مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (5) 2021

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (5) 2021

تقريب الإشارات (كدوال) بمجاميع نولاند المعدَّلة في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير

أ. د. محمد علي*

د. أحمد كنج**

أحمد معروف***

(تاريخ الإيداع 8/11/ 2021– تاريخ النشر 21/ 12/ 2021)

□ ملخّص □

قمنا في هذا البحث، بتقريب الإشارات (كدوال) تنتمي إلى فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير باستخدام مجاميع نورلاند المعدَّلة $N_n^{\lambda}(f)$ المعرفة بواسطة المجاميع الجزئية لمتسلسلة فورييه. وبشكلٍ خاص، توصلنا إلى تقريب دوال ليبتشز $Lip(\alpha, p(\cdot), \theta)$ في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير وناقشنا حالتين $0 < \alpha < 1$ و $\alpha = 1$. وبالاستفادة من ذلك حصلنا على تقريب العديد من الفضاءات الدالية بمجاميع مثلثية.

الكلمات المفتاحية: نظرية التقريب، معامل الاستمرارية، فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير، مجاميع نورلاند.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا. البريد الإلكتروني:mohammadali@tishreen.edu.sy

** مدرس– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا. البريد الإلكتروني: ahmedkinj@gmail.com

*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات–كلية العلوم – اللاذقية – سوريا. البريد الإلكتروني: ahmroof@gmail.com

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (5) 2021

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (5) No. (5) 2021

Approximation of signals (as functions) by modified Nörlund sums in the grand Lebesgue spaces with variable exponent

Dr. Mohammad Ali*
Dr. Ahmed Kinj**
Ahmad Maarouf***

(Received 8/11/2021.Accepted 21/12/2021)

□ABSTRACT □

In this paper, we study the approximation properties of signals (as functions) which belong to the Grand Lebesgue space with variable exponent by using modified Norland sums $N_n^{\lambda}(f)$ defined by the partial sums of the Fourier series. In particular, the appropriate rates of approximation in Lipschitz class $Lip(\alpha, p(\cdot), \theta)$ in the Grand Lebesgue space with variable exponent in case of $0 < \alpha < 1$ and $\alpha = 1$ are estimated. Moreover, By taking advantage of this, we get the approximation of many functional spaces with trigonometric sums..

Keywords: Approximation theory, Modulus of continuity, grand Lebesgue spaces with variable exponent, Norland sums.

* Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. Emai: mohammadali@tishreen.edu.sy

** Assistant professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. Email: ahmedkinj@gmail.com

***Master student, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria. Email: ahmroof@gmail.com

المقدمة:

يُعد فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير (Grand lebesgue space with variable exponent) تعميماً لفضاء ليبيغ ذي الأس المتغير والذي يعتبر بدوره تعميماً لفضاء ليبيغ الكلاسيكي. حظي هذا الفضاء في الآونة الأخيرة اهتماماً بالغاً من قبل العديد من الباحثين الرياضيين، لكون أي دراسة فيه تعميماً للكثير من الدراسات السابقة ولما له من أهمية في العديد من التطبيقات على سبيل المثال في مسائل نمذجة السوائل، وفي حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية [19,6,16]. كما يلعب فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير دوراً هاماً في بعض فروع الرياضيات الأخرى كنظرية الاحتمالات ونظرية المؤثرات [2,17].

درس Quade تقريب الدوال في فضاء ليبتشز $lip(\alpha,p)$ في فضاء ليبيغ الكلاسيكي L^p حيث $1<p<\infty$ وكذلك في حالة $p=1$ في [15]. تم تعميم هذه النتائج من قبل Russel في [13] وكذلك عند Chandra في [3] و Leindler في [10,11]. كما درس Mishra تقريب الإشارات (كدوال) في فضاء ليبتشز $lip(\alpha,p)$ في فضاء ليبيغ الكلاسيكي L^p حيث $1<p<\infty$. كما دُرس تقريب الدوال في فضاء ليبتشز $lip(\alpha,p(.))$ في فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير $L^{p(.)}$ حيث $p(.)$ دالة متغيرة من قبل Israfilov و Guven في [5]. أما تقريب الإشارات (كدوال) في فضاء ليبتشز $lip(\alpha,p(.))$ في فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير حيث $p(.)$ دالة متغيرة فقد درست من قبل Krasniqi في [9]. وبالنسبة لتقريب دوال فضاء موري بمجاميع دي لا فاي بوسين فقد درست من قبل Mahmoud و Ali و Kinj في[7]. ومن الجدير بالذكر أن تقريب دوال فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير بمجاميع نورلاند فقد درست من قبل Tistici و Israfilov في [19].

