الترددات الطبيعية للاهتزازات العرضية لقضيب رفيع

د. حسن محمد خليفة *

(تاريخ الإيداع 8/2 /2020. قُبِل للنشر في 8 /3 /2020)

□ ملخّص □

تدرس الاهتزازات العرضية للقضبان، مع أنواع مختلفة من تثبيت نهاياتها على نطاق واسع في مختلف فروع التكنولوجيا الحديثة. تتيح لنا النماذج المقدمة تحليل الترددات الطبيعية والأشكال الطبيعية للاهتزازات العرضية لهذه القضبان. بناءً على هذه النماذج ، يتم تشخيص الخصائص الفيزيائية للقضبان ويتم إصلاح نهاياتها. ندرس الاهتزازات الطبيعية العرضية لقسم ثابت الطول من قضيب مستقيم رفيع، يتحرك بسرعة ثابتة ما بين اثنين من الأدلة المحورية الثابتة، المسافة بينهما تساوي الجزء المهتز من القضيب، مع الاخذ بعين الاعتبار التوتر المماسي المشروط بشد أو ضغط طولي. أوجدت بالاعتماد على طريقة فورييه العلاقات التي تحدد الترددات والأشكال الطبيعية للاهتزازات. وبالاستفادة من ذلك درست مسألة الاهتزازات الطبيعية لوتر.

كلمات مفتاحية: حركة القضبان، القوة الطولية، الاهتزازات العرضية، الترددات الطبيعية ، صيغ فيرّاري.

* استاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (4) العدد (1)2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series Vol. (4) No.(1) 2020

Natural frequencies of thin rod transverse vibrations

D. **Hasan Mohammad KHALIFEH** *

(Received 8/2 /2020. Accepted 8/ 3 /2019)

□ ABSTRACT □

Rod transverse vibrations with different types by fixing their ends are widely studied in the various fields of modern technology. Proposed models allow us to analyze natural frequencies and normal shape of these rods transverse vibrations. Using these models, physical properties of rods are diagnosed and their ends are repaired. We study The normal transverse vibrations of a constant length part of a straight thin rod, moving in a constant velocity between two fixed axis, where the distance between them equal to the length of the vibrations part of the rod, taking into account conditioned tangential tension by longitudinal tension or pression. Basing on Fourrier method, we find the relation that determine the natural frequencies and natural shapes of vibrations, Using this, the chord natural vibrations problem is studied.

Key Words: rod motion, longitudinal force, transverse oscillations, natural frequencies, Ferrari relationships.

* Assistant Professor. Department of mathematics Faculty of science- University of Tishreen- Lattakia- Syria.

مقدمة:

يتم التعبير عن السمة الرئيسية لعملية الاهتزازات الحرة للأنظمة ذات العدد غير المحدود من درجات الحرية بشكل لانهائي لعدد الترددات الذاتية وأنماط الاهتزاز. ترتبط الميزات الرياضية أيضاً بذلك وبالتالي بدلاً من المعادلات التفاضلية العادية التي تصف تذبذبات الأنظمة ذات العدد المحدود من درجات الحرية، يجب أن نتعامل مع المعادلات التفاضلية الجزئية هنا. بالإضافة لتحديد حالات النزوح والسرعات الأولية، إلى جانب مراعاة الظروف الحدودية التي تميز تثبيت المنظومة.

الاهتزازات العرضية للقضبان مع أنواع مختلفة من تثبيت نهاياتهم تستخدم على نطاق واسع في مختلف فروع التكنولوجيا الحديثة [1,2,3]. في الهندسة الصناعية والمدنية ومواقع العمل وبعض أنواع المؤسسات ؛ في الهندسة الميكانيكية – عناصر المعدات التكنولوجية .تخضع هذه التصميمات لمجموعة متنوعة من الآثار الثابتة والديناميكية ، بينما قد تتغير خصائصها أثناء التشغيل ، وهو أمر غير مرغوب فيه.

