

## حلول عددية لمنظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية

الدكتور سليمان محمد محمود\*

الدكتور أحمد الوسوف\*\*

على سمير احسان\*\*\*

(تاريخ الإيداع 2021 /7/5 – تاريخ النشر 2021 /8 /29)

### □ ملخص □

تم في هذا البحث تقديم تقنية عددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية. تبين الدراسة أن هذه التقنية عندما تم تطبيقها على نموذج اختبار من نمط المسألة المطروحة كانت مستقرة بمتوسط المربعات ورسمت مساحات كبيرة من الاستقرار في المستوي. كما تم تحديد صيغة لدالة الخطأ المقطع للتقنية العددية المقترحة وإثبات تقاربها بمتوسط المربعات من المرتبة الثالثة. تم اختبار التقنية المقترحة بحل مسألتي اختبار إحداهما خطية وأخرى غير خطية إذ تشير النتائج و المقارنات إلى أهمية النتائج التي تم التوصل إليها. **الكلمات المفتاحية:** معادلات تفاضلية عشوائية جبرية، عملية وينر، الاستقرار بمتوسط المربعات، التقارب بمتوسط المربعات.

\* أستاذ في قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

E-mail: Suliman\_mmm@yahoo.com

\*\* أستاذ مساعد - قسم الإحصاء الرياضي- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

\*\*\* طالب دراسات عليا (دكتوراه)- قسم الإحصاء الرياضي- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

## Numerical Solutions of Systems of Stochastic Differential-Algebraic Equations

Dr.SulimanM.Mahmood\*

Dr. Ahmad Al-Wassou\*\*

Ali S. Ehsaan\*\*\*

(Received 5/7/2021.Accepted 29/8/2021)

### □ABSTRACT □

In this paper, a numerical technique is presented for solving a system of stochastic algebraic differential equations(SADEs). The study shows that this technique, when it is applied to a test model of SADEs, is mean-square stability and plots large areas of stability in the plane. The formulation of truncated error function of the proposed numerical technique is also determined, and it is proved that this technique is third-order mean-square convergent. The proposed technique is tested by solving two test problems, one of which is linear and the other is nonlinear, where the results and comparisons indicate the importance of the results obtained.

**Key Words:** Stochastic Differential Algebraic Equations, Wiener Process, Mean-Square Stability, Mean-Square convergence.

---

\* Prof., Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.  
*E-mail: Suliman\_mmn@yahoo.com.*

\*\* Assistant Prof, Depart. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

\*\*\* Postgraduate student, Depart. of Mathematical Statistics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

## مقدمة: Introduction

تنشأ المعادلات الجبرية التفاضلية العشوائية (DAAEs) في كثير من الحالات عند استخدام تقنيات النمذجة الرياضية لوصف الظواهر في العلوم والهندسة والاقتصاد، الخ. في العقود الثلاثة الأخيرة، أصبح استخدام المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية ممارسة نموذجية قياسية في العديد من التطبيقات، مثل الدارات الكهربائية والميكروكهربائية المشوشة، الأنظمة متعددة الأجسام الميكانيكية، الهندسة الكيميائية، نظرية السيطرة، محاكاة الشبكة الكهربائية. في معظم الحالات، يكون النموذج الناتج معقدًا للغاية بحيث لا يسمح لأحد بالبحث عن حل دقيق أو حتى حل تقريبي بالطرائق التقليدية ويكون المطلوب محاكاة كمبيوتر فعالة وموثوقة.

نلاحظ على سبيل المثال، في نظام عمليات شبكات الطاقة الكهربائية تدخل العديد من العوامل العشوائية وتؤثر على عمليات الشبكة مثل الاستهلاك العشوائي للحمل وإجراءات حماية الترحيل العشوائي وغير المتوقعة. بالإضافة إلى ذلك يمكن توقع أن شبكة الطاقة ستشهد المزيد من السلوكيات العشوائية في عمليات نظام الإستقرار بسبب الاختراقات المتزايدة للأحمال سواء كانت ناجمة عن التجاوزات أو عن المشتركين الجدد. وبالتالي إجراء تقييم الأمان الديناميكي لأنظمة الطاقة الكهربائية بطريقة حتمية وعشوائية، يحتاج لحل منظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية تتضمن عمليات عشوائية.

نقدم في هذا البحث دراسة عددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية من

الشكل [1]:

$$A \dot{X}(t) + B X(t) = f(t) + A \xi(t), \quad t \in [0, b]$$

(1)

حيث  $A$  و  $B$  مصفوفتان مربعتان ثابتتان من القياس  $n \times n$  و  $A$  مصفوفة حقيقية من القياس  $n \times m$  و  $\xi(t) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  ضجة بيضاء من البعد  $m \times 1$ ، و  $\xi_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) متتالية من عمليات الضجيج الأبيض مستقلة عن بعضها من البعد الأول، و الدالة  $f: R^+ \rightarrow R^n$  ودالة الحل:  $X: R^+ \rightarrow R^n$ .

نلاحظ في المنظومة (1) إذا تم إلغاء الضجيج الأبيض  $\xi(t) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  تتحول إلى

منظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية كالاتي:

$$A \dot{X}(t) + B X(t) = f(t), \quad t \in [0, b]$$

(2)

مشكلة البحث:

تنشأ مشكلة البحث من سببين أساسيين، الأول ينجم عن وجود معادلات تفاضلية و معادلات جبرية في منظومة واحدة، والسبب الثاني ينشأ عن وجود عمليات الضجيج الأبيض كعامل عشوائي يجعل حل المنظومة برمتها عشوائي. و يزيد عن ذلك أن وجود مزيج من المعاملات التفاضلية والجبرية والعشوائية في نموذج واحد يتسبب في كثير من الأحيان بصعوبات غير متوقعة يجعل المسألة المطروحة في غاية التعقيد، وصعبة الحل بالطرائق العددية التقليدية المعروفة.

### المعادلات التفاضلية الجبرية:

المعادلات التفاضلية الجبرية ليست كالمعادلات التفاضلية العادية، لأنها تنشأ عن مسائل مضطربة وشاذة، نوضح ذلك فيما يلي، لنأخذ المعادلات التفاضلية العادية الآتية:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= q(t, y_1, y_2) \\ \alpha \dot{y}_2 &= g(t, y_1, y_2) \end{aligned} \quad (3)$$

نلاحظ أن منظومة المعادلات التفاضلية العادية (3) تصبح قاسية إذا كان  $\alpha$  مقدار صغيراً، وتزداد قساوتها وصعوبتها جداً في الحل عندما  $\alpha \rightarrow 0$  وذلك بسبب ضعف الاستقرار وعدم تقارب الحلول، وأما إذا كان

$$\alpha = 0$$

فتتحول (3) إلى منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية الآتية:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= q(t, y_1, y_2) \\ 0 &= g(t, y_1, y_2) \end{aligned} \quad (4)$$

والمنظومة (4) لا يمكن إيجاد حلولها بالطرائق العددية التقليدية بسبب انعدام المشتق  $\dot{y}_2$  في المعادلة الثانية، وهذه المنظومة أصعب من المعادلات التفاضلية القاسية لأنها أصبحت شاذة.

الآن، لنطبق طريقة أولر على منظومة المعادلات التفاضلية العادية (3)، ولتكن متتالية الحل العددي الناتجة عن الطريقة لـ  $y_1(t), y_2(t)$  تعطى كالتالي  $(y_{1,1}, y_{2,1}), (y_{1,2}, y_{2,2}), \dots, (y_{1,k}, y_{2,k}), \dots, (y_{1,N}, y_{2,N})$  عندئذ تعطى طريقة أولر المطبقة على (3) بالعلاقات التكرارية الآتية:

$$\begin{aligned} y_{1,k+1} &= y_{1,k} + q(t_k, y_{1,k}, y_{2,k}) dt_k \\ y_{2,k+1} &= y_{2,k} + \frac{1}{\alpha} g(t_k, y_{1,k}, y_{2,k}) dt_k \end{aligned}, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (5)$$

حيث  $(y_{1,0}, y_{2,0})$  قيم شروط البدء معلومة.

نلاحظ أن طريقة أولر (5) تكون غير فعالة ومنخفضة الدقة كلما كان  $1/\alpha$  كبيراً وستفشل هذه الطريقة ومعظم الطرائق العددية التقليدية في حال كانت منظومة المعادلات (3) قاسية يعني  $1/\alpha$  كبير جداً. أما طريقة أولر ستفقد إمكانية تطبيقها على منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية (4) مباشرة، لأن فيها  $\alpha \equiv 0$  يعني  $\frac{1}{\alpha} \rightarrow \infty$  والسبب واضح هو عدم وجود التكرارية الثانية في (5). وهذا الكلام ينطبق على جميع الطرائق العددية التقليدية مثل طرائق تايلور، ورنج-كوتا، وبيكارد وطرائق زيتا. والحل الوحيد هو تحول منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية إلى منظومة معادلات تفاضلية عادية بالاشتقاق وهذا التحويل قد يكون غير ممكن في كثير من الحالات غير الخطية للمسائل. قدم الباحثون تقنيات عددية مختلفة لمحاكاة حلول المعادلات التفاضلية الجبرية مع ضجة عشوائية نذكر منهم:

أوجد Schein and Denk في [10] عام 1998 الحل العددي لمنظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية بتطبيقها إلى محاكاة ضجيج عابر لدارات ميكروكهربائية. أثبت Winkler في [13] عام 2004 التقارب القوي من المرتبة الأولى لطريقة ميلستين الضمنية مطبقة لنموذج من الشكل (1). أوجد Alabert and Ferrante في [1] عام 2006 الحل لمسألة المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية الخطية ذات المعاملات الثابتة بتحويلها إلى