قمنا في هذا البحث باستخدام مجاميع نورلاند المعدَّلة في تقريب الإشارات (كدوال) في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير. وبذلك نكون قد قدمنا تعميماً للنتائج التي تم التوصل إليها من قبل Tistici و Israfilov في [19] وكذلك للنتائج التي تم التوصل إليها من قبل Krasniqi في [9].

ننوه أننا في هذا العمل سنرمز للدوال الدورية التي دورها 2π بالرمز $2\pi-$دورية. كما سنكتب $f(x)=O(g(x))$ عندما يوجد ثابت موجب c بحيث يتحقق $f(x)\le c\,g(x)$.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث في تقريب الإشارات (كدوال) إلى كثيرات حدود مثلثية التي يمكن التعامل معها بسهولة. ولهذا العمل أهمية كبيرة في مجال دراسة تحليل الإشارات وتطبيقاتها في علوم الاتصالات والحاسبات.

أما هدف البحث فهو تقريب دوال فضاء لبيتشيز $Lip(\alpha,p(\cdot),\theta)$ في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير بكثيرات حدود مثلثية تدعى مجاميع نورلاند المعدَّلة. وبالاستفادة من ذلك، توصلنا إلى تقريب العديد من الفضاءات الدالية كفضاءات ليبيغ ذي الأس المتغير و فضاء ليبيغ الكلاسيكي بكثيرات حدود مثلثية.

طرائق البحث ومواده:

يقع هذا البحث في اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكلٍ خاص ضمن نظرية تقريب الدوال، ويدرس تقريب الإشارات (كدوال) بكثيرات حدود مثلثية والطرق المتبعة للحصول على الهدف المنشود تعتمد بشكلٍ أساسي على خواص المتسلسلات، كمتسلسلة فورييه ومتسلسلة سيزارو وبعض المجاميع الجزئية المتعلقة بهما وسنستخدم تحويل آبل وبعض مفاهيم نظرية التقريب.

النتائج والمناقشة:

تعريف1: [5] *المجموعتان* $\mathcal{P}(\boldsymbol{T})$, $\mathcal{P}_0(\boldsymbol{T})$

لتكن $p(\cdot)$ دالة $2\pi-$ دورية وقابلة للقياس على المجال $\mathrm{T} = [0,2\pi]$

يُقال عن الدالة $p(\cdot)$ أنها تنتمي للمجموعة $\mathcal{P}(\boldsymbol{T})$ إذا حققت الشرطان الآتيان:

$$1 \le p_- = \operatorname{ess}\inf_{x\in T} p(x) \le \operatorname{ess}\sup_{x\in T} p(x) = p_+ < \infty \tag{1}$$

$$|\mathrm{p}(\mathrm{x}) - \mathrm{p}(\mathrm{y})| \le \frac{\mathrm{c}}{-\ln(|x-y|)}, \quad \mathrm{x},\mathrm{y} \in [0,2\pi] \text{ و } , \mathrm{x} \ne \mathrm{y} \tag{2}$$

ويُقال أن $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(T)$ اذا تحقق الشرطان (1) و(2) و كان $1 < p_-$ أي أن

$$\mathcal{P}_0(T) = \{ p(\cdot) \in \mathcal{P}(T) : p_- > 1\} \tag{3}$$

تعريف2: [٥] فضاء ليبيغ الكلاسيكي $L^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{T})$ (Classical Lebesgue space)

يعرف فضاء ليبيغ الكلاسيكي $L^{\mathrm{p}}(T)$ حيث $\mathrm{T} = [0,2\pi]$ و $1 < \mathrm{p} < \infty$ بأنه مجموعة الدوال $2\pi-$ دورية f والقابلة للقياس على T والتي تحقق الشرط الآتي :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, \mathrm{dx} < \infty.$$

تعريف3: [١٩] فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير $\boldsymbol{L}^{\mathrm{p}(\cdot)}(\mathrm{T})$

(Lebesgue space with variable exponent)

يُعرف فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير $L^{\mathrm{p}(\cdot)}(T)$ حيث $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(T)$ بأنه مجموعة الدوال $2\pi-$ دورية f والقابلة للقياس على T والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\mathrm{m}_{p(.)}(f) = \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{dx} < \infty.$$

إنَّ فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير $L^{\mathrm{p}(\cdot)}(T)$ يصبح فضاء باناخ إذا عرف عليه النظيم الآتي [١٩]

$$\|f\|_{p(.)} = \inf\left\{\lambda > 0 : m_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \le 1\right\} \tag{4}$$

في الحالة الخاصة، التي يكون فيها $p(.)$ عدداً ثابتاً، أي $p(.) = p$ حيث $1 < p < \infty$ فإنَّ فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير يؤول إلى فضاء ليبيغ الكلاسيكي.

