مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٥) العدد (٢) 2021
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (5) No. (2) 2021

النشر بسلاسل فوريه المعممة في الفضاءات L_p وفق الدوال الخاصة

الدكتور إبراهيم إبراهيم*

الدكتور نضال حسن**

جُلّنار سليمان***

(تاريخ الإيداع ١١ / ٢ / ٢٠٢١ . قُبل للنشر ٢٢ / ٦ / ٢٠٢١)

الملخّص:

نوسع في هذا البحث مفهوم النشر بسلاسل فوريه وفق جملة متعامدة منظمة من فضاء هيلبرت إلى فضاء باناخ . كتطبيق على هذا النشر المعمم أخذنا فضاء هيلبرت L_2 وفضاء باناخ L_p ، ودرسنا النشر المعمم وفق دوال هرميت ودوال لاجير ، وبذلك نكون قد وسعنا النشر من المجال $\frac{4}{3} < p < 4$ إلى المجال $1 \le p < \infty$.

الكلمات المفتاحية: سلاسل فوريه ، الدوال الخاصة ، كثيرات الحدود المتعامدة ، فضاء هيلبرت ، فصاء باناخ.

* أستاذ _ قسم الرياضيات _كلية العلوم _جامعة البعث_حمص _سوريا

** أستاذ_ قسم الرياضيات _كلية العلوم _جامعة طرطوس_طرطوس_سوريا

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير)_قسم الرياضيات_كلية العلوم_ جامعة طرطوس_طرطوس_سوريا

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٥) العدد (٢) 2021
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (5) No. (2) 2021

Eigen function Expansions in Generalized Fourier Series in the Spaces L_p

Dr.Ibrahem Ibrahem*
Dr.Nedal hasan**
Jollanar sliman***

(Received 11 / 2 / 2021 . Accepted 22 / 6 / 2021)

Abstract

In this paper we generalize the concept of expansions in Fourier series with respect to an orthonormal system in Hilbert space to Banach space. As application we assumed the Hilbert space L_2 and Banach space L_p, and the systems Hermite and Laguerre functions. Then the expansions interval

$\frac{4}{3} < p < 4$is extended to $1 \leq p < \infty$.

Key Words: Fourier Series , Special Functions , Orthogonal Polynomials , Hilbert Space , Banach Space.

* Pro .In Math Departement_Faculty of Sciences_Al Baath University_Homs_Syria
** Dr.In Math Department _Faculty of Sciences_Tartous University_Tartous_Syr
*** Higher student(Master)_In Mathematics Department_Tartous University_Tartous_Syria

مقدمة:

يتألف الفضاء $L_p\,[a,b]$ من أجل $1 \le p < \infty$ من الدوال $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ القيوسة على المجال $[a,b]$ والتي تحقق مايلي (حيث التكامل مأخوذ كـ تكامل لوبيغ):

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |\, f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty . \qquad (1)$$

يُسمى $\|f\|_{L_p}$ نظيم الدالة $f(x)$، وسوف نكتب فقط $\|f\|$.

إن $L_p\,[a,b]$ فضاء باناخ مع النظيم(1)، كما أن $L_2\,[a,b]$ فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي:

$$\langle f\,, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x) dx \,. \qquad (2)$$

إذا كانت $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة وتامة في الفضاء $L_2\,[a,b]$ ، فيمكن نشر كل دالة من هذا الفضاء بسلسلة فورييه من الشكل:

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle f\,,\, u_n\rangle\, u_n(x) \,. \qquad (3)$$

وتكون السلسلة متقاربة من $f(x)$ نفسه، حيث إن $\langle f\,,\, u_n\rangle$ عوامل فورييه.

إن هذا النشر ليس صحيحاً بالضرورة في الفضاء $L_p\,[a,b]$ عندما $p \neq 2$ (قد يوجد نشر مشابه من أجل بعض قيم p كما سنلاحظ أدناه). تتحقق أيضاً مساواة بارسيفال:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, u_n\rangle|^2. \qquad (4)$$

نعتبر أن الجملة $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ تنتمي للفضاء $L_p\,[a,b]$، ونعرف عوامل فورييه لدالة $f(x)$ من هذا الفضاء بالشكل المألوف:

$$a_n(f) = \int_a^b f(x) u_n(x) dx \,. \qquad (5)$$

فيكون للدالة $f(x)$ سلسلة فورييه شكلية (وتسمى أيضاً نشر فورييه الشكلي):

$$f(x) \;\sim\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\, u_n(x) \,. \qquad (6)$$

هذه السلسلة قد تتقارب في الفضاء $L_p\,[a,b]$ من الدالة $f(x)$ وذلك من أجل بعض قيم p وربما لاتتقارب من أجل قيم أخرى لـ p.

سنعتبر أن الجملة $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق الشروط الآتية (هذه الشروط تحققها معظم الدوال الكلاسيكية):

1- $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ كلية(total)في $L_p\,[a,b]$ وهذا يعني أنه إذا كان:

$$a_n(f) = 0 \;\;;\;\; \forall\, n = 1, 2, \dots .$$

فإن $f = 0$.