الشكل القانوني بطريقة كرونكر Kronecker لتسهيل الحل. طبق Gerdin and Sjöberg في [6] عام 2007 طريقة المرشحات الجزئية التقريبية لحل منظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية غير الخطية. قدم Buckwar وآخرون في [3] عام 2011 الشرط الضرورية للاستقرار والتقارب لمجموعة من الطرائق العددية هم طريقتا أولر-مارياما الضمنية والصريحة، وطريقة أولر الأسية الصريحة، وطريقة زيتا-مارياما. درس Wang and Crow في [12] عام 2011 تقارب طريقة زيتا المعممة مطبقة لمنظومة من الشكل (1) وقدم محاكاة عددية للمسألة باستخدام طريقة أولر التراجعية من المرتبة الأولى كحالة خاصة من طريقة زيتا. قدم Küpper وآخرون في [7] عام 2012 دراسة عددية لمنظومات من الشكل (1) مع ضجة بيضاء ببعد واحد وأثبتوا الاستقرار بمتوسط المربعات من المرتبة الأولى لطريقة رانج-كوتا ورسوموا مناطق الاستقرار لطرائق رانج-كوتا وأولر الضمنية، وقاعدة شبه المنحرف. درس Qin and Zhang في [4] عام 2019 الاستقرار القوي لأسرة من الطرائق مطبقة لمنظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة العشوائية واستخدما أيضا طريقة أولر-مارياما وطريقة زيتا المعممة. ناقش González-Zumb وآخرون في [5] عام 2020 الحل لمنظومات من الشكل (1) بالاعتماد على طرائق QR وهي تقنيات تحليل مصفوفة إلى جداء مصفوفتين إحداها متعامدة والثانية مثلثية عليا. درس Mahmoud وآخرون في [9] عام 2019 الاستقرار القوي بمتوسط المربعات لتقنية عددية مطبقة لنموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية من المرتبة الأولى وتحديد مناطق الاستقرار في المستوي الحقيقي. كما قدم Mahmoud وآخرون في [8] عام 2020 تقنية عددية باستخدام حدوديات شرائحية من الدرجة الرابعة مع أربع نقاط تجميع وتطبيقها إلى نموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة. قدم Suthar and Raha في [11] عام 2021 الشروط الكافية لوجود الحل الوحيد لمنظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية وإيجاد صيغة تقريبية لحلها.

### أهمية البحث وأهدافه: Importance of Research and its Aims

نظراً للتطورات الهائلة الحاصلة في جميع المجالات العلمية وتداخل العلوم فيما بينها، طور الباحثون تقنيات جديدة لنمذجة هذه الأنظمة المتداخلة والمعقدة لفهما وتسييرها. تكمن أهمية هذا البحث بطرح مسألة علمية لها تطبيقات مختلفة إحصائية وفيزيائية وكيميائية وهندسية وميكانيكية. في العالم الحقيقي الذي نعيش فيه، نجد أن معظم الظواهر الواقعية والديناميكية والتغيرات اللحظية التي تطرأ على أنظمة الخدمات اليومية هي ظواهر عشوائية معقدة وبالتالي يمكن نمذجتها بمعادلات تفاضلية جبرية عشوائية. ولسوء الحظ فإن معظم النماذج المطروحة معقدة وصعبة الحل ولا يمكن حلها بالطرائق العددية التقليدية مباشرة، بالإضافة إلى انخفاض الدقة وضعف الاستقرار والتقارب لبعض الطرائق المقترحة. ولهذا نهدف لتطوير تقنية عددية مستقرة ومتقاربة وفعالة من حيث الدقة لمحاكاة الحل لمنظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية.

### طرائق البحث ومواده: Methodology

سنقدم تقنية عددية لحل منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية. تعتمد منهجية البحث على بعض مفاهيم الاحتمالات والإحصاء الرياضي وتقنيات التحليل العددي، والجبر الخطي وعلوم الخوارزميات والبرمجة. وسنستخدم لغة البرمجة Mathematica لتنفيذ الجوانب التطبيقية من هذا البحث.

### الحل العددي للمسألة: Numerical Solution of Problem

سنقدم في هذه الفقرة تقنية عددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية العشوائية المعطاة وفق صيغة ايتو (Ito) المعرفة في العلاقة (1). نأخذ تجزئة منتظمة:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$  للمجال  $[0, T]$ ، حيث  $t_i = ih$ ، من أجل  $i = 0, 1, \dots, N$  و  $h = T/N$  طول الخطوة، و  $N$  عدد صحيح موجب. بفرض أن  $X_i(t): [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) متتالية دوال عشوائية عندئذ توجد كثيرة حدود هرميت وحيدة من الدرجة الثالثة في كل مجال جزئي  $[t_k, t_{k+1}]$  تعطى بالشكل [9]:

$$S_i(t) = \bar{\xi}^2 (1 + 2\xi) S_{i,k} + \bar{\xi}^2 \xi S_{i,k}^{[1]} + \xi^2 (1 + 2\bar{\xi}) S_{i,k+1} - \xi^2 \bar{\xi} S_{i,k+1}^{[1]},$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

حيث:

$$S_{i,k} = S_{i,k}(t_k), \quad S_{i,k}^{[1]} = dS_{i,k}(t_k),$$

$$S_{i,k+1}^{[1]} = dS_{i,k+1}(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\xi = (t - t_k)/h, \quad \bar{\xi} = 1 - \xi \in [0, 1],$$

و  $dS_{i,0}(0), S_{i,0}(0)$  قيم ابتدائية معلومة من شروط البدء للمسألة.

وبشكل عام فإن التجزئة تحدد  $N$  مجال جزئي  $[t_k, t_{k+1}]$ ،  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ، والاستيفاء الشرائحي التكعيبي

يحقق الشروط:

$$\mathbf{S}_i(t) \in [t_0, t_N]; \quad \mathbf{S}_i(t_k) \cong X_i(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad \bullet$$

$$\mathbf{S}_{i,k+1}(t_k) = \mathbf{S}_{i,k}(t_k), \quad k = 1, \dots, N-1 \quad \bullet$$

$$d\mathbf{S}_{i,k+1}(t_k) = d\mathbf{S}_{i,k}(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad \bullet$$

ويتفاضل كثيرة الحدود (6) بالنسبة لـ  $t$  نحصل على:

$$\frac{dS_i(t)}{dt} = [6(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi})S_{i,k} + (3\bar{\xi}^2 - 2\bar{\xi})S_{i,k}^{[1]} + 6(\xi - \xi^2)S_{i,k+1} + (3\xi^2 - 2\xi)S_{i,k+1}^{[1]}] / h$$

وبملاحظة أن  $dt = h$ ، بالاختصار ينتج لدينا:

$$dS_i(t) = 6(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi})S_{i,k} + (3\bar{\xi}^2 - 2\bar{\xi})S_{i,k}^{[1]} + 6(\xi - \xi^2)S_{i,k+1} + (3\xi^2 - 2\xi)S_{i,k+1}^{[1]} \quad (7)$$

تستخدم التقنية المقترحة في كل مجال جزئي  $[t_k, t_{k+1}]$  نقطتين تجميعيتين معرفتين كالآتي:

$$t_{k+z_j} = t_k + z_j dt, \quad j = 1, 2 \quad (8)$$

مع الوسيطين التجميعيين:

$$0 < z_1 < z_2 = 1 \quad (9)$$

الآن بتطبيق كثيرات حدود هرميت المتقطعة (6)-(7) مع نقاط التجميع (8)-(9) إلى منظومة المعادلات

التفاضلية العشوائية (1)، في كل مجال جزئي  $[t_k, t_{k+1}]$  ينتج لدينا:

$$AdS(t_{k+z_j}) + BS(x_{k+z_j})dt = f(t_{k+z_j})dt + \Lambda dW(\tau_k), \quad j = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$S(t_0) = X_0, \quad dS(x_0) = dX_0 \quad (10b)$$

حيث

$$S(t_{k+z_j}) = \begin{bmatrix} S_1(t_{k+z_j}) \\ S_2(t_{k+z_j}) \\ \vdots \\ S_n(t_{k+z_j}) \end{bmatrix}, dS(t_{k+z_j}) = \begin{bmatrix} dS_1(t_{k+z_j}) \\ dS_2(t_{k+z_j}) \\ \vdots \\ dS_n(t_{k+z_j}) \end{bmatrix},$$

$$f(t_{k+z_j}) = \begin{bmatrix} f_1(t_{k+z_j}) \\ f_2(t_{k+z_j}) \\ \vdots \\ f_n(t_{k+z_j}) \end{bmatrix}, dW(\tau_k) = \begin{bmatrix} dW_1(\tau_k) \\ dW_2(\tau_k) \\ \vdots \\ dW_m(\tau_k) \end{bmatrix}$$

والمصفوفات  $A, B, \Lambda$  كما هي معرفة في المنظومة (1). نلاحظ هنا أنه تم استبدال الضجة البيضاء  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  المستمرة مع الزمن بتفاضل عملية وينر  $dW(\tau_k)$  لأنها غير قابلة للاشتقاق. ولمزيد من المعلومات يمكن الاطلاع على خصائص عملية وينر ومحاكاتها عددياً بقيم متقطعة في المرجع [9].

لدراسة مسألة المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية، يكفي أخذ الأجزاء التفاضلية والجبرية والعشوائية

بالشكل:

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \\ \vdots \\ dX_{m-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dt X_2(t) \\ dt X_3(t) \\ \vdots \\ dt X_m(t) \\ X_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & X_2(t) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & X_{m-1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ \vdots \\ dW_{m-1}(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

(11)

نلاحظ أن المعادلة الأخيرة  $X_1(t) = -g(t)$  جبرية حيث  $g(t)$  دالة معلومة وجميع المعادلات المتبقية معادلات تفاضلية عشوائية، وهي منظومة ذات دليل يساوي  $m$ .

