \tau^*)$ فضاء غير مترابط عندئذٍ: توجد مجموعتان مفتوحتان مثل $T^*$ و $G^*$ بحيث:

$$T^* \neq \emptyset \quad , \quad G^* \neq \emptyset \qquad G^* \cap T^* = \emptyset \quad , G^* \cup T^* = Y$$

بما أنّ الدالة $f$ دالة قبل مستمرة فإنّ الصورةَ العكسيةَ لكلّ مجموعةٍ مفتوحةٍ في $Y$ هي مجموعةٌ قبل مفتوحةٍ في $X$ أي أنّ:

$f^{-1}(T^*) = \mathrm{T}$ مجموعة قبل مفتوحة

$f^{-1}(G^*) = \mathrm{G}$ مجموعة قبل مفتوحة

$$f^{-1}(T^*) \cap f^{-1}(G^*) = f^{-1}(T^* \cap G^*) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \Rightarrow T \cap \mathrm{G} = \emptyset \qquad (1)$$
$$f^{-1}(T^*) \cup f^{-1}(G^*) = f^{-1}(T^* \cup G^*) = f^{-1}(Y) = X \quad \Rightarrow T \cup \mathrm{G} = X \quad (2)$$

من العلاقتين 1, 2 نستنتجُ أنّ الفضاءَ $(X,\tau)$ ليس فضاءً قبل مترابطٍ وهذا تناقضٌ مع الفرضِ الجدليّ بالتالي الفضاء $(Y, \tau^*)$ فضاء مترابط.

## الاستنتاجات والتوصيات:

١. تم تقديمُ نوعٍ جديدٍ من الفضاءاتِ المترابطةِ وهو الفضاءُ قبل المترابطِ.

٢. دراسةُ العلاقةِ بين الفضاءِ قبل المترابطِ والفضاءِ المترابطِ.

٣. الحصولُ على بعضِ الخواصِ للفضاءاتِ قبل المترابطةِ والمجموعاتِ قبل المترابطةِ.

٤. نوصي بإيجادِ خواصٍ إضافيّةٍ للمجموعاتِ قبلَ المترابطةِ والفضاءاتِ قبل المترابطةِ.

## المراجع:

**[1]** A. S. Mashhour, I. A. Hasanein and S. N. El-Deeb, *A note on semi-continuity and precontinuity*, Indian J. Pure Appl. Math. 13, no. 10 (1982), 1119–1123.

**[2]** Young Bae Jun, Seong Woo Jeong, *Hyeon Jeong Lee and Joon Woo Lee*. (2008), Applications of pre-open sets, Applied General Topology c Universidad Polit´ecnica, pp. 213-228.

**[3]** Willard, S., *General Topology*, *Addison – Wesley Publishing Company*, Inc, 1970

**[4]** Najla Jabbar Kaisam Al- Malaki, "*Some kinds of weakly connected and pairwise connected space*", M. Sc. Thesis, Baghdad University, College of Education/ Ibn Al- Haitham, (2005).

**[5]** A. S.Mashhour, M. E. Abd El-Monsef and S. N. El-Deeb, *On precontinuous and week precontinuous mappings*, Proc.Math. Phys Soc. Egypt, 53 (1982), 47-53.

**[6]** V. Popa, *Propoerties of h-almost continuous functions*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (NS) 31 (1987), 163–168.

**[7]** Ram Lakhan Sah. (2020), *some properties of semi-preconnected spaces*, international journal of creative research thoughts (IJCRt).

**[8]** A.S. Mashhour M.E. El-Monsef and S.N. El-Deeb, On pre-continuous and week pre-continuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt. 53 (1982), 47–53.

**[9]** الباحثة أمل مصطفى وريد، رسالة ماجستير في الرياضيات، اختصاص تحليل رياضي، جامعة تشرين،" *دراسة المجموعات المفتوحة من النوع $\alpha$ والفضاءات المتراصة*"، 2016.