تعريف4: [4] فضاء غراند ليبيغ الكلاسيكي : (Classical Grand Lebesgue space)

ليكن $1 < \mathrm{p} < \infty$ عدداً ثابتاً. يُعرف فضاء غراند ليبغ الكلاسيكي $L^{\mathrm{p})}(T)$ مجموعة الدوال $2\pi-$ دورية f والقابلة للقياس على T والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\|f\|_{\mathrm{p})} = \sup_{0<\varepsilon<P_- -1} \varepsilon^{\frac{1}{P_- - \varepsilon}} \|f\|_{\mathrm{p}(\cdot)-\varepsilon} < \infty \tag{5}$$

تعريف5: [19] فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير:

(Grand Lebesgue spaces with variable exponent)

ليكن $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $\theta \geq 0$. يُعرف فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير $L^{p(\cdot),\theta}(T)$ بأنه مجموعة جميع الدوال $2\pi-$ دورية f والقابلة للقياس على T والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\|f\|_{p(\cdot),\theta} = \sup_{0<\varepsilon<P_--1} \varepsilon^{\frac{\theta}{P_--\varepsilon}} \|f\|_{p(\cdot)-\varepsilon} < \infty \tag{6}$$

إن فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير مع النظيم المعرف بالعلاقة (6) يشكل فضاء باناخ [19].

حالات خاصة في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير:

- إذا كانت $\theta = 0$ فإننا نحصل على فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير.
- إذا كانت $\theta = 0$ و $p(.)$ عدداً ثابتاً يحقق $1 \leq p(.) = p < \infty$ نحصل على فضاء ليبيغ الكلاسيكي.
- إذا كانت $p(.)$ عدداً ثابتاً يحقق $1 \leq p(.) = p < \infty$ فإن فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير يؤول إلى فضاء غراند ليبيغ الكلاسيكي.

تعريف6: [19] معامل الاستمرارية في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير:

(Modulus of continuity in Grand Lebesgue spaces with variable exponent)

لتكن $\theta > 0$ و $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $f \in L^{p(\cdot),\theta}(T)$. يُعرف معامل الإستمرارية للدالة f بالعلاقة:

$$\Omega(f,\delta)_{p(\cdot),\theta} = \sup_{|h|\leq\delta} \left\| \frac{1}{h}\int_0^h |f(.+t) - f(.)|\, dt \right\|, \qquad \delta > 0 \tag{7}$$

إن الدالة $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot),\theta}$ تحقق الخواص الآتية:

من أجل أي $f, g \in L^{p(\cdot),\theta}(T)$ فإن

$* \ \Omega(f+g,\delta)_{p(\cdot),\theta} \leq \Omega(f,\delta)_{p(\cdot),\theta} + \Omega(g,\delta)_{p(\cdot),\theta}$

$* \ \lim_{\delta\to 0} \Omega(f,\delta)_{p(\cdot),\theta} = 0$

$* \ \Omega(\lambda f,\delta)_{p(\cdot),\theta} = \lambda\, \Omega(f,\delta)_{p(\cdot),\theta}\ ,\ \lambda \epsilon \mathbb{N}$

تعريف7: [19] صف دوال ليبتشز $Lip(\alpha, p(\cdot), \theta)$ في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير:

ليكن $0 < \alpha \leq 1$ و $L^{p(\cdot),\theta}(T)$ فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير. يُعرف صف الدوال ليبتشز في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير $Lip(\alpha, p(\cdot), \theta)$ بأنه أسرة الدوال $f \in L^{P(\cdot),\theta}(T)$ حيث والتي تحقق $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot),\theta} = \mathcal{O}(\delta^{\alpha})$ أي،

$$Lip(\alpha, p(\cdot), \theta) = \{ f \in L^{P(\cdot),\theta}(T) : \Omega(f,\delta)_{p(\cdot),\theta} = \mathcal{O}(\delta^{\alpha}) \} \tag{8}$$

تعريف8: [9] متسلسلة فورييه: (Fourier series)

لتكن $f \in L^1(T)$ ولتكن

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{9}$$

متسلسلة فورييه للدالة f حيث الأمثال a_k و b_k تعطى بالعلاقات التالية:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt,\ \ k = 0,1,2,\dots \tag{10}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \sin(kt)\,dt,\ \ k = 1,2,3\ \dots \tag{11}$$

بوضع

$$u_0(f)(x) = \frac{a_0}{2}, \qquad u_k(f)(x) = (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad k = 1,2,\dots \tag{12}$$

فإن المجموع الجزئي لمتسلسلة فورييه (9) يعطى بالعلاقة الآتية:

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(f)(x), \quad n = 0,1,2,3,\dots \tag{13}$$

تعريف9: [9] مجاميع نورلاند $N_n(f)(x)$ (Norlund sums)

لتكن $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. تُعرف مجاميع نورلاند للمجموع $s_n(f)(x)$ بالعلاقة:

$$N_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m} s_m(f)(x) \tag{14}$$

حيث $P_n = \sum_{m=0}^{n} p_m$ ونصطلح أن: $p_{-1} = P_{-1} = 0$.