#### [7] Mean-Square Stability of Technique: الاستقرار بمتوسط المربعات للتقنية:

ندرس الاستقرار العددي للتقنية المقترحة بتطبيقها إلى مسألة الاختبار النموذجية الآتية:

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dt \lambda X_2(t) \\ X_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu X_1(t) & 0 \\ 0 & g(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

(12)

مع الشروط الابتدائية:

$$X_1(0) = x_0, X_2(0) = y_0 \quad (13)$$

وبتطبيق التقريبات (6)-(7) مع نقاط التجميع (8)-(9) على مسألة الاختبار (12)، نحصل على:

$$\begin{bmatrix} dS_1(t_{k+z_j}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda S_2(t_{k+z_j}) dt \\ S_1(t_{k+z_j}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu S_1(t_{k+z_j}) & 0 \\ 0 & g(t_{k+z_j}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$j = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

مع الشروط الابتدائية:

$$S_1(0) = x_0, S_2(0) = y_0$$

حيث  $dt = h = T/N$  و  $\mathbf{N}(0, 1)$  له التوزيع  $\delta_k$  و  $dW_k = \sqrt{dt} \delta_k$  و  $t_{k+z_j} = t_k + z_j dt, j = 1, 2$

تؤول المنظومة (14) بعد الاستبدال بالتقريبات الشرائحية ونقاط التجميع إلى المنظومة التكرارية الآتية:

$$M_1 \hat{S}_{k+1} = M_2 \hat{S}_k + h \bar{g}_k, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (15)$$

حيث:

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_1 - \mu dw_k B_1 & h \lambda B_1 \\ B_1 & O \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -A_2 + \mu dw_k B_2 & h \lambda B_2 \\ -B_2 & O \end{bmatrix},$$

وتعطى المصفوفات  $B_2, B_1, A_2, A_1$  كالآتي:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6(\bar{z}_1^2 - \bar{z}_1) & 3\bar{z}_1^2 - 2\bar{z}_1 \\ 6(\bar{z}_2^2 - \bar{z}_2) & 3\bar{z}_2^2 - 2\bar{z}_2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 6(z_1 - z_1^2) & 3z_1^2 - 2z_1 \\ 6(z_2 - z_2^2) & 3z_2^2 - 2z_2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} z_1^2(1+2\bar{z}_1) & -z_1^2\bar{z}_1 \\ z_2^2(1+2\bar{z}_2) & -z_2^2\bar{z}_2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \bar{z}_1^2(1+2z_1) & \bar{z}_1^2 z_1 \\ \bar{z}_2^2(1+2z_2) & \bar{z}_2^2 z_2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

و المصفوفة  $O$  مصفوفة صفرية من القياس  $2 \times 2$  وتعطى المتجهات:

$$\hat{S}_{k+1} = (S_{1,k+1}, S_{1,k+1}^{[1]}, S_{2,k+1}, S_{2,k+1}^{[1]})^T, \hat{S}_k = (S_{1,k}, S_{1,k}^{[1]}, S_{2,k}, S_{2,k}^{[1]})^T$$

$$\bar{g}_k = (0, 0, g(t_{k+z_1}), g(t_{k+1}))^T$$

نعيد كتابة العلاقة التكرارية (15) بالشكل:

$$\hat{S}_{k+1} = R(h, \lambda, \mu) \hat{S}_k + h M_1^{-1} \bar{g}_k \quad (19)$$

حيث

$$R(h, \lambda, \mu) = M_1^{-1} M_2 \quad (20)$$

هي مصفوفة من القياس  $4 \times 4$ ، وتعد العلاقة التكرارية (19) هامة، لأنها تشكل أساسا لتعريف الاستقرار

العشوائي لتقنيتنا الشرائحية المطبقة على منظومة الاختبار (12).

وباستخدام مفهوم التوقع تأخذ عملية وينر القيم [8]:

$$E[dW_k] = 0, E[dW_k^2] = h, E[\delta_k] = 0, E[\delta_k^2] = 1$$

الآن، بوضع  $p = \lambda h$  و  $q = \mu\sqrt{h}$ ، واستخدام مفهوم التوقع بمتوسط المربعات، نحصل من المنظومة (19) على العلاقة التكرارية:

$$\bar{Y}_{k+1} = E[R^t(h, p, q)R(h, p, q)]\bar{Y}_k \quad (21)$$

حيث

$$\bar{Y}_{k+1} = \begin{bmatrix} ES_{1,k+1}^2 \\ E(S_{1,k+1}^{[1]})^2 \\ ES_{2,k+1}^2 \\ E(S_{2,k+1}^{[1]})^2 \end{bmatrix}, \bar{Y}_k = \begin{bmatrix} ES_{1,k}^2 \\ E(S_{1,k}^{[1]})^2 \\ ES_{2,k}^2 \\ E(S_{2,k}^{[1]})^2 \end{bmatrix}$$

تسمى الدالة  $\bar{R}(p, q) = E[R^t(h, p, q)R(h, p, q)]$  بدالة الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة العددية المقترحة. ولتحديد علاقة دالة الاستقرار بالاستقرار العددي للتقنية نقدم التعريف الآتي:

#### تعريف (1) [14]:

يقال عن تقنية عددية ذات صياغة تكرارية من النمط (21) إنها مستقرة بمتوسط المربعات لأجل  $h, p, q$  إذا كان نصف القطر الطيفي لمصفوفة الاستقرار يحقق  $\rho(\bar{R}(p, q)) < 1$ ، حيث  $\rho$  يساوي إلى أكبر القيم المميزة بالقيمة المطلقة للمصفوفة  $\bar{R}(p, q)$ .

تحديد منطقة الاستقرار بمتوسط المربعات:

منطقة الاستقرار بمتوسط المربعات للتقنية المقترحة هي مجموعة النقاط  $(p, q)$  من المستوي  $Opq$  التي تحقق المتراجحة  $\rho(\bar{R}(p, q)) < 1$ ، حيث  $p = \lambda h$  و  $q = \mu\sqrt{h}$ . تم باستخدام برنامج Mathematica لرسم منطقة الاستقرار بمتوسط المربعات للتقنية المقترحة وذلك بتثبيت قيم الوسطاء  $z_1 = 0.90, z_2 = 0.10$ ، وهذه القيم المثبتة لوسطاء التجميع تحدد أكبر مساحة استقرار بمتوسط المربعات في المستوي وهي المنطقة المظللة في الشكل (1).

نجد بحسب التعريف أن التقنية العددية المقترحة تكون مستقرة بمتوسط المربعات إذا تم استخدام القيم المثبتة لوسطاء التجميع  $z_1 = 0.90, z_2 = 0.10$ ، ونحصل عندئذ على كثيرة الحدود المميزة  $P(x)$  لمصفوفة الاستقرار  $\bar{R}(p, q)$  الآتية:

$$P(x) = \frac{(0.0661333867p^2 + 0.0661512p^4 + 0.00001777p^6)}{p^6}x^2 + \frac{(-39.46201p^4 - 0.0084322p^6 - 1.2663319p^4q - 0.0168644p^4q^2)}{p^6}x^3 + x^4$$

ويمكن أيضا إيجاد جذور المعادلة المميزة للمصفوفة  $\bar{R}(p, q)$  لأجل القيم الكبيرة  $p=25, q=-200$

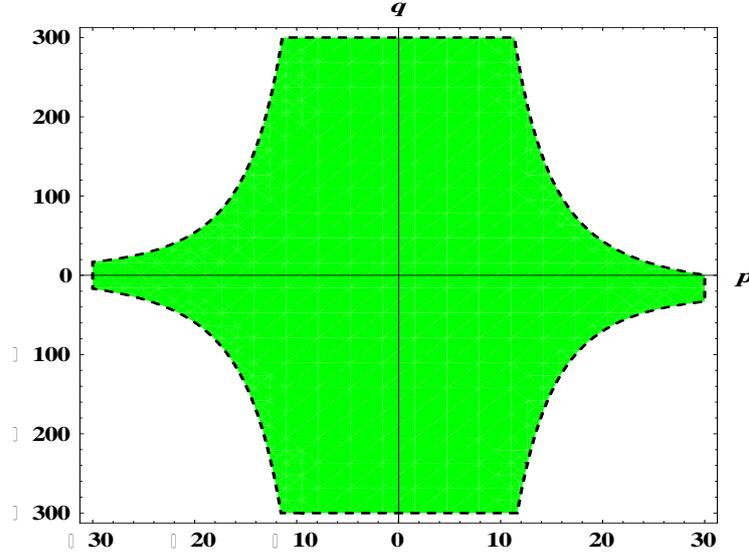
الواقعة على محيط منطقة الاستقرار تقريبا كالاتي:

$$\{x_1 = 0., x_2 = 0., x_3 = 0.000166045, x_4 = 0.745502\}$$

وتعطى أيضا مصفوفة الاستقرار لأجل  $p=25, q=-200$  كالاتي:

$$\bar{R}(25, -200) = \begin{bmatrix} 0.568288879 & 0.313529136 & -0.04631216 & -0.01533308 \\ 0.313529136 & 0.173162815 & -0.025619645 & -0.008482180 \\ -0.04631216 & -0.025619645 & 0.00379961 & 0.001257979 \\ -0.01533308 & -0.00848218 & 0.001257979 & 0.000416493 \end{bmatrix}$$

و هذه الجذور هي القيم المميزة لمصفوفة الاستقرار  $\bar{R}(p, q)$ ، ونلاحظ أيضا أن أكبر هذه القيم بالقيمة المطلقة أصغر من الواحد وهو نصف القطر الطيفي للمصفوفة  $\rho = 0.745502 < 1$  وهذا يعني أن التقنية مستقرة.



الشكل (1): منطقة الاستقرار بمتوسط المربعات للتقنية المقترحة هي المنطقة المظلمة من المستوي  $0pq$ .

**نتيجة (1):** تكون التقنية العددية المقترحة المختبرة بالعلاقة التكرارية (21) مستقرة بمتوسط المربعات إذا تم

استخدام القيم  $z_1 = 0.90, z_2 = 1, \bar{z}_1 = 0.10, \bar{z}_2 = 0$ ، لوسطاء التجميع.

### تقدير الخطأ للتقنية Error Estimation for Technique

تعريف (2): [2]

يقال عن طريقة متتالياتها العددية  $S_k$  إنها متقاربة بمتوسط المربعات من مرتبة  $p > 0$  لأجل  $\bar{X}_k$  حل لمنظومة المعادلات التفاضلية العشوائية (1) إذا وجد ثابتين  $C > 0$  و  $\delta_0 > 0$  بحيث يتحقق لدينا :

$$(E | \bar{X}_k - \bar{S}_k |^2)^{1/2} \leq C h^p$$

لأجل أي خطوة طولها  $h \in (0, \delta_0)$ ، و الثابت  $C$  مستقل عن الخطوة  $h$ .