2- $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية(fundamental)في $L_p\,[a,b]$ إذاكانت مجموعة التراكيب الخطية لها كثيفة.

3- السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \|u_n\|_{L_p}^2$ متقاربة من أجل كل عدد طبيعي k .

نريد في هذا البحث تعميم النشر السابق بحيث إن السلسلة تتقارب من أجل كل قيم p . من أجل ذلك سنشكل فضاء جزئي من الفضاء $L_2\,[a,b]$ عناصره سلاسل فورييه لها ميزاتها الخاصة ، نرمز له بـ $\mathfrak{D}$، ثم نشكل الفضاء الثنوي له ورمزه $\mathfrak{D}'$، ونثبت أن عناصره هي أيضاً سلاسل فورييه لها خواصها.

أهمية البحث وأهدافه:

في هذا البحث نوسع عملية النشر بسلاسل فورييه في فضاءات L_p، حيث نعرض بعض الأمور المتعلقة بالنشر المعمم في فضاءات باناخ ومن ثم نخصص الدراسة على النشر بسلاسل فورييه وفق دوال لاجير ودوال هيرميت. إن النشر التقليدي بهذه الدوال يكون ممكناً من أجل قيم في مجال صغير نسبياً (سنذكره لاحقاً في المكان المناسب أدناه) ، وسوف نجد من خلال التعميم أن النشر ممكن من أجل كل القيم $1 \le p < \infty$. [11,10,5] .

للوصول إلى الهدف المنشود يلزمنا فضاء خطي ، نسميه فضاء الاختبار، سنرمز له بـ $\mathfrak{D}$، ومن ثم نوجد الفضاء الثنوي له $\mathfrak{D}'$. وهذا المبدأ يساير طريقة دمج الفضاءات L_p في فضاء التوزيعات الكلاسيكية التي أوجدها العالم سوبوليف الذي أوجد فضاءات باناخ التي عناصرها توزيعات وسميت باسمه. أما الجديد في هذا البحث فهو اختيار عناصر الفضاء $\mathfrak{D}$على شكل سلاسل فورييه وفق جملة متعامدة منظمة، ومنها نجد أن عناصر الفضاء $\mathfrak{D}'$ هي أيضاً سلاسل فورييه وفق نفس الجملة ، ولكن كل منهما يحقق شروطاً معينة ، وسوف نثبت أن $\mathfrak{D}'$ يحوي كل الفضاءات $L_p\,[a,b]$. [7,6,5] .

طرائق البحث وموارده:

اعتمدنا في دراسة هذا البحث على بعض المفاهيم والتعاريف الرياضية المعروفة وقد استخدمنا عدة طرق رياضية تعتمد على خواص النشر بسلاسل فورييه وبالاستفادة من تعريف بعض الفضاءات .

فضاء الاختبار $\mathfrak{D}$وفضاء التوزيعات $\mathfrak{D}'$

فيما يلي نريد تشكيل فضاء تبولوجي خطي $\mathfrak{D}$ ونوجد الفضاء الثنوي له $\mathfrak{D}'$ لكي نتمكن من توسيع مفهوم النشر بسلاسل فورييه ، حيث نحصل على فضاء أوسع من الفضاء $L_2\,[a,b]$، بل أنه يحوي كل الفضاءات $L_p\,[a,b]$ ، حيث$1 \le p < \infty$.[7,6] .

(1−1)تعريف:

نقول عن متتالية$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر $L_2\,[a,b]$ إنها :

(أ) تشكل جملة متعامدة في $L_2\,[a,b]$ إذا كان $\langle \mathrm{u_n}, \mathrm{u_m} \rangle = 0$ من أجل $n \ne m$.

(ب)منظمة إذا كان $\|\mathrm{u_n}\| = 1$ من أجل $n = 1,2,3, \ldots.$

(2−1)تعريف:

نقول عن جملة متعامدة منظمة $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ إنها تامة في $L_2\,[a,b]$ إذا تحققت مساواة بارسيفال من أجل جميع عناصر $L_2\,[a,b]$

(3−1) تعريف:

لتكن $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة وتامة في الفضاء$L_2\,[a,b]$ (كما ورد أعلاه)

لنضع :

$$\mathfrak{D} = \left\{ f \in L_2\,[a,b] : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle f, u_n \rangle|^2 < \infty \quad ; \quad \forall\, k = 0,1,2,\dots \right\}$$

نسمي $\mathfrak{D}$ فضاء الاختبار.

(2−3) ملاحظة:[5]

(أ) المجموعة $\mathfrak{D}$ ليست خالية ، فهي تحوي على الأقل الدوال $\{u_n\}$ ، وينتج ذلك من كون الجملة $\{u_n\}$ متعامدة منظمة ،كما أنه من أجل كل m مثبت :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle u_m , u_n \rangle|^2 = m^{2k} \quad ; \quad (m = 1,2,\dots) \qquad (7)$$

بل إن $\mathfrak{D}$ تحوي كل التراكيب الخطية المنتهية $F = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n u_n$، ويكون

$$\|F|_k^2 = \sum_{n=1}^{N} n^{2k} |\,\alpha_n|^2 \quad ; \quad k = 0,1,2,\dots \qquad (8)$$

(ب)$\mathfrak{D}$فضاء خطي جزئي من $L_2\,[a,b]$.