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $p_m = 1$ لكل $m = 0,1,2,\dots.$ فإن مجاميع نورلاند $N_n(f)(x)$ تؤول إلى مجاميع سيزارو (Cesaro sums) التي تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} S_m(f)(x) \tag{15}$$

تعريف 10: [12] مجاميع نورلاند المعدَّلة $N_n^{\lambda}(f)(x)$ **(Modified Norlund sums)**

لتكن $(\lambda(n))_{n=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة تماماً من الأعداد الصحيحة الموجبة. تُعرف مجاميع نورلاند المعدَّلة $N_n^{\lambda}(f)(x)$ بالعلاقة الآتية:

$$N_n^{\lambda}(f)(x) = \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} S_m(f)(x) \tag{16}$$

حيث

$$P_n = \sum_{m=0}^{n} p_m \tag{17}$$

ونصطلح أن $p_{-1} = P_{-1} = 0$

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $p_m = 1$ لكل $m = 0,1,2,\dots$ فإن مجاميع نورلاند المعدَّلة $N_n^{\lambda}(f)(x)$ تؤول إلى مجاميع سيزارو المعدَّلة (Modified Cesaro sums) $\sigma_n^{\lambda}(f)(x)$ التي تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\sigma_n^{\lambda}(f)(x) = \frac{1}{\lambda(n) + 1} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} S_m(f)(x) \qquad (18)$$

تعريف 11: [18-12-9] بعض صفوف المتتاليات:

- صفوف المتتاليات AMDS و AMIS:

لتكن $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. عندئذ يُقال عن $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ أنها تنتمي للصف AMDS (أو للصف AMIS) إذا وُجد عدد ثابت موجب K متعلق فقط بالمتتالية $(pn)_{n=0}^{\infty}$ بحيث أنه من أجل كل $n \geq m$ فإن: $p_n \leq Kp_m$ (أو $p_n \geq Kp_m$)

- صفوف المتتاليات AMDUMS و AMIUMS:

لتكن $B_{n,k} = \frac{1}{(k+1)P_n} \sum_{i=n-k}^{n} p_{n,i}$ إذا كانت المتتالية $(B_{n,k})$ تنتمي الى الصف AMDS (أو للصف AMIS) عندئذٍ يقال أن المتتالية (p_n) تنتمي للصف AMDUMS (أو للصف AMIUMS).

- صفوف المتتاليات $\lambda -$ AMDUMS و $\lambda -$ AMIUMS:

لتكن $B_{\lambda(n),k} = \frac{1}{(k+1)P_{\lambda(n)}} \sum_{i=\lambda(n)-k}^{\lambda(n)} p_i$. إذا كانت المتتالية $(B_{\lambda(n),k})$ تنتمي الى الصف AMDS (أو للصف AMIS) فانه يقال أن المتتالية $(p_n)_{n\geq 1}$ تنتمي للصف $\lambda -$ AMDUMS (أو للصف $\lambda -$ AMIUMS).

في الحالة الخاصة التي يكون فيها λ(n) = n حيث n = 1, 2, . . . نجد أن:

$\lambda -$ AMDUMS = AMDUMS كما أن $\lambda -$ AMIUMS = AMIUMS

أي أن الصف $\lambda -$ AMDUMS (أو الصف $\lambda -$ AMIUMS) هو يطابق الصف AMDUMS (أو للصف AMIUMS) عندما $\lambda(n) = n$.

بغية الوصول إلى الهدف الرئيسي في هذه المقالة قدمنا بعض التمهيديات اللازمة:

تمهيدية1: **[19]** لتكن $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $f \in Lip(1, p(\cdot), \theta)$ و $\theta > 0$ و $s_n(f)$ المجموع الجزئي لمتسلسلة فورييه للدالة f المعرف بالعلاقة (13) و $\sigma_n(f)$ مجموع سيزارو للدالة f المعرف بالعلاقة (15) عندئذٍ من أجل أي عدد طبيعي n يكون التقدير الآتي محققاً:

$$\| \sigma_n(f) - s_n(f) \|_{p(.),\theta} = \mathcal{O}(n^{-1}), n = 1, 2, \ldots \qquad (19)$$