بفرض أن  $X(t), Y(t) \in \mathcal{R}$  دالتا الحل لمنظومة المعادلتين (12)-(13) وأن  $S_{1,k}, S_{2,k}$  هو الحل

العددي الموافق لهما، نحصل على صيغة الخطأ المقطوع الموضوعي للتقنية المقترحة كالاتي:

$$\begin{bmatrix} E | X(t_{k+1}) - S_{1,k+1} |^2 \\ E | (dX(t_{k+1})) - dS_{1,k+1} |^2 \\ E | Y(t_{k+1}) - S_{2,k+1} |^2 \\ E | (dY(t_{k+1})) - dS_{2,k+1} |^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{575} h^8 (1 - 2z_1)^2 \| X^{(4)}(t_k) \|^2 \\ \frac{1}{144} h^8 z_1^2 \bar{z}_1^2 (1 - 2z_1)^2 \| X^{(4)}(t_k) \|^2 \\ \frac{1}{729} h^8 (1 - z_1)^2 \| Y^{(4)}(t_k) \|^2 \\ \frac{1}{144} h^8 z_1^2 (1 - z_1)^2 \| Y^{(4)}(t_k) \|^2 \end{bmatrix},$$

وهكذا ينتج لدينا:

$$(E | \bar{X}_k - \bar{S}_k |^2)^{1/2} \leq \frac{1}{12} M h^4 \quad (22)$$

حيث

$$\text{Max}\{(1 - 2z_1)^2, z_1^2 \bar{z}_1^2 (1 - 2z_1)^2, (1 - z_1)^2, z_1^2 (1 - z_1)^2\} \leq 1$$

$$. M = \text{Max}\{\| X^{(4)}(t_k) \|_{\infty}, \| Y^{(4)}(t_k) \|_{\infty}\}$$

نلاحظ من العلاقة (22) أن الخطأ الموضوعي عند الخطوة  $k$  من المرتبة الرابعة للتقنية المقترحة المطبقة

لنموذج الاختبار، و يقدر الخطأ الشامل عند نهاية مجال الحل  $[0, T]$  بعد  $N$  خطوة كالاتي :

$$e(h) = C h^3$$

حيث  $C = M / 12$  . ونلاحظ أن  $\lim_{h \rightarrow 0} e(h) = \lim_{h \rightarrow 0} C h^3 = 0$  ، وهذا يثبت الاتساق للتقنية المقترحة.

## نتيجة 2:

سنستنتج بحسب التعريف (2) أن التقنية المقترحة تكون متقاربة بمتوسط المربعات من المرتبة الثالثة إذا تم

استخدام  $z_1 = 0.90, z_2 = 1, \bar{z}_1 = 0.10, \bar{z}_2 = 0$  ، وطول خطوة  $h < 1$  .

## محاكاة ونتائج عددية بالتقنية المقترحة:

يتم اختبار فعالية التقنية المقترحة بتطبيقها لإيجاد الحل العددي لمسألتي اختبار من المعادلات

التفاضلية العشوائية الخطية وغير الخطية. ولحساب الخطأ المطلق للطريقة العددية سنستخدم الترميز الآتي:

$$errX_k = |X(t_k) - X_k|, \quad k=1,2,\dots,N,$$

إذ تشير  $X_k$  إلى الحل العددي للطريقة المستخدمة عند النقطة  $t_k$  من المجال  $[0, T]$ ، و  $X(t_k)$  هو

الحل الدقيق عند النقطة  $t_k$  وذلك باستخدام تجزئة حجمها  $N$  وخطوة طولها  $h=T/N$  . تم إعداد البرامج

المطلوبة باستخدام لغة البرمجة Mathematica.

**المسألة 1:6** اختبارنا الأول هو منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية الخطية الآتية:

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \lambda X_2(t) dt \\ X_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b X_1(t) & 0 \\ 0 & -2X_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

وفق الشروط الابتدائية:

$$X_1(0) = 1, X_2(0) = 0.5$$

والحل الدقيق:

$$X_1(t) = X_1(0) \text{Exp}\left[\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bW(t)\right], \quad X_2(t) = 0.5X_1(t)$$

نحل المسألة بالتقنية المقترحة وبطريقتي أولر-مارياما وميلستين لأجل  $b=0.5, a=-0.5$  . نرسم في

الشكل (2)

محاكاة عملية وينر في المجال  $[0, 2]$  لأجل  $N=128$  نقطة. ونرسم في الأشكال (3)-(14) محاكاة

الحل العددي لـ  $X_1$  و  $X_2$  والخطأ المطلق فيهما لتقنيتنا المقترحة ولطريقتي أولر مارياما وميلستين على الترتيب

في المجال الزمني  $[0,2]$  بتجزئة  $N=128$  نقطة. نلخص في الجدول (1) الأخطاء المطلقة في الحل العددي لـ

$X_1$  و  $X_2$  لتقنيتنا ولطريقتي أولر مارياما وميلستين على الترتيب في المجال الزمني  $[0,2]$  بخطوة  $h=1/64$  .

وندرج في الجدول (2) مقارنات بين تقنيتنا المقترحة وطريقتي أولر مارياما وميلستين من حيث بعض المعايير

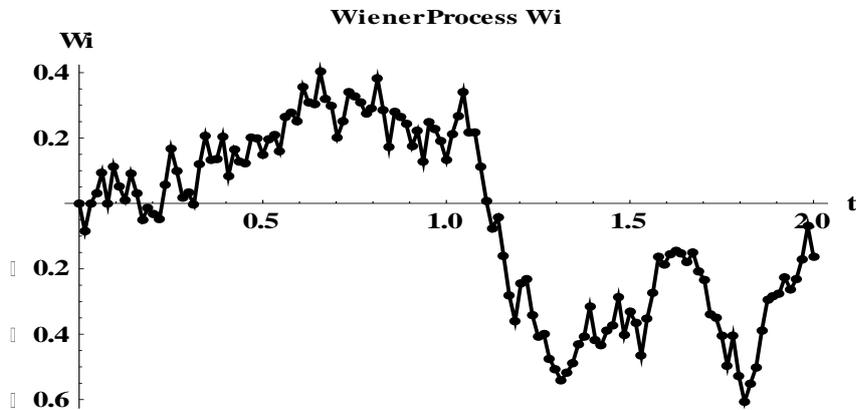
الإحصائية.

الجدول (1): مقارنات الأخطاء في الحل العددي لطريقتنا مع طريقة أولر-مارياما وطريقة ميلستين

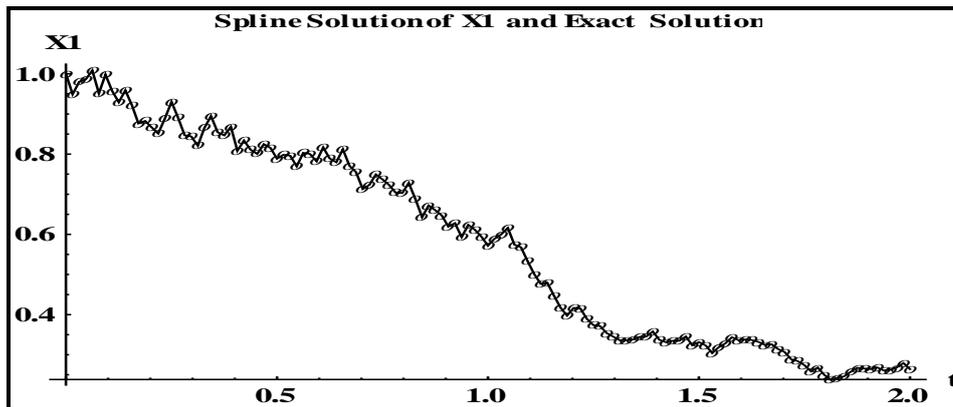
$t_k$	الخطأ المطلق بطريقة ميلستين		الخطأ المطلق بطريقة أولر-مارياما		الخطأ المطلق بطريقتنا	
	$errX_{1,k}$	$errX_{2,k}$	$errX_{1,k}$	$errX_{2,k}$	$errX_{1,k}$	$errX_{2,k}$
0.125	0.000322	0.00017219	0.0242793	0.0121396	0.0018563	0.0009196
0.25	0.0002608	0.0003787	0.0468653	0.0234327	0.0017555	0.00090047
0.375	0.0007117	0.000217	0.0617362	0.0308681	0.00193823	0.0008346
0.5	0.0012745	0.0003552	0.0660291	0.0330146	0.00194577	0.00075705
0.625	0.001122	0.0002031	0.0740729	0.0370365	0.00162366	0.00071832
0.75	0.001302	0.0003088	0.0821368	0.0410684	0.00165705	0.00070595
0.875	0.001605	0.0005170	0.0973228	0.0486614	0.00169318	0.0006282
1.0	0.0015208	0.0007303	0.125248	0.0626242	0.00183928	0.00055502
1.125	0.002355	0.0009717	0.12656	0.0632801	0.0017597	0.0004764
1.25	0.002653	0.0011522	0.124179	0.0620897	0.0016669	0.00037705
1.375	0.002257	0.0011353	0.130428	0.0652139	0.00169557	0.00033794
1.5	0.002549	0.0011123	0.129438	0.0647191	0.00169676	0.00029979
1.625	0.002448	0.0010482	0.124609	0.0623043	0.00167689	0.00032883
1.75	0.002161	0.0010668	0.121374	0.0606871	0.00166783	0.00026236
1.875	0.002410	0.0010404	0.132009	0.0660043	0.00160047	0.0002627
2.0	0.002307	0.0010034	0.141576	0.0707878	0.00180096	0.00022011

الجدول (2): مقارنات بين طريقتنا المقترحة وطريقتي أولر-مارياما ميلستين من حيث بعض المعايير الإحصائية.