(جـ) نضع:

$$\|f|_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle f, u_n \rangle|^2 \quad ; \quad f \in \mathfrak{D} \ , k = 0,1,2,\dots \qquad (9)$$

فنحصل على أسرة من أنصاف النظم$\left\{\|f|_k\right\}_{k=0}^{\infty}$على الفضاء $\mathfrak{D}$، وتحقق:

$$\|.\,|_0 \le \|.\,|_1 \le \|.\,|_2 \le \cdots. \qquad (10)$$

(د) نقول إن المتتالية $\{f_N\}$ متقاربة في $\mathfrak{D}$ من الدالة fإذا تحقق:

$$\|f_N - f|_k \ \longrightarrow 0 \quad ; \quad \mathrm{N} \to \infty \ \ , \ \ k = 0,1,2,\dots \qquad (11)$$

والآن نستخرج أهم خواص الفضاء $\mathfrak{D}$ التي ستلزمنا لاحقاً.

(2−2) مبرهنة:

$\mathfrak{D}$ فضاء خطي متعدد أنصاف النُظُم, هو تام مع الأسرة$\left\{\|f|_k\right\}_{k=0}^{\infty}$.

الإثبات:

لتكن $\{f_N\}$ متتالية كوشي في $\mathfrak{D}$. هذا يعني أن :

$\|f_{\boldsymbol{N}} - f_M|_k < \varepsilon \ ; \ N > M > N_0(\varepsilon) \ ; \ k = 0,1,2,\dots \quad (\varepsilon$

بما أن الدوال f_N تنتمي للفضاء $L_2\,[a,b]$ فيكون لدينا بحسب مساواة بارسيفال (4):

$$\|f_N - f_M\|_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_N - f_M, u_n\rangle|^2$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle f_N - f_M, u_n\rangle|^2$$
$$= \|f_N - f_M|_k^2 < \varepsilon^2 .$$

وينتج من ذلك أن المتتالية $\{f_N\}$ هي متتالية كوشي في $L_2\,[a,b]$. وبما أن هذا الفضاء تام فتكون المتتالية متقاربة ، ولنفرض :

$$\lim_{N\to\infty} f_N = f_0 \ , \quad (L_2\,[a,b] \text{ التقارب في})$$

عندما $N \longrightarrow \infty$ نجد أن :

$$\|f_0 - f_M\|_{L_2} \le \varepsilon \quad ; \quad N > N_0(\varepsilon).$$

لدينا الآن :

$$\|f_0 - f_M|_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle f_0 - f_M, u_n\rangle|^2 .$$

ولنثبت أن الطرف الأيمن أصغر من ε من أجل $M > N_0(\varepsilon)$.

ليكن m عدداً طبيعياً مثبتاً ، ولنكتب :

$$\sum_{n=1}^{m} n^{2k} |\langle f_0 - f_M, u_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{m} n^{2k} |\langle (f_0 - f_N) + (f_N - f_M), u_n\rangle|^2$$
$$\le 2\left(\sum_{n=1}^{m} n^{2k}\, |\langle f_0 - f_N, u_n\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{m} n^{2k}\, |\langle f_N - f_M, u_n\rangle|^2\right).$$

إن المجموع الثاني أصغر من ε^2 من أجل $N, M > N_0(\varepsilon)$ ، وبشكل مستقل عن K .

بالنسبة للمجموع الأول يمكن جعله أصغر (أو يساوي) ε^2 إذا ما اخترنا M كبير بشكل كاف وبشكل مستقل عن K، وبذلك يكون :

$$\sum_{n=1}^{m} n^{2k} |\langle f_0 - f_M, u_n\rangle|^2 \le 4\varepsilon^2 \quad ; \quad M > M_0(\varepsilon)$$

وبما أن الطرف الأيمن مستقل عن m فنجد عندما $K \longrightarrow \infty$ أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle f_0 - f_M, u_n\rangle|^2 \le 4\varepsilon^2 \quad ; \quad M > M_0(\varepsilon) .$$

وينتج من ذلك $(f_0 - f_M) \in \mathfrak{D}$، وبالتالي أيضاً :

$$f_0 = (f_0 - f_M) + f_M \in \mathfrak{D}$$

بذلك يكون:

$$\|f_0 - f_M|_k \le 2\varepsilon \quad ; \quad M > M_0(\varepsilon)$$

وينتج من ذلك أن المتتالية $\{f_N\}$ متقاربة في $\mathfrak{D}$ من f_0 . بذلك نحصل على المطلوب .

(3-2) مبرهنة :

A. كل دالة $f \in \mathfrak{D}$ يمكن نشرها بسلسلة فورييه من الشكل :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n\rangle u_n \qquad (13)$$

وهذه السلسلة متقاربة في $\mathfrak{D}$ من نفس الدالة f .