تمهيدية2: **[19]** لتكن $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $0 < \alpha < 1$ و $f \in Lip(\alpha, p(\cdot), \theta)$ حيث $\theta > 0$ و $s_n(f)$ المجموع الجزئي لمتسلسلة فورييه للدالة f المعرف بالعلاقة (13) عندئذٍ يكون التقدير الآتي محقق:

$$\| f - s_n(f) \|_{p(.),\theta} = \mathcal{O}(n^{-\alpha}), n = 1, 2, \ldots \qquad (20)$$

تمهيدية3: **[9]** لتكن (p_n) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة وتحقق أحد الشرطين الآتيين:

i- $(p_m) \in \lambda -$ AMDUMS أو

ii- $(p_m) \in \lambda -$ AMIUMS و $(\lambda(n) + 1)\, p_{\lambda(n)} = \mathcal{O}(p_{\lambda(n)})$

فإن المساواة الآتية محققة من أجل أي عدد α حيث $0 < \alpha < 1$

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{\lambda(n)} \frac{p_{\lambda(n)-k}}{(k+1)^{\alpha}} = \mathcal{O}\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{(\lambda(n)+1)^{\alpha}}\right) \qquad (21)$$

تمهيدية4: **[9]** **لتكن** (p_m) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة و $(\lambda(n))_{n=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة تماماً من الأعداد الصحيحة الموجبة. و K عدد حقيقي موجب عندئذٍ الخواص التالية محققه:

i)–إذا كانت $(p_m) \in \mathrm{AMDS}$ فإن $(p_m) \in K - \mathrm{AMIUMS}$

ii)– إذا كانت $(p_m) \in \mathrm{AMIS}$ فإن $(p_m) \in \mathrm{K} - \mathrm{AMDUMS}$

iii)– إذا كانت $\sum_{i=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta\left(\frac{p_i}{P_{\lambda(n)}}\right)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$ فإن

$$\sum_{i=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta\left(B_{\lambda(n),i}\right)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

iv)– إذا كانت $\sum_{i=1}^{\lambda(n)-1} i\left|\Delta\left(\frac{p_i}{P_{\lambda(n)}}\right)\right| = \mathcal{O}(1)$ فإن

$$\sum_{i=0}^{\lambda(n)-2}\left|\Delta\left(B_{\lambda(n),i}\right)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

حيث $\Delta_m p_{i,m} = p_{i,m} - p_{i,m+1}$ ، $\Delta p_i = p_i - p_{i+1}$.

<u>تمهيدية5:</u> [19] ليكن $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $0 < \alpha < 1$ و $f \in Lip(\alpha, p(\cdot), \theta)$ ولتكن $(p_n)_0^\infty$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. عندئذ إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

i)– $(p_n)_0^\infty \in \mathrm{AMDS}$ أو

ii)– $(n+1)p_n = \mathcal{O}(p_n)$ و $(p_n)_0^\infty \in \mathrm{AMIS}$

فإن التقدير الآتي محقق:

$$\| f - N_n(f) \|_{p(x),\theta} = \mathcal{O}(n^{-\alpha}).$$

<u>تمهيدية6:</u> [19] ليكن $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $f \in Lip(\alpha, p(\cdot), \theta)$ و $\theta \geq 0$ ولتكن $(p_n)_0^\infty$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. عندئذ إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

i) $\sum_{k=1}^{n-1}|\Delta p_k| = \mathcal{O}(\frac{P_n}{n})$ أو

ii) $\sum_{k=1}^{n-1}k|\Delta p_k| = \mathcal{O}(P_n)$

iii) فإن التقدير الآتي محقق

iv) $\| f - N_n(f) \|_{p(x),\theta} = \mathcal{O}(n^{-1}),$

$n = 1, 2, \ldots.$

حيث $N_n(f)$ مجاميع نورلاند المعرفة بالعلاقة (14).

نعرض فيما يأتي النتائج و المبرهنات التي تم التوصل إليها في هذه المقالة والتي تختص بتقريب الإشارات (كدوال) في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير بمجاميع نورلاند المعدلة:

<u>مبرهنة1:</u> ليكن $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $0 < \alpha < 1$ و $f \in Lip(\alpha, p(\cdot), \theta)$ و $N_n^\lambda(f)$ مجاميع نولاند المعدَّلة المعرفة بالعلاقة (16) ولتكن $(p_n)_0^\infty$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. عندئذ إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

i)– $(p_n)_0^\infty \in \mathrm{AMD}UMS$ أو

ii)– $(\lambda(n)+1)p_n = \mathcal{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ و $(p_n)_0^\infty \in \mathrm{AMIUMS}$

فإن التقدير الآتي محقق :

$$\| f - N_n^\lambda(f) \|_{p(.),\theta} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\lambda(n)+1)^\alpha}\right), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

البرهان:

بالإستفادة من العلاقة (17) نجد أن:

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} = \sum_{i=0}^{\lambda(n)} p_i = P_{\lambda(n)}$$