أهمية البحث وأهدافه:

إن الأهمية الخاصة للمنظومات القضبانية في البناء والصناعة تجعل من الضروري دراسة هذه المنظومات عند تعرضها لقوى مختلفة. الأمر الذي قد يؤدي إلى إخراج هذه المنظومات من الخدمة أو إلحاق الضرر بمستخدميها وخصوصاً أنه يمكن أن نجد نتائج هذه الدراسات في التطبيقات التقنية كآلات صناعة النسيج وفي إنتاج الخيوط والحبال، عند لف قضبان وشرائح المعادن، سحب الأسلاك...... . كما يمكن أن تكون مفيدة في دراسة قضايا الاستقرار والحركة للأنظمة الديناميكية [4].

من هنا تأتي أهمية دراسة الترددات والأشكال الذاتية للاهتزازات العرضية للمنظومات القضبانية وتبيان أثر زيادة وسيط القوة ووسيط السرعة على الترددات الخاصة للاهتزازات العرضية للقضبان.

طرائق البحث ومواده:

اعتمدنا على مسألة مشابهة تدرس الاهتزازات العرضية لخط أنابيب يحوي سائل متحرك [5]. وإذا اعتبرنا الكتلة الطولية للسائل أكبر بكثير من الكتلة الطولية لمادة خط الأنابيب فإن الحل التحليلي سيكون واحداً [6,7].

1– النموذج الرياضي

اعتمدنا على النموذج الرياضي الذي يأخذ بعين الاعتبار الاهتزازات العرضية الصغيرة لقضيب متحرك [5,8]. عندئذٍ الاهتزازات العرضية بالنسبة لجملة إحداثية متحركة وفي تقريب خطي تعطى بالعلاقة:

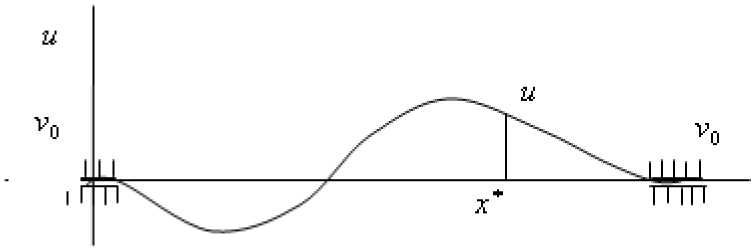
$$\rho \frac{D^2 u}{Dt^2} - T\,S \frac{\partial^2 u}{\partial x_*^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x_*^4} = 0 \qquad (1)$$

حيث x_* إحداثي لاغرانجي $\left(0 \le x_* \le \ell\right)$، ρ الكثافة الخطية للقضيب، $T\,S$ قوة الشد من أجل $\left(T > 0\right)$ والضغط من أجل $\left(T < 0\right)$، E معامل يونغ، S المساحة ، I عزم عطالة المقطع العرضي، ℓ المسافة بين المشبكين، أي طول القسم المهتز من القضيب و u تقوس القضيب.

بالانتقال إلى جملة إحداثيات ثابتة x^* تأخذ المشتقات الشكل الآتي:

$$\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+v_0\frac{\partial u}{\partial x^*}\ ,\qquad \frac{D^2u}{Dt^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+v_0\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x^*}+v_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \tag{2}$$

حيث v_0 السرعة الطولية لإزاحات نقاط القضيب الشكل (1).



الشكل(1)

بتعويض (2) في (1) نحصل على صيغة أكثر انتشاراً:

$$\ddot{u}^*+2v_0\dot{u}'^*+v_0^2u''^*-\frac{T\,S}{\rho}u''^*+\frac{E\,I}{\rho}u^{*IV}=0 \tag{3}$$

النقطة تعني الاشتقاق بالنسبة للزمن والفتحة تعني الاشتقاق بالنسبة للإحداثي x^*.