B. السلسلة من الشكل :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \quad ; \ a_n \in \mathbb{R} \qquad (14)$$

تكون متقاربة في $\mathfrak{D}$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي :

من أجل كل عدد صحيح غير سالب k تكون السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}|a_n|^2$ متقاربة .

فإن تحقق ذلك ورمزنا بـ f لمجموع السلسلة فيكون $a_n = \langle f, u_n \rangle$.

الإثبات :

(1)ليكن $f \in \mathfrak{D}$. عندئذ يكون$f \in L_2\,[a,b]$ ، وبالتالي يكون:

f

لنضع الآن :

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} \langle f, u_n \rangle u_n \quad ; \quad N = 1,2, \dots$$

فنجد أن $f_N \in \mathfrak{D}$ من أجل كل Nويكون لدينا :

$$f - f_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle f, u_j \rangle\, u_j$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_k^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle f - f_N, u_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle f, u_j \rangle \langle u_j, u_n \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{2k} |\langle f, u_n \rangle|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

لذلك يكون $f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} f$ في $\mathfrak{D}$. أي أن (13) صحيحة .

(2) لنفرض أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ متقاربة في $\mathfrak{D}$، ولنرمز لمجموعها بـ f . عندئذ :

$$\langle f, u_n \rangle = \langle \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j\,, u_n \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \langle u_j, u_n \rangle = a_n\,.$$

من ناحية ثانية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \left| \langle \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j, u_n \rangle \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |a_n|^2$$

ومنه نحصل على المطلوب .

(2−4) مبرهنة:

يصح الطمر المستمر:

$$\mathfrak{D} \hookrightarrow L_p\,[a,b] \quad ; \ 1 \le p < \infty. \qquad (15)$$

كما يصح النشر (في $L_p\,[a,b]$):

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n \rangle\, u_n\ . \qquad (16)$$

الإثبات :

ليكن $f \in \mathfrak{D}$، ولنأخذ بداية $p = 2$، فنحصل على المطلوب مباشرة من مساواة بارسيفال(4) والمتراجحات:

$$\|f\|_{L_2} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, u_n\rangle|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle f, u_n\rangle|^2 = \|f|_k^2 \ .$$

بذلك يكون $L_2\,[a,b] \hookleftarrow \mathfrak{D}$.

لنضع:

$$F_N = \sum_{n=1}^{N} \langle f, u_n\rangle\, u_n \ \ ; \quad N = 1, 2, \dots, \ \ f \in \mathfrak{D}\,,$$

فنجد أن $F_N \in L_p\,[a,b]$ من أجل $1 \le p < \infty$.

لدينا الآن من أجل $\varepsilon > 0$ و$N > M > N_0(\varepsilon)$ (بحسب متراجحة هولدر للمجاميع):

$$\begin{aligned} \|F_N - F_M\|_{L_p} &= \left\| \sum_{n=M+1}^{N} \langle f, u_n\rangle\, u_n \right\|_{L_p} \\ &\le \sum_{n=M+1}^{N} |\langle f, u_n\rangle|\, \|u_n\|_{L_p} \\ &= \sum_{n=M+1}^{N} n^k |\langle f, u_n\rangle|\, n^{-k} \|u_n\|_{L_p} \\ &\le \left(\sum_{n=M+1}^{N} n^{2k} |\langle f, u_n\rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=M+1}^{N} n^{-2k} \|u_n\|_{L_p}^2 \right)^{1/2} \\ &\le \ \varepsilon\, \|f|_k \ . \end{aligned}$$

من ذلك ينتج أن المتتالية $\{F_N\}$ متتالية كوشي في $L_p\,[a,b]$ ، فهي متقاربة، ولنفرض:

$$g = \lim_{N\to\infty} F_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle f, u_n\rangle\, u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n\rangle\, u_n \ .$$

من ناحية ثانية لدينا من أجل $m = 1, 2, \dots$:

$$\langle g, u_m\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n\rangle \langle u_n, u_m\rangle = \langle f, u_m\rangle$$

من ذلك ينتج أن $g = f$. بذلك تكون (16) صحيحة.

- ننتقل الآن لدراسة الفضاء الثنوي للفضاء $\mathfrak{D}$ (أي فضاء الداليات الخطية المستمرة على $\mathfrak{D}$).

(5-2) تعريف :

A. نرمز بـ $\mathfrak{D}'$ لفضاء الداليات الخطية المستمرة على الفضاء$\mathfrak{D}$، وسوف نرمز لعناصره بـ $T, S, \dots$ ، ونسميها توزيعات على $\mathfrak{D}$.

B. نقول عن متتالية توزيعات $\{T_N\}$ إنها متقاربة في $\mathfrak{D}'$ من التوزيعT إذا تحقق :

$$T_N(f) \xrightarrow[N\to\infty]{} T(f) \ \ ; \ \ \forall\, f \in \mathfrak{D}\,.$$

C. نقول عن توزيعين $T, S \in \mathfrak{D}'$ إنهما متساويان إذا كان :

$$T(f) = S(f) \quad ; \ \ \forall\, f \in \mathfrak{D} \ \ ,$$

ونكتب $T = S$.