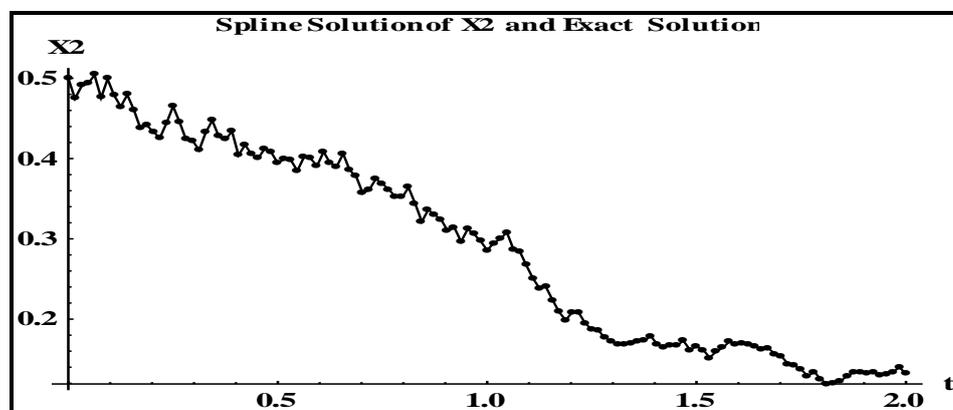
اسم الطريقة	أصغر خطأ Min[Error]	أكبر خطأ Max[Error]	متوسط الخطأ Mean[Error]	الوسيط للخطأ Med[Error]	الانحراف المعياري SD[Error]	التشتت للخطأ Var[Error]
طريقتنا المقترحة	0.0003655	0.0020759	0.0010235	0.00098688	0.00042465	1.803E-7
أولر-مارياما	0.00312931	0.0559274	0.0336866	0.0388258	0.0145863	0.0002127
ميلستين	0.00014779	0.00374781	0.00281669	0.00317245	0.00087216	7.606E-7



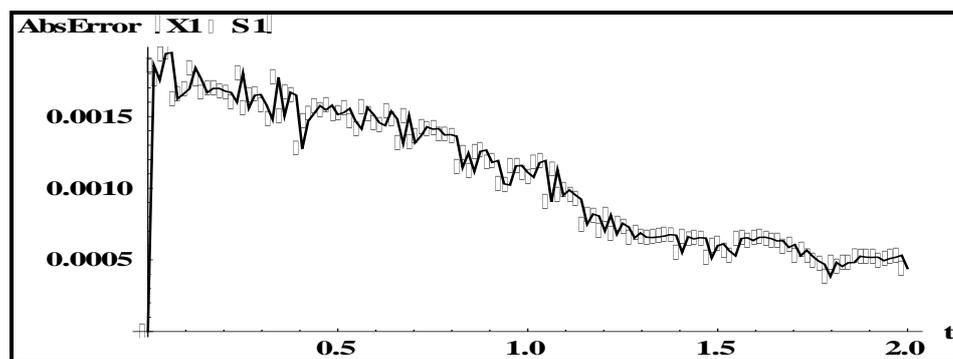
الشكل (2): مسار عملية وينر العشوائية في المجال الزمني [0,2] لأجل N=128 نقطة.



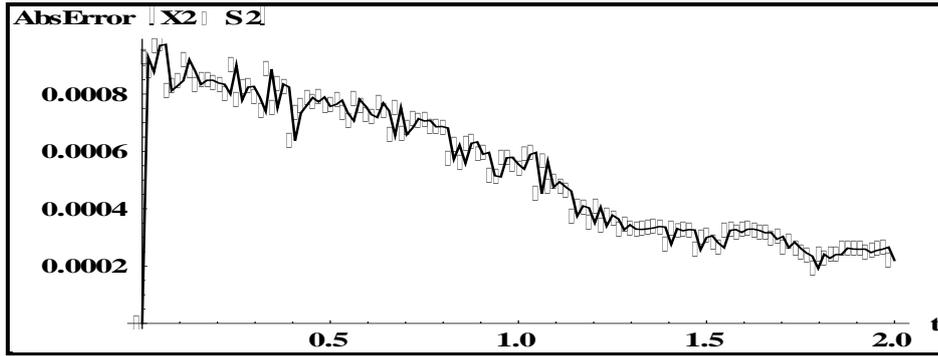
الشكل(3): محاكاة الحل الشرائحي لـ  $X_1$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



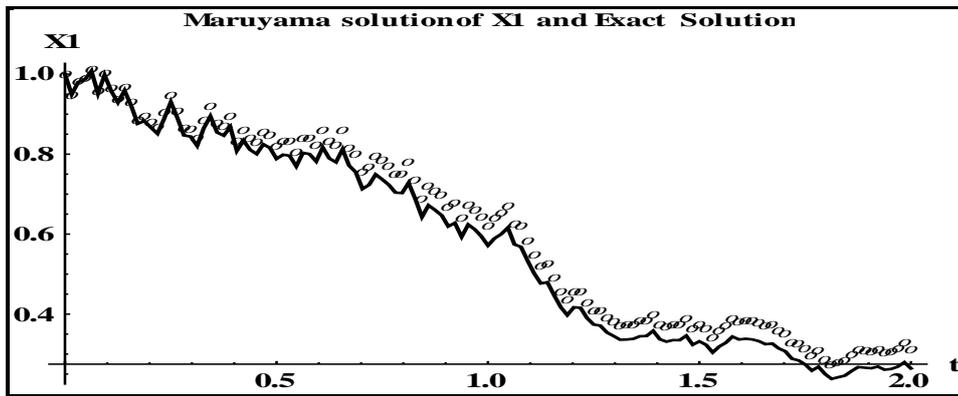
الشكل(4): محاكاة الحل الشرائحي لـ  $X_2$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



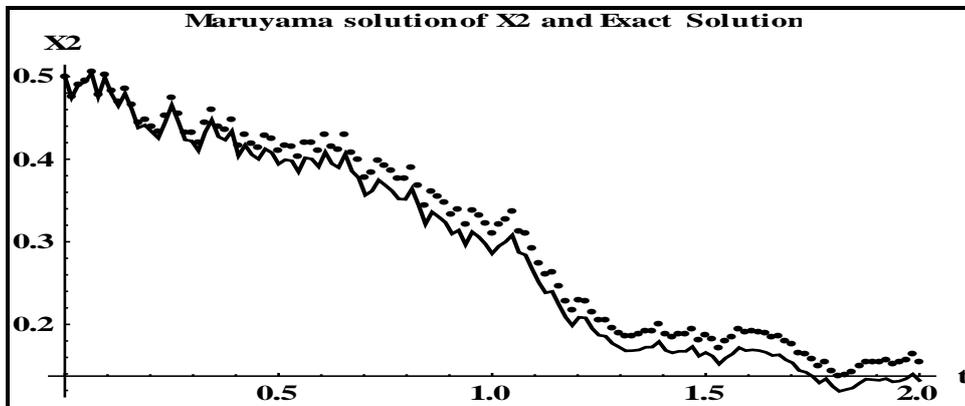
الشكل(5): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي لـ  $X_1$  في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



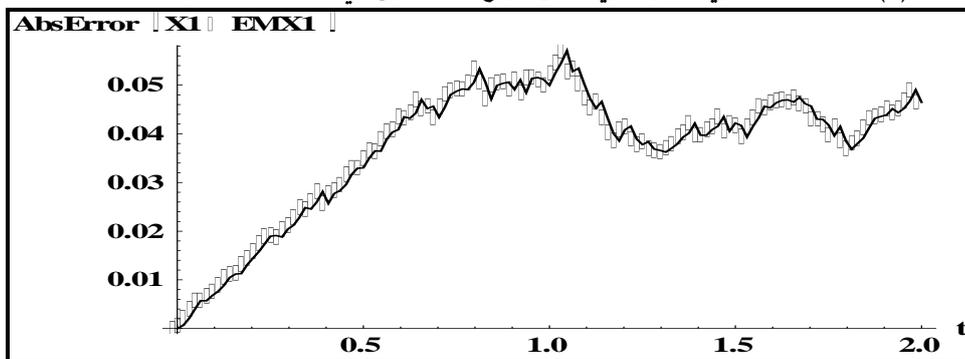
الشكل(6): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي لـ  $X_2$  في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



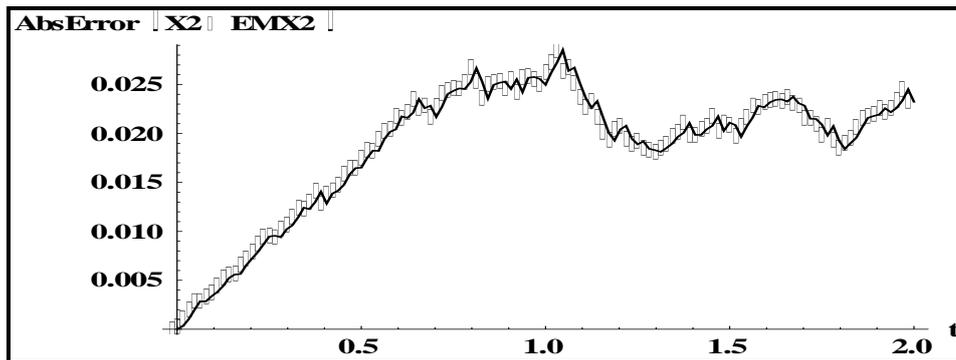
الشكل(7): محاكاة الحل بطريقة أولر-مارياما لـ  $X_1$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



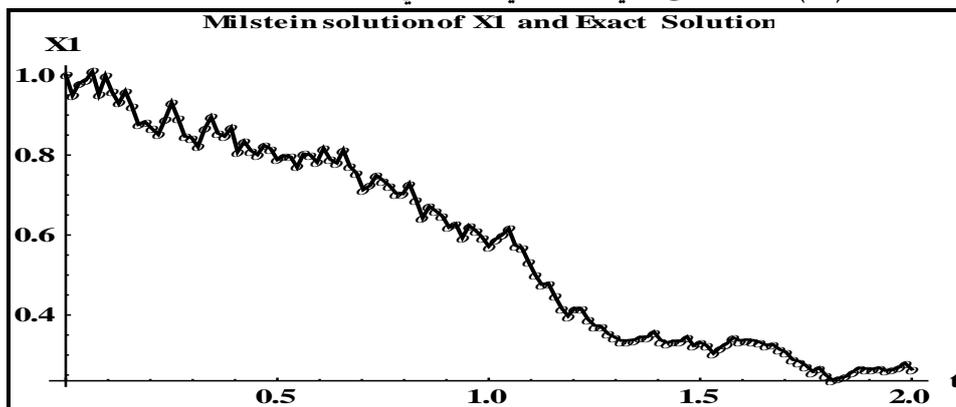
الشكل(8): محاكاة الحل بطريقة أولر-مارياما لـ  $X_2$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