بالانتقال إلى الوسطاء غير المقاسة (بدون أبعاد):

$$u=\frac{u^*}{\ell}\ \ x=\frac{x^*}{\ell},\ v=\frac{v_0}{\ell}\ \ ,\ c^2=\frac{T}{\rho F}\ ,\ V=\frac{EJ}{\rho F},\ \ F=\frac{\ell^2}{S}\ ,\ I=\frac{J\ell^4}{F} \tag{4}$$

هنا J عزم العطالة المحوري، F مساحة المقطع العرضي للقضيب. تكتب معادلة الاهتزازات العرضية للقضيب حسب نموذج كيرخاروف على النحو الآتي:

$$\ddot{u}+2v\dot{u}'+\left(v^2-c^2\right)u''+V^2u^{(IV)}=0\ \ ;\ \ 0\le x\le 1 \tag{5}$$

من أجل $T<0$ (ضغط) نستبدل الحد $-c^2$ إلى c^2. غير أنه في التطبيقات العملية تأخذ الحالة (5) $(T>0)$ اهتماماً أكبر.

من أجل وصف الاهتزازات الخاصة للقضيب المتحرك بين المشبكين في النقاط $x=0$ و $x=1$ نأخذ الشروط الحدية الآتية:

$$u(t,0)=u'(t,0)=u(t,1)=u'(t,1)=0 \tag{6}$$

سنبحث عن حل المعادلة (5) في صيغة عقدية باستخدام فورييه [ ]. عندئذٍ بوضع:

$$u(t,x)=U(x)\exp(i\omega t)$$

ω تردد الاهتزاز، $U(x)$ دالة عقدية يطلب تعيينهما. بالتعويض في (5) تأخذ معادلة الاهتزاز العرضي للقضيب الشكل الآتي:

$$U^{(IV)}+\left(\alpha^2-R\right)U''+2i\alpha\Omega U'-\Omega^2U=0\ :\ U=\frac{\partial U}{\partial x}=0\ ;\ (x=0,1) \tag{7}$$

حيث: $\Omega^2=\dfrac{\rho F\,\ell^2\omega^2}{E\,J}$ ، $R=\dfrac{T\,\ell^2}{E\,J}$ ، $\alpha=\dfrac{v}{V\ell}$.

سنبحث عن الحل العام للمعادلة (7) على الشكل $U(x)=\exp(k,x)$. عندئذٍ نحصل على المعادلة المميزة التي تسمح بتعيين قيم الوسيط العقدي الموجي $(j=1,2,3,4)$; $k=k_j(\alpha,R,\Omega)$ على الشكل:

$$k^4+\left(\alpha^2-R\right)k^2+2i\alpha\Omega k-\Omega^2=0 \tag{8}$$

بالاعتماد على صيغ فيراري نكتب المعادلة الحالّة لـ (8) على الشكل:

$$z^3+\frac{(\alpha^2-R)}{2}z^2+\Omega^2 z-\frac{(\alpha^2-R)}{2}\Omega^2+\frac{(2\alpha\Omega)^2}{8}=0 \qquad (9)$$

نضع: $p=\alpha^2-R$, $q=2\alpha\Omega$, $r=-\Omega^2$, $z=y+\frac{p}{6}$ عندئذٍ:

$$y^3+p_1 y+q_1=0\ ;\quad p_1=-\left(r+\frac{p^2}{12}\right)\ ,\ q_1=-\frac{p^3}{108}+\frac{pr}{3}+\frac{q^2}{8} \qquad (10)$$

إذا وجد أي حل z_1 للمعادلة التكعيبية فإن حل المعادلة (8) يمكن إيجاده كحل لمعادلتين تربيعيتين.

$$\begin{aligned} &k^2-\sqrt{2z_1-p}\,k+\frac{q}{2\sqrt{2z_1-p}}+z_1\\ &k^2+\sqrt{2z_1-p}\,k-\frac{q}{2\sqrt{2z_1-p}}+z_1 \end{aligned} \qquad (11)$$