بشكل خاص إذا كان $T(f) = 0$ من أجل أي $f \in \mathfrak{D}$ فنكتب $T = 0$ ونسميه التوزيع الصفري .

D. إذا كان $T \in \mathfrak{D}'$ فنسمي الأعداد $T(u_n)$ عوامل فوربيه للتوزيع T ونكتب:

$$a_n(T) = T(u_n) \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

(2−6) مبرهنة:

ليكن $T: \mathfrak{D} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ دالياً خطياً ،فيكون الشرطان التاليان متكافئان :

A. $T \in \mathfrak{D}'$.

B. يوجد عدد طبيعي k وعدد ثابت موجب C بحيث إن :

$$|T(f)| \leq C\|f|_k \quad ; \quad \forall f \in \mathfrak{D}. (17)$$

الإثبات :$(2) \Leftarrow (1)$: لتكن $\{f_N\}$ متتالية من عناصر $\mathfrak{D}$ ومتقاربة من f . عندئذ :

من كون T خطي بالفرض يكون لدينا :

$$|T(f_N) - T(f)| = |T(f_N - f)| \leq C\|f_N - f|_k \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

وهذا يعني أن T مستمر وبالتالي $T \in \mathfrak{D}'$.

$(1) \Leftarrow (2)$: لنفرض جدلاً عدم وجود العددين k , C بحيث تتحقق (17) . عندئذ :

توجد في $\mathfrak{D}$ متتالية $\{f_N\}$ بحيث يكون $|T(f_N)| = 1$ و :

$$1 = |T(f_N)| > N\ \|f_N|_N \quad ; \quad N = 1,2, \ldots$$

ولكن من أجل $k < N$ يكون لدينا بحسب (10) :

$$\|f_N|_k \leq \|f_N|_N < \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

وينتج من ذلك أن $f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ في $\mathfrak{D}$ ، وبالتالي $T(f_N) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. وهذا غير ممكن .

(2−7) ملاحظة : ليكن $f \in L_p\,[a, b]$، ولنعرف الدالي $T_f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ بالشكل :

$$T_f(\varphi) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}\,. \qquad (18)$$

واضح أن T_f خطي . وبحسب متراجحة هولدر و (15) يكون لدينا :

$$\begin{aligned} \left|T_f(\varphi)\right| &\leq \|f\|_{L_p}\|\varphi\|_{L_q} \quad ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &\leq c\ \|f\|_{L_p}\|\varphi|_k. \end{aligned}$$

وحسب المبرهنة $(2-7)$ يكون $T_f \in \mathfrak{D}'$.

لنأخذ الآن دالتين $f , g \in L_p\,[a, b]$، وليكن T_g و T_f التوزيعين الموافقين لهما.

فإذا كان $T_f = T_g$ فيكون لدينا :

$$T_{f-g}(\varphi) = \int_X [f(x) - g(x)]\,\varphi(x)dx = 0 \quad ; \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}.$$

وينتج من ذلك أن $f(x) - g(x) \overset{a.e}{=} 0$، أي أن $f = g$ في $L_p\,[a, b]$.

والآن نشكل التطبيق Φ :

$$\Phi : L_p\,[a, b] \to \mathfrak{D}' \quad ; \quad f \mapsto \Phi(f) = T_f \qquad (19)$$

فنجد أنه معرف جيداً (معرف من أجل كل الدوال في $L_p\,[a, b]$)ومتباين ، وبالتالي تصح المطابقة :

$$L_p\,[a, b] \ni f \leftrightarrow T_f \in \mathfrak{D}'. \qquad (20)$$

وبموجبها يمكن اعتبار $L_p\,[a,b]$ كفضاء جزئي من $\mathfrak{D}'$. أي أن كل دالة $f \in L_p\,[a,b]$ تمثل توزيعاً من $\mathfrak{D}'$، سنرمز له بـ f أيضاً ، $T_f = f$. لذلك يمكن كتابة (18) بالشكل :

$$f(\varphi) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}\,. \qquad (21)$$

بشكل خاص : إذا أخذنا $\varphi = u_n$ فيكون :

$$f(u_n) = \int_a^b f(x)\,u_n(x)dx = a_n(f) \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (22).$$

وهي عوامل فورييه (المألوفة) للدالة f المذكورة في(5).

من ناحية ثانية : إذا أخذنا $f = u_n$ نجد :

$$u_n(\varphi) = \int_a^b u_n(x)\varphi(x)dx = \langle \varphi, u_n \rangle \quad ; \quad n = 1,2, \ldots \qquad (23)$$

وهي عوامل فورييه (المألوفة) للدالة φ، حيث $\varphi \in \mathfrak{D} \subset L_2\,[a,b]$.