وبالتالي يمكننا كتابة الدلة f بالشكل الآتي:

$$f(x) = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} f(x)$$

باستخدام العلاقة (16) نجد أن:

$$f(x) - N_n^{\lambda}(f)(x) = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m}\{f(x) - S_m(f)(x)\}$$

بأخذ نظيم لطرفين المساواة الأخيرة نحصل على أن:

$$\| f - N_n^{\lambda}(f) \|_{p(.),\theta} \leq \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \| f - S_m(f) \|_{p(.),\theta}$$

وبالاستفادة من العلاقة (20) نلاحظ أن:

$$\frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \| f - S_m(f) \|_{p(.),\theta} = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \mathcal{O}\left(\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} (m+1)^{-\alpha} \right)$$

وبتحقق الشرط (ii) يكون الشرط اللازم في التمهيدية 3 محقق وبالتالي بالإستفادة من العلاقة (21) نجد أن:

$$\frac{1}{P_{\lambda(n)}} \mathcal{O}\left(\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} (m+1)^{-\alpha} \right) = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \mathcal{O}\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{(\lambda(n)+1)^{\alpha}} \right)$$

$$= \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\lambda(n)+1)^{\alpha}} \right)$$

وبذلك نحصل على التقدير الآتي:

$$\| f - N_n^{\lambda}(f) \|_{p(.),\theta} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\lambda(n)+1)^{\alpha}} \right).$$

<u>**مبرهنة 2**</u> : لتكن $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $f \in Lip(1, p(\cdot), \theta)$ و $\theta \geq 0$ و $N_n^{\lambda}(f)$ مجاميع نولاند المعدَّلة المعرفة بالعلاقة (16) ولتكن $(p_n)_0^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. عندئذ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left| \Delta_m B_{\lambda(n),m} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda(n)} \right)$$

فإنه من أجل أي عدد طبيعي $n = 1,2,3, \dots$ يكون التقدير الآتي محقق

$$\| f - N_n^{\lambda}(f) \|_{p(.),\theta} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda(n)} \right).$$

البرهان:

لنضع

$$E_n^{\lambda}(f)(x) = N_n^{\lambda}(f)(x) - f(x)$$

أي أن:

$$E_n^{\lambda}(f)(x) = \frac{1}{\mathrm{P}_{\lambda(\mathrm{n})}} \sum_{\mathrm{m}=0}^{\lambda(\mathrm{n})} \mathrm{p}_{\lambda(\mathrm{n})-\mathrm{m}} \{S_m(f)(x) - f(x)\}$$

باستخدام تحويل آبل يمكننا أن نكتب

$$E_n^{\lambda}(f)(x) = \sum_{m=0}^{\lambda(n)-1} \{S_m(f)(x) - S_{m+1}(f)(x)\} \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{i=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-i} + S_{\lambda(n)}(f)(x) - f(x)$$

وللاختصار سنستخدم الرمز

$$S_{m+1}(f)(x) - S_m(f)(x) = A_{m+1}(f)(x)$$

وبالاستفادة من التعريف (11) نجد أن:

$$E_n^{\lambda}(f)(x) = - \sum_{m=0}^{\lambda(n)-1} \{(m+1)A_{m+1}(f)(x)\} B_{\lambda(n),m} + S_{\lambda(n)}(f)(x) - f(x)$$

وبالاستفادة من المساواة الآتية

$$B_{\lambda(n),\lambda(n)-1} = \frac{1}{\lambda(n) P_{\lambda(n)}} \sum_{i=1}^{\lambda(n)} p_i$$

وباستخدام تحويل آبل نجد أن:

$$E_n^{\lambda}(f)(x) = - \sum_{m=0}^{\lambda(n)-2} (B_{\lambda(n),m} - B_{\lambda(n),m+1}) \sum_{j=0}^{m} (j+1) A_{j+1}(f)(x)$$

$$- \frac{1}{\lambda(n) P_{\lambda(n)}} \sum_{i=1}^{\lambda(n)} p_i \sum_{j=0}^{\lambda(n)-1} (j+1) A_{j+1}(f)(x) + S_{\lambda(n)}(f)(x) - f(x)$$

بأخذ النظيم لطرفي العلاقة الأخيرة وباستعمال المساواة الآتية:

$$\sum_{j=0}^{m} (j+1) A_{j+1}(f)(x) = \sum_{j=1}^{m+1} (j) A_j(f)(x)$$

باستخدام الرمز $\mathrm{B}_{\lambda(n),m} - \mathrm{B}_{\lambda(n),m+1} = \Delta \mathrm{B}_{\lambda(n),m}$ يكون لدينا:

$$\left\| E_n^{\lambda}(f) \right\|_{p(.),\theta} \leq - \sum_{\mathrm{m}=0}^{\lambda(\mathrm{n})-2} |\Delta \mathrm{B}_{\lambda(n),m}| \sum_{j=1}^{m+1} \left\| (j) A_j(f) \right\|_{p(.),\theta}$$

$$- \frac{1}{\lambda(n)} \sum_{j=1}^{\lambda(\mathrm{n})} \left\| (j) A_j(f) \right\|_{p(.),\theta} + \left\| S_{\lambda(\mathrm{n})}(f) - \mathrm{f}(\mathrm{x}) \right\|_{p(.),\theta}$$