حيث:

$$\begin{aligned} k_{1,2}&=\frac{\sqrt{2z_1-p}}{2}\pm\sqrt{-2z_1-p-\frac{2q}{\sqrt{2z_1-p}}},\\ k_{3,4}&=-\frac{\sqrt{2z_1-p}}{2}\pm\sqrt{-2z_1-p-\frac{2q}{\sqrt{2z_1-p}}} \end{aligned} \qquad (12)$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة (8) يأخذ الشكل:

$$U(x)=\sum_{j=1}^{4}C_j U_j(x)\ ;\ U_j(x)=\exp(k_j x) \qquad (13)$$

حيث $U_j(x)$ الدوال الذاتية للمسألة (7) و $k_j=k_j(\alpha,R,\Omega)$ قيم موجبة.

نعوض (13) في الشروط الحدية (7) فنحصل على منظومة معادلات خطية متجانسة بالنسبة للثوابت الغير معينة C_j. عندئذٍ الشرط اللازم والكافي لكي تكون الثوابت C_j غير مساوية للصفر معاً، هو أن يكون محدد المصفوفة الرئيسية مساوياً للصفر. هذا الشرط يعطي المعادلة:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4\\ e^{k_1} & e^{k_2} & e^{k_3} & e^{k_4}\\ k_1e^{k_1} & k_2e^{k_2} & k_3e^{k_3} & k_4e^{k_4} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

بما أن المقادير $k_j=k_j(\alpha,R,\Omega)$ معينة وفق الصيغ (12) فإن المعادلة (14) تحدد القيم الحقيقية للترددات الخاصة $\omega_n=\omega_n(\alpha,R)$. حل المعادلة (14) يعتبر الأساس في حل المسألة المطروحة. أي بكلام آخر فإن النموذج المعتمد لقضيب متحرك يظهر المعاملات α,R التي تتعلق بقوة الشد في القضيب والسرعة v.

من أجل إيجاد الأشكال الخاصة أي C_j، فإن كل تردد خاص ω_n يجب أن يعوض في منظومة معادلات متجانسة ناتجة عن (7) و (13) أي:

$$\sum_{j=1}^{4} C_j U_j(0) = \sum_{j=1}^{4} C_j U_j(1) = \sum_{j=1}^{4} C_j U'_j(0) = \sum_{j=1}^{4} C_j U'_j(1) = 0 \qquad (15)$$

بعد تعيين جميع الثوابت C_j فإن الصيغة العقدية تكتب بالشكل:

$$U_n(\omega_n, x) = \sum_{j=1}^{4} C_j U_j(\omega_n, x) = \Phi_n(x) + i\Psi_n(x) \qquad (16)$$

–من أجل $\alpha = 0,\ R = 0$ فإن الدوال الخاصة $U_n(x)$ حقيقية وتتطابق مع الدوال الخاصة لقضيب مثبت بقوة من طرفيه.

–من أجل $R = 0$ فإن جذور المعادلة المميزة (8) k_j تظهر كدوال صريحة للتردد ω. من أجل ترددات ذاتية حقيقية $\omega_n(\alpha)$ نحصل على معادلة بسيطة تحل بالطرق العددية [6,9].

–من أجل $R \neq 0$ فإننا نوجد جذور المعادلة المميزة بالاعتماد على طريقة فيراري [6].