وبشكل خاص يكون لدينا من أجل $\varphi = u_m$:

$$u_n(u_m) = \int_a^b u_n(x)u_m(x)dx = \langle u_m, u_n \rangle = \delta_{n,m}\,. \qquad (24)$$

(8-2) مبرهنة :

A. كل توزيع $T \in \mathfrak{D}'$ يمكن نشره بسلسلة فورييه من الشكل :

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)u_n \quad ; \quad (a_n(T) = T(u_n)). \qquad (25)$$

B. السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$، حيث $a_n \in R$،تتقارب في $\mathfrak{D}'$ إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي k بحيث تكون السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2k}|a_n|^2$ متقاربة . فإن تحقق ذلك ورمزنا بـ T لمجموع السلسلة فيكون :

$$a_n = a_n(T) \quad ; \quad n = 1,2, \ldots$$

الإثبات :

A. ليكن $T \in \mathfrak{D}'$. عندئذ: بحسب المبرهنة (٢-٥) يكون لدينا من أجل أي $\varphi \in \mathfrak{D}$:

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, u_n \rangle u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, u_n \rangle\, T(u_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\varphi)a_n(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)\, u_n\right)(\varphi)\;. \end{aligned}$$

ومنه نحصل على (24) .

B. لتكن $\{\sum_{n=1}^{N} a_n u_n\}_{N=1}^{\infty}$ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$. عندئذ : من أجل أي $\varphi \in \mathfrak{D}$ يكون لدينا (بالاستفادة من (24) ومن متراجحة شفارتز):

$$\begin{aligned} \left|\left(\sum_{n=1}^{N} a_n u_n\right)(\varphi)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N} a_n u_n(\varphi)\right| \\ &= \left|\sum_{n=1}^{N} a_n \langle \varphi, u_n \rangle\right| \\ &\le \sum_{n=1}^{N} |a_n||\langle \varphi, u_n \rangle| \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-k} |a_n| \lambda_n^{k} |\langle \varphi, u_n \rangle|$$
$$\leq \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-2k} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{2k} |\langle \varphi, u_n \rangle|^2 \right)^{1/2}.$$

فإذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2k} |a_n|^2$ متقاربة ومجموعها C فيكون :

$$\left| \left(\sum_{n=1}^{N} a_n u_n \right)(\varphi) \right| \leq C\, \|\varphi|_k ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}.$$

وبما أن الطرف الأيمن مستقل عن Nفيكون لدينا عندما $N \to \infty$:

$$\left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \right)(\varphi) \right| \leq C \|\varphi|_k ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}\,.$$

وحسب المبرهنة (٢-٧) يكون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \in \mathfrak{D}'$، ولنرمز بـ T لمجموع السلسلة.

بالاستفادة من (25) يكون لدينا:

$$a_m(T) = T(u_m) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \right)(u_m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle u_n, u_m \rangle = a_m.$$

3- المؤثر التفاضلي وقواه

من المعلوم أن أغلب الدوال الكلاسيكية هي دوال ذاتية (خاصة) لمؤثرات تفاضلية موافقة لقيم ذاتية (خاصة) بكل مؤثر. في هذا البحث سندرس مؤثري هرميت ولاجير ونستفيد منها في تعميم النشر في الفضاء $L_p\,[a,b]$.

ليكن$A : D(A) \to L_2\,[a,b]$ مؤثراً خطياً موجباً محدداً وذو طيف نقطي بحت ، حيث$D(A)$ كثيفة في $L_2\,[a,b]$. سنفرض أيضاً أن دواله الذاتية هي الدوال $\{u_n\}$ وموافقة لقيم ذاتية λ_n تحقق:

$$c_1 n \leq \lambda_n \leq c_2\, n \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (17)$$

عندئذ يكون لدينا:

$$D(A) = \left\{ f \in L_2\,[a,b] : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle f, u_n \rangle|^2 < \infty \right\},$$
$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, u_n \rangle\, u_n \quad ; \quad f \in D(A).$$

نعرف القوى الصحيحة للمؤثر بالشكل:

$$A^0 = I \ (\text{مؤثر المطابقة}) \ , \ A^k = AA^{k-1} \ ; \ k = 1, 2, \ldots$$

فيكون لدينا:

$$D(A^k) = \left\{ f \in L_2\,[a,b] : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2k} |\langle f, u_n \rangle|^2 < \infty \right\},$$
$$A^k f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k \langle f, u_n \rangle\, u_n \quad ; \quad f \in D(A^k) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

وبحسب الشرط (17) نلاحظ مايلي:

$$f \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow f \in D(A^k) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (18)$$
$$\Leftrightarrow f \in \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A^k)$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{D} = \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A^k).$$

كما أن $\|f|_k = \|A^k f\|_{L_2}$.