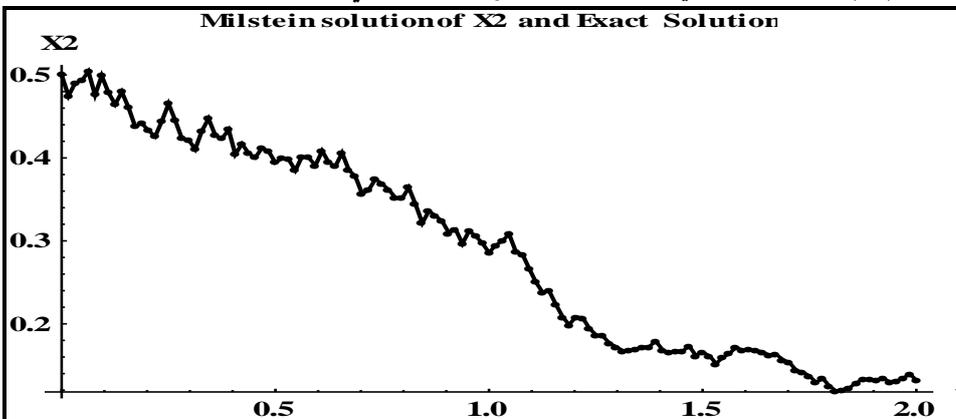
الشكل(9): الخطأ المطلق بطريقة أولر-مارياما لـ  $X_1$  في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



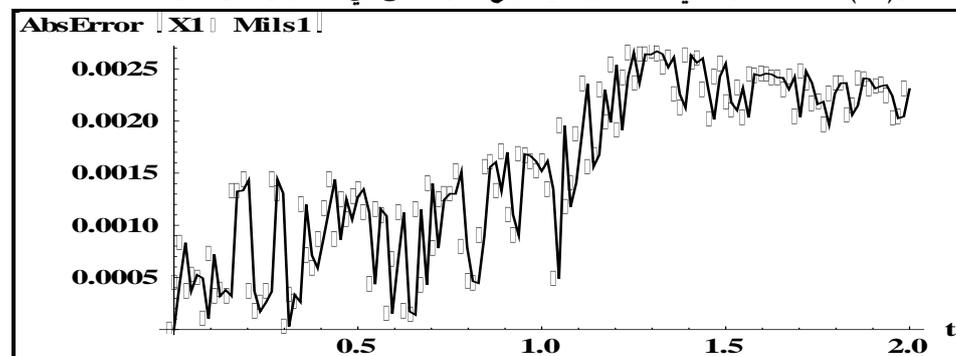
الشكل(10): الخطأ المطلق بطريقة أولر-مارياما لـ  $X_2$  في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



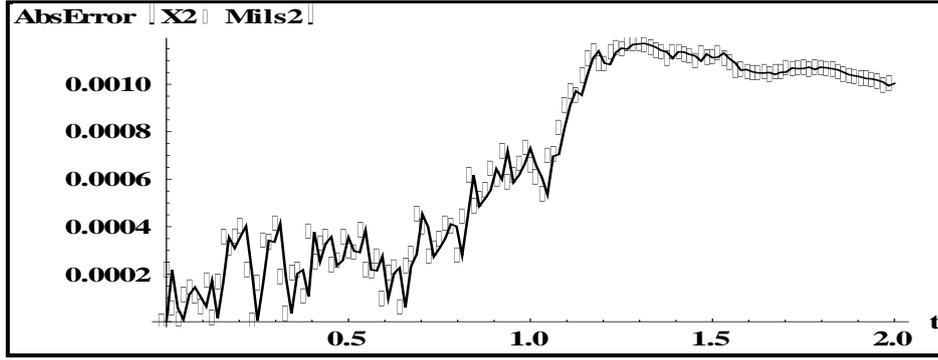
الشكل(11): محاكاة الحل بطريقة ميلستين لـ  $X_1$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



الشكل(12): محاكاة الحل بطريقة ميلستين لـ  $X_2$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



الشكل(13): الخطأ المطلق بطريقة ميلستين لـ  $X_1$  في المجال  $[0,2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.



الشكل (14): الخطأ المطلق بطريقة ميلستين لـ  $X_2$  في المجال  $[0, 2]$  لأجل  $N=128$  نقطة.

**المسألة 2:** لتأخذ منظومة الاختبار غير الخطية في المعادلات التفاضلية العشوائية الجبرية الآتية:

$$\begin{cases} dX_1(t) = -(a + b^2 X_1(t))(1 - 4X_1(t)X_2(t))dt + b(1 - X_1^2) dW(t) = 0 \\ 0 = X_1(t) - \frac{1}{4} X_2(t), & X_1(0) = -2, X_2(0) = -0.5 \end{cases}, t \in [0, T]$$

مع الحل الدقيق:

$$X_1(t) = \frac{(1 + X_0) \text{Exp}[-2at + 2bW(t)] + X_0 - 1}{(1 + X_0) \text{Exp}[-2at + 2bW(t)] - X_0 - 1}, \quad X_2(t) = 0.25X_1(t)$$

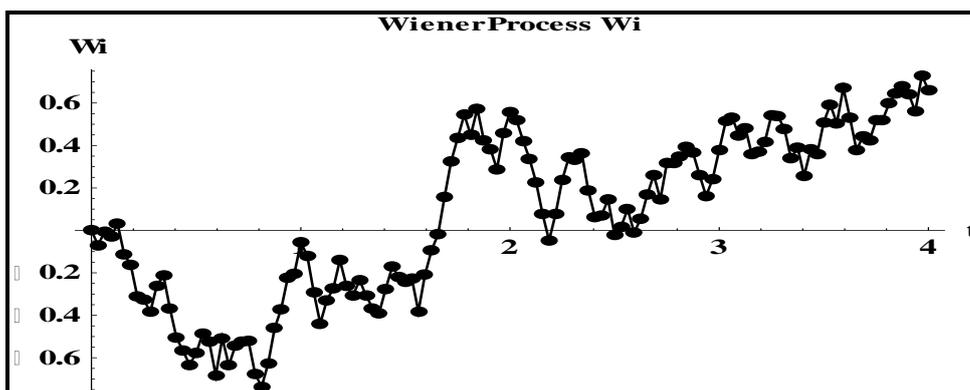
نحل المسألة بتقنيتنا المقترحة وبطريقتي أولر-مارياما وميلستين لأجل  $a=0.1$ ,  $b=0.2$ . ونرسم في الشكل (15) محاكاة عملية وينر في المجال  $[0, 4]$  لأجل  $N=100$  نقطة. ونرسم في الأشكال (16)-(27) محاكاة الحل العددي لـ  $X_1$  و  $X_2$  والخطأ المطلق فيهما لتقنيتنا المقترحة ولطريقتي أولر-مارياما وميلستين على الترتيب في المجال الزمني  $[0, 4]$  بتجزئة  $N=100$  نقطة. نلخص في الجدول (3) الأخطاء المطلقة في الحل العددي لـ  $X_1$  و  $X_2$  لطريقتنا ولطريقتي أولر-مارياما وميلستين على الترتيب في المجال الزمني  $[0, 4]$  بخطوة  $h=0.04$ . وندرج في الجدول (4) مقارنات بين طريقتنا المقترحة وطريقة أولر-مارياما وطريقة ميلستين من حيث بعض المعايير الإحصائية.

الجدول (3): مقارنات الأخطاء في الحل العددي لطريقتنا مع طريقة أولر-مارياما وطريقة ميلستين

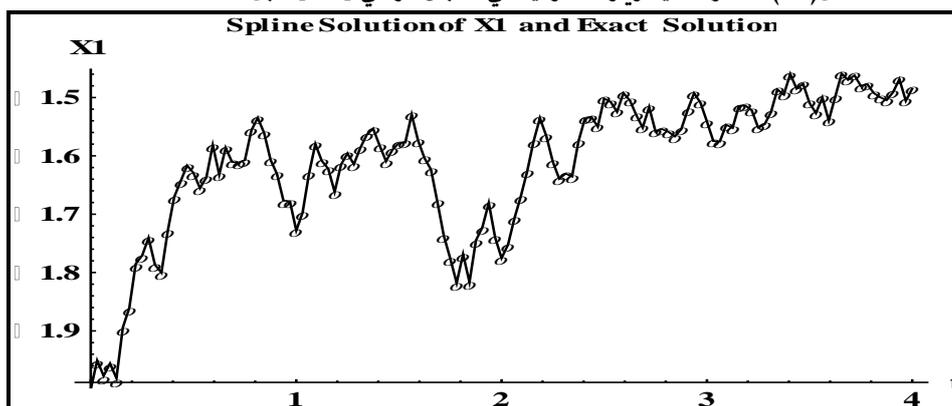
$t_k$	الخطأ المطلق بطريقة ميلستين		الخطأ المطلق بطريقة أولر-مارياما		الخطأ المطلق بطريقتنا	
	$errX_{1,k}$	$errX_{2,k}$	$errX_{1,k}$	$errX_{2,k}$	$errX_{1,k}$	$errX_{2,k}$
0.4	0.0057064	0.0021399	0.0352048	0.00880119	0.00028153	0.00007038
0.8	0.00660149	0.00247556	0.0441831	0.0110458	0.0003786	0.00009466
1.2	0.00299959	0.00112485	0.0676063	0.0169016	0.00289274	0.00072318
1.6	0.0035959	0.00134847	0.0746474	0.0186618	0.00234334	0.00058583
2.0	0.00253344	0.00095004	0.0855714	0.0213928	0.00303223	0.00075807
2.4	0.0017258	0.00064718	0.154371	0.0385927	0.00334725	0.00083681
2.8	0.0014785	0.0005544	0.121028	0.030257	0.00346418	0.00086604
3.2	0.00145757	0.00054658	0.127076	0.0317691	0.00343302	0.00085825
3.6	0.00099092	0.00037159	0.169664	0.0424161	0.00329844	0.00082461
4.0	0.00076999	0.00028875	0.194777	0.0486944	0.00308186	0.00077046

الجدول(4): مقارنات بين طريقتنا المقترحة وطريقتي أولر-مارياما وميلستين من حيث بعض المعايير الإحصائية.

