مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (4) العدد (1)2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series Vol. (4) No.(1) 2020

استخدام الطرق العددية في إيجاد حلول مسائل القيم الحدية البارامترية

***د. نبيل أحمد علي**

(تاريخ الإيداع 2019/10/13. قُبِل للنشر في 2/ 2 /2020)

□ ملخّص □

إن العلاقة المحددة للشروط الحدية بمقادير موجهة في موضوع الدراسة، تحدد تقاربات المتتالية $x_m(t, y_0, \lambda)$، التي تمت على أساسها بناء الحلول التقريبية ودراسة قابلية الحل لمسائل القيمة الحدية مع بارامتراتها، وباستخدام الطرق العددية التحليلية. ويمكن أن تدخل البارامترات في الشروط الحدية المعطاة بشكل خطي (خطياً)في إيجاد هذا الحل. وأن متتالية الدوال تحقق مسالتي القيم الحدية وتعتبر حلا لمسألة القيم الحدية للمعادلة المشوشة، كما أن حل مسألة كوشي يتطابق مع حل المعادلة المشوشة.

تم إنشاء تقريب عددي تحليلي لإيجاد الحلول لمسائل القيم الحدية التي تحوي بارامترات متجهة ضمن الشروط المطلوبة، وتم اختيار الطريقة بمثال نموذجي.

الكلمات المفتاحية : القيم الحدية البارامترية، مسألة كوشي، المتجه القياسي، الحلول التقريبية.

*د. نبيل أحمد علي – أستاذ مساعد بقسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة طرطوس

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (4) العدد (1)2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series Vol. (4) No.(1) 2020

The Use of Numerical Methods for Solving Parametric boundary Value problems.

Dr. NABIL AHMAD ALI*

(Received 13/10 /2019. Accepted 2/ 2 /2020)

□ ABSTRACT □

The specific relationship of the marginal conditions in the dimensions of the study topic determines the convergences of the sequence x_m (t, y_0, λ), on which to build the approximate solutions and to examine the solubility of the boundary value problems with their parameters. Parameters can be entered into the boundary conditions given linearly (linear) in finding this solution. By using analysis numerical methods.

And that the sequence of functions verifies boundary problems which is a solution to the turbulent boundary value problems and that the Cauchy problem and absolution to the turbulent equation have the same solution. An analytical numerical approximation is presented for finding the solution of boundary values problems with parameters vector according to the required conditions, the proposed method is tested with a typical example.

Keywords: Parametric boundary Values, Kochi, Standard Vector, Approximate Solutions, Cauchy Problem.

Department of Mathematics, Assistant Professor Faculty of Science, University of Tartous

1. مقدمة:

أن دراسة مسألة القيمة الحدية ذات النقطتين بمقدارين داخلين في الشروط الحدية بشكل خطي تتم على اساس بناء الحلول التقريبية ضمن الشروط العادية او بتطبيق طريقة تحليلية تعتمد على متجهات معيارية من الشكل

$$y_0 = (x_{03}, \dots, x_{0n}), \qquad x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$$

حيث نختار بارامتر من مجموعة مفروضة A $(\lambda \in A)$ للمتجه $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ بحيث يحقق جميع الشروط الحدية مع المشتقات x_0 .

سوف يتم دراسة متتالية الدوال التي تحقق معادلتي القيم الحدية والتي تعتبر حلا لمعادلة القيم الحدية المشوشة (المضطربة)

عندئذٍ تحقق متتالية الدوال $x_m(t, y_0, \lambda)$ الموافقة للشروط الحدية من أجل جميع قيم $m = 0, 1, 2, \dots$ و $y_0 \in G, \lambda \in A$.

عندما $m \to \infty$ فإنها تسعى بانتظام في المجال

$$(t, y_0, \lambda) \in [0, T] \times G \times A$$

وإذا كانت الشروط النظرية السابقة محققة فإنه من أجل المزدوجة العشوائية $(y_0, \lambda), y_0 \in G, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in A$ توجد قيمة وحيدة للبارامتر المساعد الموجه.

كما اهتم الباحثون حديثا بتطوير طرائق عددية لإيجاد الحلول العددية لمسائل القيم الحدية مع بارامترات، فقدم (Kumapar – Pandlt) في عام 2014 طريقة مويجات هار مع بارامترين لحل المسألة[1] ، وقدم Gupta في عام 2017 تقريبا B–spline مع بارامتر واحد حر لحل المسألة [2]، وكذلك قدم Pandel في عام 2018 طريقة الفروق المنتهية مع بارامتر واحد لحل المسألة المطروحة[3].