يمكننا تعريف المؤثر A وقواه A^k على الفضاء $\mathfrak{D}$ ومن ثم توسيعه إلى الفضاء $\mathfrak{D}'$ كما يلي:

$$A^k f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k \langle f, u_n \rangle u_n \quad ; \quad f \in \mathfrak{D} \quad , \quad k = 0, 1, 2, ... \quad (19)$$

$$A^k T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k a_n(T)\, u_n \quad ; \quad T \in \mathfrak{D}' \quad , \quad k = 0, 1, 2, ... \quad (20)$$

بحسابات بسيطة نجد أن:

$$A^k f \in \mathfrak{D} \quad ; \quad \forall f \in \mathfrak{D}, \ k = 0, 1, 2, ...$$
$$A^k T \in \mathfrak{D}' \quad ; \quad \forall T \in \mathfrak{D}' \quad , \ k = 0, 1, 2, ...$$

ويكون:

$$\|A^m f|_k = \|f|_{k+m} \quad ; \quad f \in \mathfrak{D} \qquad (20)$$

إضافة لذلك: فإن A^kيمثل مؤثراً من $\mathfrak{D}$ على $\mathfrak{D}$ ومؤثراً من $\mathfrak{D}'$ على $\mathfrak{D}'$.

$$\|A^m f|_k = \|f|_{k+m} \quad ; \quad f \in \mathfrak{D} \quad , \quad k, m = 0,1,2, ... \qquad (21)$$

٤- تطبيقات [7,6,4,3]

كـ تطبيق على الدراسة النظرية السابقة سندرس النشر بدوال هرميت والنشر بدوال لاجير في الفضاءات L_p ، وسوف نلاحظ كيف تم توسيع النشر بسلاسل وفق هذه الدوال من مجال صغير للدليل إلى مجال أوسع بكثير.

(4-1) النشر بدوال هرميت: [10,8,2,1]

تعطى كثيرات حدود هرميت من الدرجة n(**Hermitepolynomials**) بصيغة رودريج :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right] \quad ; \quad n = 0,1,2, ...$$

ودوال هرميت :

$$\mathcal{H}_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \quad ; \quad n = 0,1,2, ...$$

هذه الدوال تشكل جملة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت $L_2(-\infty, +\infty)$، وهي الدوال الخاصة لمؤثر هرميت التفاضلي$A : D(A) \to L_2(-\infty, +\infty)$، حيث:

$$Af(x) = -f'' + x^2 f \, ,$$

موافقة للقيم الخاصة :

$$\lambda_n = 2n + 1 \quad ; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

كل القيم الخاصة بسيطة (أي من الرتبة 1) .إضافة لذلك لدينا التقديرات التالية لنظيم دوال هرميت**[10,11,12]**

$$\|\mathcal{H}_n\|_{L_p} \sim \begin{cases} n^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}} & ; \quad 1 \le p < 4 \\ n^{-\frac{1}{8}} & ; \quad p = 4 \\ n^{-\frac{1}{6p}-\frac{1}{12}} & ; \quad 1 < p \le \infty \end{cases}$$

وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ متقاربة من أجل $s>1$، حيث $s=s(p)$، فتكون كل الشروط المذكورة أعلاه محققة، وبالتالي يمكن النشر بدوال هرميت في الفضاءات $L_p(-\infty,+\infty)$ من أجل $1\le p<\infty$ (بسلاسل معممة) .

تعرف عوامل فورييه للدالة $f\in L_p(-\infty,+\infty)$ بالعلاقة:

$$a_n(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathcal{H}_n(x)dx \quad ; \quad n=0,1,2,\dots$$

فتكون سلسلة فورييه الشكلية لهذه الدالة هي:

$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)\,\mathcal{H}_n(x)$,

ومتتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة هي:

$$S_N f(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n(f)\,\mathcal{H}_n(x) \quad ; \quad N=1,2,\dots$$

وهذه المتتالية تتقارب في الفضاء $L_p(-\infty,+\infty)$ من أجل القيم $\frac{4}{3}<p<4$ فقط .

ولكن بحسب التعميم السابق يصح النشر التالي في الفضاءات $L_p(-\infty,+\infty)$ من أجل كل القيم $1\le p<\infty$ (حيث تقارب السلسلة يكون في الفضاء $\mathfrak{D}'$):

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)\mathcal{H}_n(x) \quad ; \quad f\in L_p(-\infty,+\infty) \ , \ 1\le p<\infty .$$

(2-4) النشر بدوال لاجير : [11,10,4,2]

تعطى كثيرات حدود لاجير من الدرجة n والرتبة α (**Laguerrepolynomials**) بصيغة رودريج :

$$L_n^{\alpha}(x)=x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\alpha}e^{-x}] \quad ; \quad n=0,1,2,\dots \quad ,\alpha>-1$$

و دوال لاجير:

$$\mathcal{L}_n^{\alpha}(x)=\left(\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\right)^{-1/2} x^{\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\frac{x}{2}}\,L_n^{\alpha}(x) \quad ; \quad n=0,1,2,\dots$$

هذه الدوال تشكل جملة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت $L_2[0,+\infty[$، وهي الدوال الخاصة لمؤثر لاجير التفاضلي $A_\alpha : D(A_\alpha)\to L_2[0,+\infty[$ ، حيث:

$$A_\alpha f(x)= -4(x\,f')'+\left(x+\frac{\alpha^2}{x}\right)f(x) \ ; \ f\in D(A_\alpha) \ ,\alpha\ge 0 \ ,$$