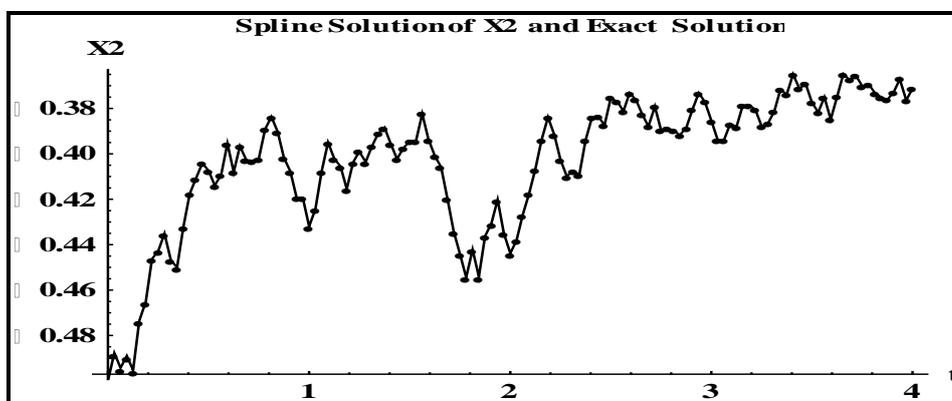
اسم الطريقة	أصغر خطأ Min[Error]	أكبر خطأ Max[Error]	متوسط الخطأ Mean[Error]	الوسيط للخطأ Med[Error]	الانحراف المعياري SD[Error]	التشتت للخطأ Var[Error]
طريقتنا المقترحة	0.0000704	0.0040053	0.00182674	0.00165261	0.000381	1.4561E-7
أولر-مارياما	0.00582509	0.318844	0.162531	0.180435	0.0866682	0.00751137
ميلستين	0.0006119	0.0083343	0.0033455	0.002408	0.0023494	5.51981E-6



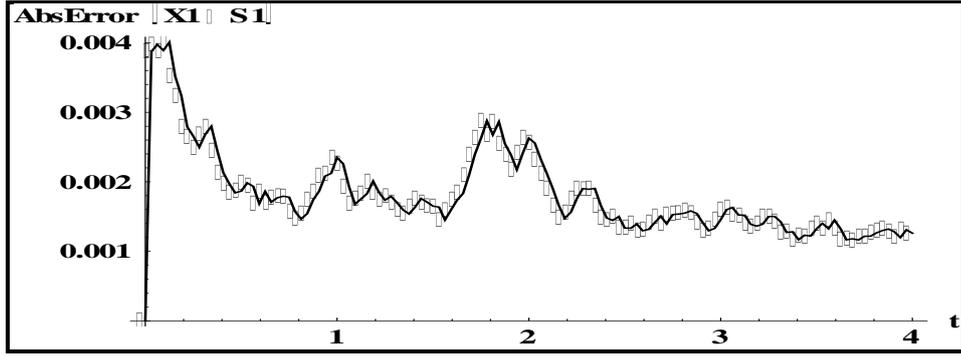
الشكل(15): مسار عملية وينر العشوائية في المجال الزمني [0,4] لأجل N=100 نقطة.



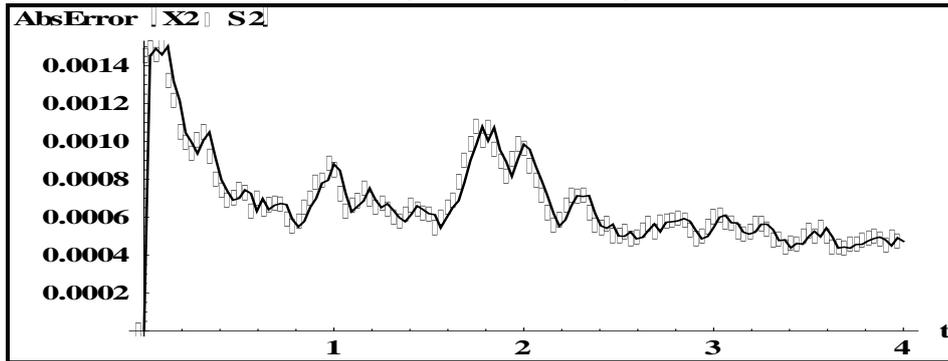
الشكل(16): محاكاة الحل الشرائحي لـ  $X_1$  ومع الحل الدقيق في المجال [0,4] لأجل N=100 نقطة.



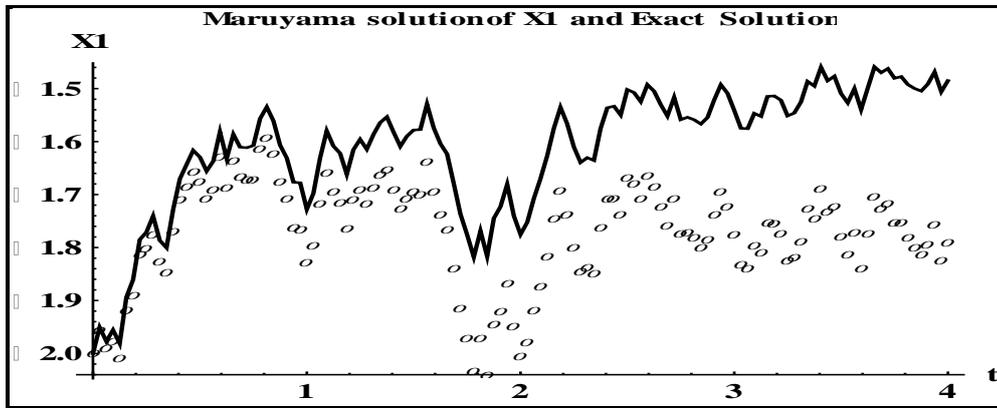
الشكل(17): محاكاة الحل الشرائحي لـ  $X_2$  ومع الحل الدقيق في المجال [0,4] لأجل N=100 نقطة.



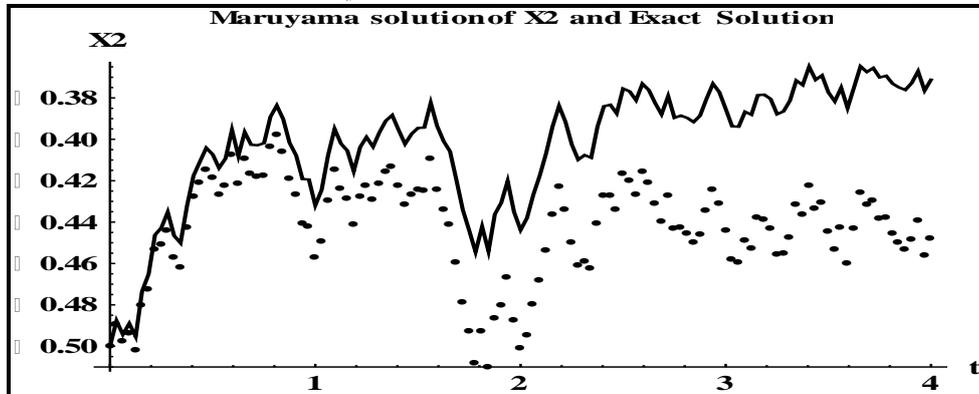
الشكل(18): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي لـ  $X_1$  في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.



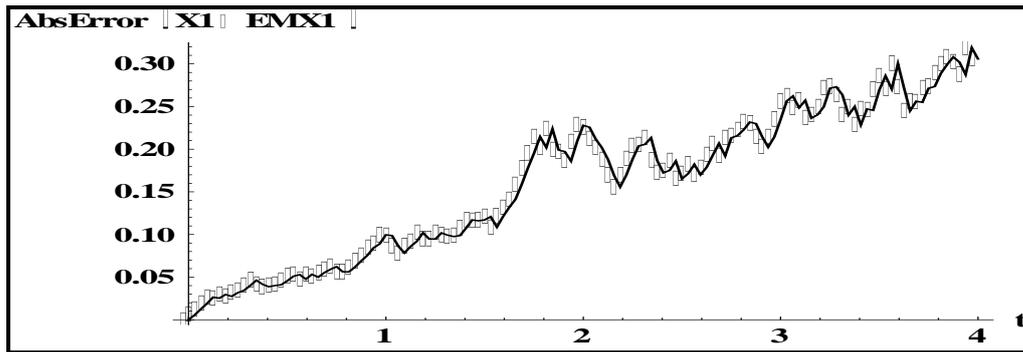
الشكل(19): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي لـ  $X_2$  في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.



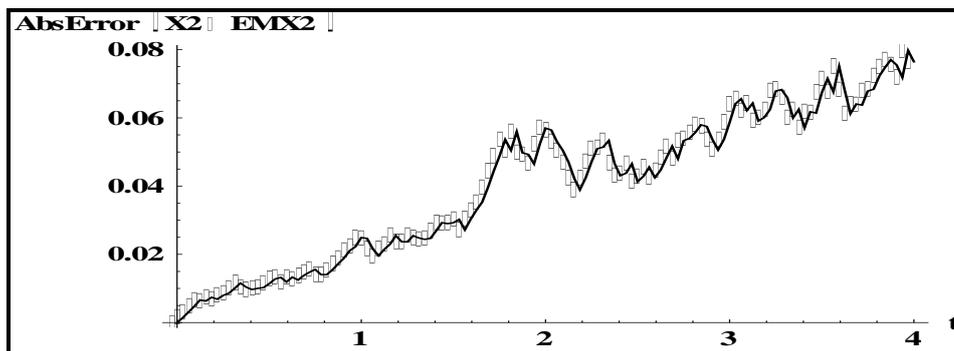
الشكل(20): محاكاة الحل بطريقة أولر-مارياما لـ  $X_1$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.