مسألة الاهتزازات الخاصة لوتر

في حالة الاهتزازات العرضية الصغيرة عندما $V^2 << c^2$ (بحدود $V \to 0$) فإنه يعبر عن المسألة (5) ، (6) بشكل جيبي. في هذه الحالة تأخذ المسألة الشكل الآتي:

$$\ddot{u} + 2v\dot{u}' - \left(c^2 - v^2\right)u'' = 0 \ \ ; \ u(t,0) = u(t,1) = 0 \qquad (17)$$

المسألة (17) كثيرة الاستخدام [5,8,10,11]، نقدم حلها التحليلي بالاعتماد على سبق. لذلك نعتمد الصيغة العقدية لمسألة شتورم – ليوفيل المعممة [12] من أجل تعيين الترددات والصيغ الخاصة. نحصل بالاعتماد على (7) و (17) على المسألة الحدية الآتية من أجل $\left(v^2 < c^2\right)$:

$$U'' - 2i\alpha^*\,\Omega^* U' + \Omega^{*2} U = 0 : \ U(0) = U(1) = 0 \qquad (18)$$

حيث: $u(t,x) = U(x)\exp(i\omega t)\ ;\ \alpha^* = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \ \beta = \dfrac{v}{c} < 1\ ,\ \ \Omega^* = \dfrac{\omega}{c\sqrt{1-\beta^2}}$

عندئذٍ جذور المعادلة المميزة لـ (18) تعطى بالشكل:

$$k_{1,2} = i\Omega^*\left(\alpha^* \pm \sqrt{1+\alpha^{*2}}\right)$$

ومن أجل الدالة $U(x)$ نحصل على صيغة بسيطة:

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2i}\left(C_1 \exp k_1 t + C_2 \exp k_2 t\right) \\ &= C_1 \exp\left(i\alpha^*\Omega^* x\right)\sin\left(\sqrt{1+\alpha^{*2}}\,\Omega^* x\right) \end{aligned} \qquad (19)$$

حيث: $\alpha^*\Omega^* = \dfrac{\omega v}{c^2 - v^2},\ \ \sqrt{1+\alpha^{*2}}\,\Omega^* = \dfrac{\omega c}{c^2 - v^2}\ ;\ (c_2 = -c_1)$

يمكن للسهولة اعتبار c_2, c_1 حقيقيين. قيم الترددات الخاصة ω_n من أجل $U(1) = 0$ (18) وبالاعتماد على (19) تعطى بالصيغة:

$$\omega_n = n\pi c^{-1}\left(c^2 - v^2\right);\ \ n = 1,2,....\ ,\ c = \left(\frac{T\,S}{\rho\ell^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ \ v = \frac{v_0}{\ell} \qquad (20)$$

نلاحظ أنه من أجل $\omega_n \to 0$ فإن $v \to c$ أي أن الاهتزازات الخاصة بجميع أشكالها تختفي إذا كان $\left(v^2 \geq c^2\right)$.

بالاعتماد على (19) و (20) يمكن التعبير عن أشكال الاهتزازات المختلفة لوتر متحرك على الشكل:

$$U_n(x) = C_n \exp\left(in\pi c^{-1} vx\right)\sin n\pi x \;\; ; \;\; n = 1,2,.... \qquad (21)$$

حيث C_n معاملات عقدية أو حقيقية.

من أجل الحصول على حل المسألة (17) نعوض ω_n من (20) و $U_n(x)$ من (21) في (18) فنحصل على الدوال الخاصة:

$$u_n(t,x) = C_n \exp\left(in\pi c^{-1}\left(\left(c^2 - v^2\right)t + vx\right)\right)\sin n\pi x \;\; ; \;\; n = 1,2,.... \qquad (22)$$

بما أن المعادلة (17) حقيقية (لا تحوي معاملات عقدية) فإن القسمين الحقيقي والتخيلي للدالة $u_n(t,x)$ هي حلول حقيقية وبالتالي الحل سيكون تركيب خطي لهما بمعاملات حقيقية اختيارية. هذا يدل على أنه في الصيغ (22) يمكن أن تكون المضاريب C_n عقدية اختيارية من الشكل: $C_n = A_n + iB_n = R_n \exp i\varphi_n$ حيث R_n الطويلة و φ_n الدور. والصيغة الحقيقية العامة للحل هي:

(23)

$$u_n(t,x) = R_n \cos\left(n\pi c^{-1}\left(\left(c^2 - v^2\right)t + vx\right) + \varphi_n\right)\sin n\pi x \;\; ; \;\; n = 1,2,....$$

حيث: $R_n \geq 0$ و $0 \leq \varphi_n \leq 2\pi$.