موافقة للقيم الخاصة :

$$\lambda_n=2(2n+1+\alpha) \quad ; \quad n=0,1,2,\dots.$$

كل القيم الخاصة بسيطة (أي من الرتبة 1) . **[12]**

الدوال $\mathcal{L}_n^{\alpha}(x)$ تنتمي للفضاءات $L_p[0,+\infty)$، ولدينا التقديرات التالية للنظيم **[10]**:

من أجل $1\le p\le 4$:

$$\|\mathcal{L}_n^\alpha\|_{L_p} \sim \begin{cases} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} & ; \quad \frac{2}{p}-\frac{1}{2}>0 \\ n^{-\frac{1}{p}} & ; \quad \frac{2}{p}-\frac{1}{2}<0 \end{cases}$$

ومن أجل $4<p<\infty$:

$$\|\mathcal{L}_n^\alpha\|_{L_p} \sim \begin{cases} n^{\frac{1}{3p}-\frac{1}{3}} & ; \quad \frac{4}{3p}-\frac{1}{3}\geq 0 \\ n^{-\frac{1}{p}} & ; \quad \frac{4}{3p}-\frac{1}{3}<0 . \end{cases}$$

وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ متقاربة من أجل $s>1$ ، حيث $s=s(p)$ ، فتكون كل الشروط المذكورة أعلاه محققة، وبالتالي يمكن النشر بدوال لاجير في الفضاءات $L_p[0,+\infty)$من أجل $1\leq p<\infty$ (بسلاسل معممة) .

تعرف عوامل فورييه لدالة $f \in l_p[0,+\infty)$ بالعلاقة:

$$a_n^\alpha(f)=\int_0^\infty f(x)\mathcal{L}_n^\alpha(x)dx \quad ; \quad n=0,1,2,\dots$$

فتكون سلسلة فورييه الشكلية لهذه الدالة هي:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\alpha(f)\,\mathcal{L}_n^\alpha(x)$$

ومتتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة لها الشكل:

$$S_N f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\alpha(f)\,\mathcal{L}_n^\alpha(x) \quad ; \quad N=1,2,\dots$$

وهذه المتتالية تتقارب في الفضاء $L_p[0,+\infty)$فقط من أجل قيم p و $\alpha>0$التي تحقق:

$$\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|<min\left\{\frac{1}{4},\frac{1+\alpha}{2}\right\}$$

ولكن بحسب التعميم السابق يصح النشر التالي في الفضاءات $L_p[0,+\infty[)$ من أجل كل القيم $1\leq p<\infty$ (حيث تقارب السلسلة يكون في الفضاء $\mathfrak{D}'$)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\mathcal{L}_n^\alpha(x) \quad ; \quad f\in L_p[0.+\infty[\ , \ 1\leq p<\infty .$$

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا إلى اختبارات عن النشر في فضاءات باناخ L_p ويمكن متابعة البحث من أجل فضاءات باناخ من أنواع أخرى مثل $C[a,b]$ و $C^{(m)}[a,b]$.

المراجع

[1] Bell, J. (2015)*Hermite functionsDepartment of Mathematics,* University of Toronto. September 9.
[2] Doha, E.H. ; Ahmed, H.M. and El-Soubhy, S.I. (2009)Explicit formulae for the coefficients of integrated expansions of Laguerre and Hermite polynomials and their integrals.
Int. Trans. Special Func. Vol. 20, No. 7, 491–503
[3] *Dunster,* T. M. ; Gil, A. ;Segura, J. (2017)Uniform asymptotic expansions for Laguerre polynomials and related confluent hypergeometric functions. ArXiv
[4] Hajmirzaahmad, M. (1995)Laguerre polynomial expansionsJournal of Computational and Applied Mathematics 59, 25-37.
[5] Ibrahim, I.(2002)On Eigenfunction Expansions of The Hermite Differential Operator on R^n.
Int. Trans. Special Func. Vol. 13, pp. 555–574.
[6] Lamb, W. ; McGhee, D. F. (2004)Eigenfunction Expansions For Generalized Functions of Several Variables.
Int. Trans. Special Func. Vol. 15, pp. 239–249.
[7] Lamb, W. ; McGhee, D. F. (1992)Spectral theory and functional calculus on spaces of generalized functions.
J. Math. Anal. Appl., 163, 238–260.
[8] Lebedev, N. N. (1965)Special Functions and their Applications.*Prentice-Hall, INC*.
[9] Temme, N. M. (1996)Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. *John Wiley & Sons, New York.*
[10] Thangavelu,S.(1993)Lectures on Hermite and Laguerre Expansions. (MN-42), Volume 42
Princeton University Press.
[11]Trebels, W.(1973)Multipliers for (C , α)- Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory. *Springer Verlag, Berlin.*
[12] Triebel, H.(1992)Higher Analysis. *J. A. Barth, Leipzig.*