وبما أن:

$$\sum_{j=1}^{\lambda(\mathrm{n})} (j) A_j(f)(x) == \sum_{i=0}^{\lambda(\mathrm{n})} S_i + (\lambda(\mathrm{n}) + 1) S_{\lambda(\mathrm{n})}$$

باستخدام العلاقة (18) نجد أن:

$$\sum_{j=1}^{\lambda(n)}(j)A_j(f)(x)=(\lambda(n)+1)(S_{\lambda(n)}(f)(x)-\sigma_{\lambda(n)}(f)(x))$$

بأخذ النظيم لطرفي المساواة الأخيرة وباستخدام التمهيدية (1) نحصل على أن:

$$\sum_{j=1}^{\lambda(n)}\left\|(j)\,A_j(f)(x)\right\|_{p(.),\theta}=\boldsymbol{\mathcal{O}}(1)$$

ومن التمهيدية (2) والتقدير الأخير يكون لدينا

$$\left\|E_n^{\lambda}(f)(\,x)\right\|_{p(.),\theta}\ =\boldsymbol{\mathcal{O}}\left(\sum_{m=0}^{\lambda(n)-2}\left|\Delta B_{\lambda(n),m}\right|\right)+\boldsymbol{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

ولما كان الشرط الآتي محقق من الفرض

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left|\Delta B_{\lambda(n),m}\right|\ =\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

نجد أن:

$$\left\|E_n^{\lambda}(f)(x)\right\|_{p(.),\theta}=\|f\ -\ N_n^{\lambda}(f)\|_{p(.),\theta}=\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

نتائج أساسية

من المبرهنتين (1) و (2) توصلنا إلى العديد من النتائج الهامة نلخصها فيما يأتي:

•

وضع $\lambda(n)=n$ في المبرهنتين (1) و (2) نحصل على تقريب دوال فضاءغراند ليبيغ ذي الأس المتغير بمجاميع نورلاند $N_n(f)$ وفق الآتي:

نتيجة1: ليكن $p(.)\in\mathcal{P}_0(T)$ و $0<\alpha<1$ و $f\in Lip(\alpha,p(\cdot),\theta)$ و $N_n(f)(x)$ مجاميع نولاند ولتكن $(p_n)_0^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. عندئذ إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

i)− $(p_n)_0^{\infty}\in$ AMDUMS أو

ii)− $(n+1)p_n=\mathcal{O}(P_n)$ و $(p_n)_0^{\infty}\in$ AMIUMS

فإن التقدير الآتي محقق:

$$\|f\ -\ N_n(f)\|_{p(.),\theta}=\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right),\qquad n=0,1,2,\ldots$$

نتيجة2: لتكن $p(.)\in\mathcal{P}_0(T)$ و $f\in Lip(1,p(\cdot),\theta)$ و $\theta\geq 0$ و $N_n(f)(x)$ مجاميع نولاند ولتكن $(p_n)_0^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. عندئذ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m B_{n,m}\right|\ =\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

فإنه من أجل أي عدد طبيعي $n=1,2,3,\ldots$ يكون التقدير الآتي محقق

$$\|f\ -\ N_n(f)\|_{p(.),\theta}=\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

بوضع $\theta = 0$ في المبرهنتين (1) و (2) نحصل على تقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير بمجاميع نورلاند المعدَّلة $N_n^{\lambda}(f)$.بالشكل الآتي:

نتيجة3: ليكن $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $0 < \alpha < 1$ و $f \in Lip(\alpha, p(\cdot))$ و $N_n^{\lambda}(f)$ مجاميع نولاند المعدَّلة ولتكن $(p_n)_0^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة، عندئذ إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

i)– $(p_n)_0^{\infty} \in \mathrm{AMD}UMS$ أو

ii)– $(\lambda(n)+1)p_n = \mathcal{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ و $(p_n)_0^{\infty} \in \mathrm{AMIUMS}$

فإن التقدير الآتي محقق:

$$\| f - N_n^{\lambda}(f) \|_{p(.)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\lambda(n)+1)^{\alpha}}\right), n = 0,1,2,\dots$$