وهكذا فإنه من أجل لحظة ابتدائية معينة $t = t_0 = 0$ إذا أعطيت الإزاحة والسرعة بما يتوافق مع (23) فإنه من أجل $t > 0$ سينجز الوتر حركات موجية عرضية بـ n شكل. والسبب الرئيسي يعود للاهتزاز غير المتزامن، أي أن النقاط المتحركة لا تملك نفس الخواص كما في حالة الوتر غير المتحرك [13].

الاستنتاجات:

تمت دراسة مسألة الاهتزازات العرضية لقضيب متحرك وإيجاد الحل التحليلي. تعطي العلاقات التي حصلنا عليها الترددات الذاتية للاهتزازات العرضية لقضيب متحرك وعلاقتها بسرعة الانتقال وشكل الاهتزاز. كحالة خاصة درست مسألة الاهتزازات الخاصة لوتر متحرك وتم بناء الحل التحليلي الذي يسمح بتحديد وتحليل الترددات والأشكال الذاتية للاهتزاز. تسمح هذه الدراسة بالانتقال إلى دراسة المسألة العكسية لتحديد السرعة وقوة الشد في القضيب بالاعتماد على الترددات الذاتية للاهتزازات العرضية.

المراجع

1- Kayumov R.A. *The supercritical behavior of compressed rods in an elastic medium* // Izv. RAS. MTT. 2017. No 5. S. 122-129

2- Mkrtchyan K.Sh. *Investigation of forced transverse vibrations of an elastic articulated rod taking into account rotational motion* // Izv. RAS. MTT. 2019.No 1

3- Prisekin V.L., *Rastorguev G.I. Bending and cramped torsion of thin-walled rods // Izv. RAS.* MTT. 2019.No 5. S. 45-58.

4- Belyaev A.K., *Tovstik P.E., Tovstik T.P. Thin rod in longitudinal dynamic compression* // Izv. RAS. MTT. 2017. No. 4. P. 19-34.

5.V. A. Svetlitskiy, *Mechanicsof rods*, (in Russian). Vol. 2. Moscow: Vysshaya shkola, 1987.

6. S. V. Nesterov and L. D. *Akulenko,"Transverse vibration spectrum of a moving rod", in Dokl*. RAN, vol. 420, no. 1, pp. 50-54, 2008.

7- Akulenko L.D., Gavrikov A.A., Nesterov S.V. *Own transverse vibrations of a rotating rod of variable cross section* // Izv. RAS. MTT. 2018. No. 5. P. 40-52

8. Barakart R. *Transverse vibrations of a moving thin rod* // J. Acoust. Soc. America. 1968. V. 43. ‹ 3. ê. 533–539.

9- 5. Kong L., Parker R.G. *Approximate eigensolutions of axially moving beams with small flexural stiffness* // J. Sound and Vibr. 2004. V. 276. P. 459–469. [L. Kong, R. G. Parker, "Approximate eigensolutions of axially moving beams with small flexural stiffness,"

10- Svetlitsky V.A. *Mechanics of absolutely flexible rods 2017.432 s*. ISBN 978-5-7035-2482-2

11- , Vesnitsky A,I ,*Waves in systems with moving boundaries and loads*, The science, 2001, 320p

12- Akulenko L.D., *Nesterov S.V. High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications*. Boca Raton etc.: CRC Press, 2005. 239 p

13- A.N. Tikhonov, A.A. Samarsky. *Equations of mathematical physics*. M.: The science,1966. 724p