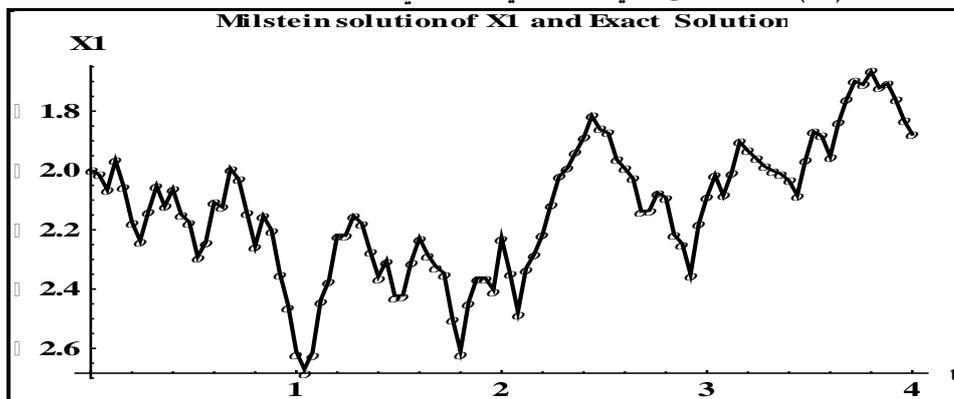
الشكل(21): محاكاة الحل بطريقة أولر-مارياما لـ  $X_2$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.



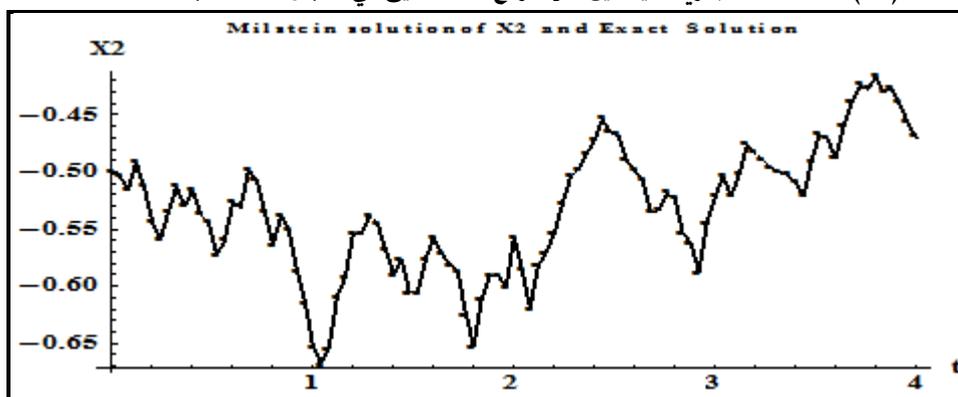
الشكل (22): الخطأ المطلق بطريقة أولر-مارياما لـ  $X_1$  في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.



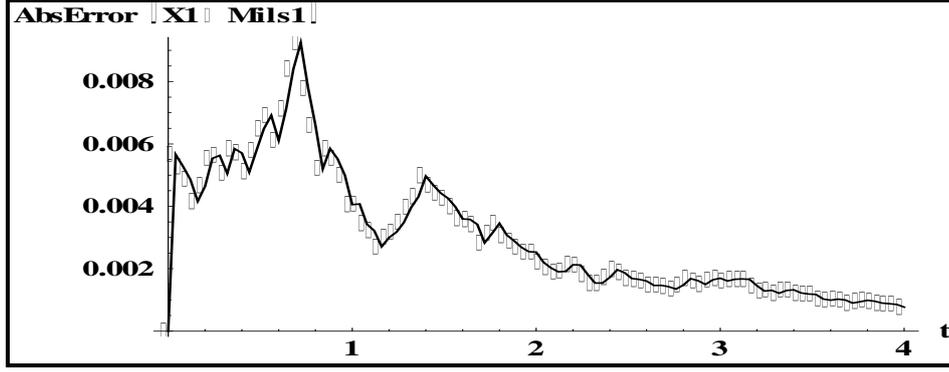
الشكل (23): الخطأ المطلق بطريقة أولر-مارياما لـ  $X_2$  في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.



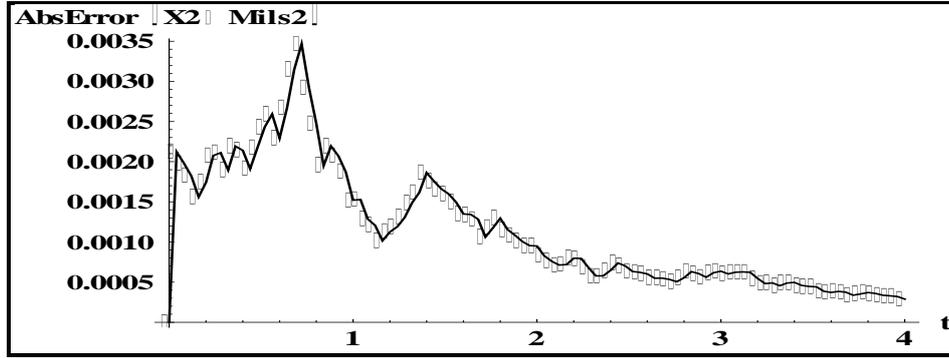
الشكل (24): محاكاة الحل بطريقة ميلستين لـ  $X_1$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.



الشكل (25): محاكاة الحل بطريقة ميلستين لـ  $X_2$  ومع الحل الدقيق في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.



الشكل(26): الخطأ المطلق بطريقة ميلستين لـ  $X_1$  في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.



الشكل(27): الخطأ المطلق بطريقة ميلستين لـ  $X_2$  في المجال  $[0,4]$  لأجل  $N=100$  نقطة.

### الاستنتاجات والتوصيات:

تم تقديم تقنية عددية لمحاكاة الحل لمنظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية الخطية وغير الخطية. تمت نمذجة عملية وينر عددياً باستخدام عملية Random الحاسوب المنتظمة التوزيع في المجال  $[0,1]$ ، وقدمنا دراسة تحليلية للاستقرار والتقارب بمتوسط المربعات بتطبيق التقنية على نموذج استقرار من نمط المسألة المدروسة نفسه. تبين الدراسة أن التقنية المقترحة مستقرة بمتوسط المربعات ومقاربة من المرتبة الثالثة وترسم مساحات كبيرة من مناطق الاستقرار في المستوى الحقيقي لأجل  $z_1 = 0.90$ ،  $z_2 = 1$ ،  $\bar{z}_1 = 0.10$ ،  $\bar{z}_2 = 0$  وطول خطوة  $h < 1$ . تم اختبار التقنية المقترحة بحل مسألتين، الأولى خطية والثانية غير خطية، إذ تشير النتائج العددية إلى أهمية النتائج التي تم التوصل إليها بالمقارنة مع طريقتي أولر-مارياما وميلستين، وكذلك أيضاً أظهرت الرسوم البيانية للحلول العددية والأخطاء الناتجة عنها نجاح تقنيتنا المقترحة في محاكاة الحل ومطابقة من بداية مجال الحل إلى نهايته. نظراً لنجاح التقنية المقترحة في محاكاة حلول منظومات المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية الخطية وغير الخطية نوصي بالآتي:

- تطوير تقنية تجميع لمحاكاة الحل لنماذج من المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية ذات أدلة عالية.
- تطوير تقنيات تجميع مشابهة لمحاكاة الحل لمنظومات المعادلات التفاضلية العشوائية المحايدة.
- تطوير تقنيات عددية لمحاكاة الحل لمنظومات المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من المرتبة الثانية.
- كما ونوصي باستخدام التقنية العددية المقترحة لحل منظومات المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية.

## References

1. ALABERT A.; M. FERRANTE. *Linear stochastic differential-algebraic equations with constant coefficients*. Elect. Comm. in Probab. 11, 2006, 316–335.
2. ALADAG E. E. LI, *Stochastic Delay Differential Equations*, Master Thesis, Middle East Technical University, 2017, pages 86.
3. BUCKWAR E. ; M. G. RIEDLER; P. E. KLOEDEN. *The numerical stability of stochastic ordinary differential equations with additive noise*. Stochastics and Dynamics, Vol. 11, Nos. 2 & 3, 2011, pp.265–281.
4. QIN T. and Ch. ZHANG. *A general class of one-step approximation for index-1 stochastic delay-differential-algebraic equations*. Journal of Computational Mathematics, Vol.37, No.2, 2019, 151–169.
5. GONZÁLEZ-ZUMBA, A.; P. FERNÁNDEZ-DE-CÓRDOBA; J.-C. Cortés and V. Mehrmann. *Stability assessment of stochastic differential-algebraic systems via lyapunov exponents with an application to power systems*. Mathematics 2020, 8, 1393; doi:10.3390/math8091393.
6. GERDIN M.; J. SJÖBERG. *Nonlinear Stochastic Differential-Algebraic Equations with Application to Particle Filtering*. Technical report from Automatic Control. Linopings university, Sweden, 2007,8 .pages.
7. KÜPPER D.; A. KVÆRNØ; A. RÖBLER, *A Runge-Kutta method for index 1 stochastic differential-algebraic equations with scalar noise*. BIT Numer Math, 52, 2012, 437–455.
8. MAHMOUD S. M.; A. AI-WASSOUF; A. ASAAD, *Numerical Collocation Method for Simulation of some of Stochastic Delay Differential Equations*. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies-Basic Sciences Series Vol. 42, No. 1, 2020.
9. MAHMOUD S. M.; A. AI-WASSOUF; A. S. EHSAN, *Studying Mean-Square Stability of Numerical Method Applied for Solving Models of Stochastic Differential Equations*. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies-Basic Sciences Series Vol. 41, No.5, 2019.
10. SCHEIN O.; G. DENK. *Numerical solution of stochastic differential-algebraic equations with applications to transient noise simulation of microelectronic circuits*. Journal of Computational and Applied Mathematics. 100, 1998, 77-92.
11. SUTHAR S., S. RAHA. *On Explicit Stochastic Differential Algebraic Equations*. Indian Institute of Science, Bengaluru, math. OC, 17 Feb, 2021, pp.1-19.
12. WANG K., M.L. CROW. *Numerical simulation of stochastic differential algebraic equations for power system transient stability with random loads*, Electrical and Computer Engineering Missouri University of Science & Technology Rolla, Missouri 65409, 2011 IEEE, pp.1-8.
13. WINKLER R., *Stochastic differential algebraic equations of index 1 and applications in circuit simulation*, Journal of Computational and Applied Mathematics 163, 2004, 435–463.
14. WANG P. *Three-stage stochastic Runge-Kutta methods for Stochastic Differential Equations*, journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 222, 2008, pp.324-332.