نتيجة4: لتكن $p(.) \in \mathcal{P}_0(T)$ و $f \in Lip\left(1, p(\cdot)\right)$ و $N_n^{\lambda}(f)$ مجاميع نولاند المعدَّلة ولتكن $(p_n)_0^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. عندئذ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{n}-1} \left|\Delta_m \mathrm{B}_{\lambda(n),m}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

فإنه من أجل أي عدد طبيعي $\mathrm{n} = 1,2,3,\dots$ يكون التقدير الآتي محقق:

$$\| f - N_n^{\lambda}(f) \|_{p(.)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right).$$

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذه المقالة بتقريب الإشارات (كدوال) في فضاء غراند ليبيغ ذي الأس المتغير بمجاميع نورلاند المعدَّلة وناقشنا دوال فضاء ليبتشيز $lip(\alpha, p(.), \theta)$ من أجل $0 < \alpha < 1$ ثم من أجل $\alpha = 1$ وبالاستفادة من المبرهنات التي توصلنا إليها قدمنا العديد من النتائج التي تختص بتقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير وفضاء غراند ليبيغ الكلاسيكي. ونوصي بمتابعة الدراسة في تقريب الإشارات (كدوال) بكثيرات حدود مثلثية أخرى كمجاميع ريس أو بدراسة تقريب دوال فضاءات أكثر عمومية مثل فضاءات غراند ليبيغ ذي الأس المتغير الموزنة.

References:

[1] ARMITAGE, D. H.; MADDOX, I. J. *A new type of Cesàro mean, Analysis,* Vol. 9, No., 1989, 1, 195-204.
[2] CRUZ-URIBE; D.; FIORENZA, A. 2013, *Variable Lebesgue spaces foundation and harmonic analysis,* New York, Birkhäuser, 316.
[3] CHANDRA, P. *Trigonometric approximation of functions in L^p-norm, J. Math. Anal. Appl.*,Vol. 275, 2002, 13-26
[4] FIORENZA, A. *Duality and reflexivity in grand lebesgue spaces, Collect. Math*. , vol. 51, no. 2, 2000, 131-148.
[5] GUVEN, A.; ISRALOV, D. *Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$, J. Math. Inequal.*, Vol. 4, No. 2, 2010, 285-299.
[6] Iwaniec, T.; Sbordone, C. *Riesz transform and elliptic PDE's with VMO coefficients, J. Anal. Math.* , vol. 74, 1998, 183–212.
[7] KINJ, A.; ALI, M. ; MAHMOUD, S. *Approximation Properties of de la ValléePoussin sums in Morrey spaces, SQU Journal for Science,* Vol. 22, No. 2, 2017, 89-95.
[8] KOKILASHVILI, V.M.; MESKHI, A. *Maximal and Calder ón–Zygmund operators in grand variable exponent Lebesgue spaces, Georgian Math J.,* vol.21, no. 4, 2014, 447–461.
[9] KRASNIQI, X. z. *Trigonometric approximation of (signals)functions by Nörlund type means in the variable space, Palestine Journal of Mathematics*, vol. 6, no. 1, 2017, 84 -93.
[10] LEINDLER, L. *Trigonometric approximation of functions in L^p-norm, J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 302, 2005, 129-136.
[11] MISHRA, V. N. *; MISHRA, L. N. Trigonometric approximation of signal (function) in L^p-norm, Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol.7, no. 19, *2012,* 909-918.
[12] MITTAL, M. L.; SINGH, M. V. *Approximation of signals (functions) by trigonometric polynomials in L^p -norm, Int. J. Math. Math. Sci*., 2014, 6.
[13] MOHAPATRA, R. N. ; RUSSELL D. C., *Some direct and inverse theorems in approximation of functions, J. Aust. Math. Soc. (Ser. A)*, Vol. 34, 1983, 143-154.
[14] OSIKIEWICZ, J. A. *Equivalence results for Cesàro submethods, Analysis,* Vol. 20, No. 1, 2000, 35-43.
[15] QUADE, E. S. *Trigonometric approximation in the mean, Duke Math. J.,* Vol.3, 1937, 529-542.
[16] SBORDONE, C. *Nonlinear elliptic equations with right hand side in nonstandard spaces, Rend Sem Math Fis*, 1998, 361–368.
[17] SHARAPUDINOV, I. I. *Some questions of approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent, Seria Mathematicheskaya Monografia*, Viladikavkaz, Itogi Nauki Yug Rossii, 2012,.
[18] SZAL, B. *Trigonometric approximation by Nörlund type means in L^p-norm, Comment. Math. Univ. Carolin*., Vol. 50, No. 4, 2009, 575-589.
[19] TESTICI, A.; ISRAFILOV D. M. *Approximation by matrix transforms in generalized grand Lebesgue spaces with variable exponent, Applicable analysis,* Vol. 100, no.4, 2019, 819-834.