2. أهمية البحث وأهدافه:

هدف هذا البحث هو بناء حلول تقريبية ضمن شروط عادية وتحليلية وايجاد حل لمتتالية الدوال $x_m(t, y_0, \lambda)$ الموافقة للشروط الحدية والتي تعتبر حلا لمعادلة القيم الحدية المشوشة (المضطربة).

3. طرائق البحث ومواده:

العلاقة الخطية للشروط الحدية بمقدارين

يمكن تطبيق الطريقة العددية التحليلية لمسألة القيمة الحدية ثنائية النقطة مع البارامتر في الشروط الحدية، ويمكن ملاحظة أن العلاقة المحددة للشروط الحدية بمقادير موجهة من أجل الطريقة العددية التحليلية موضوع الدراسة، تحدد التقاربات المتتالية $x_m(t, y_0, \lambda)$، التي يتم على أساسها بناء الحلول التقريبية ودراسة قابلية مسائل القيمة الحدية للحل مع بارامتراتها. يمكن أن تدخل البارامترات في الشروط الحدية المعطاة بشكل خطي [4].

سندرس مسألة القيمة الحدية من نقطتين بمقدارين داخلين في الشروط الحدية خطياً من جملة من المصفوفات E_n، على الشكل التالي:

$$x^{\cdot} = f(t,x), \quad x, f \in E_n; \qquad (1.1)$$

$$\lambda_1 Ax(0) + \lambda_2 Cx(T) = d, \ \det C \neq 0, \qquad d \neq 0 \qquad (1.2)$$

$$x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02} \qquad (1.3)$$

من المعادلة (1.1)، لدينا مسألة إيجاد الحل القابل للتفاضل باستمرار $x = x^*(t)$ على الجزء $[0, T]$، بالإضافة لقيم البارامترات $\lambda_1 = \lambda_1^*, \lambda_2 = \lambda_2^*$ بحيث يكون معها الحل المطلوب محققا للشروط (1.2) و (1.3).

فمن أجل الطريقة العددية التحليلية التي سندرسها نفرض أن:

$$y_0 = (x_{03}, \dots, x_{0n}), \qquad x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$$

المجموعة التي تحقق شروط المعادلة (1.3) :

<u>وإن:</u>

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in [A_1^{'}, A_1^{''}] \times [A_2^{'}, A_2^{''}] = A, A_2^{'} > 0, \qquad (1.4)$$

وكانت:

$$\beta = \frac{T}{2} M + \beta_1(x_0, \lambda), \qquad (1.5)$$

من أجل:

$$\beta_1(x_0, \lambda) = |\frac{1}{\lambda_2}[c^{-1}d - (\lambda_1 C^{-1} A + \lambda_2 E)x_0]|$$

حيث ($n-2$) مجموعة من المتجهات المعيارية y_0، بحيث تكون[5]:

$$x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0) \in D_\beta .$$

كما ويفترض أنه من أجل المجموعة D_βالمحددة بالمتجه(1.5).

لنختار متتالية الدوال $X_m(t, y_0, \lambda)$ التي تحقق الشروط الحدية المعطاة (1.2) بالقيم المشتقة $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ من المجال المحقق للمعادلة (1.4).

لذلك سوف ندرس متتالية الدوال التالية :

$$x_m(t, y_0, \lambda) = x_0 + \int_0^T f(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda))dt + \alpha t, \qquad (1.6)$$

حيث يتم اختيار بارامتر للمتجه$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ بحيث يحقق جميع الدوال (1.6) الشروط الحدية (1.2). (1.3) مع المشتقات x_0 و $\lambda \in A$.

بتعويض (1.6) في (1.2) من أجل إيجاد α نحصل على مجموعة المعادلات الجبرية[6]:

$$\lambda_1 A x_0 + \lambda_2 C\left[x_0 + \int_0^T f\big(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)\big)dt + \alpha T\right] = d,$$

ومنها:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_2 T}\left[c^{-1}d - (\lambda_1 C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right] - \\ -\frac{1}{T}\int_0^T f\big(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)\big)dt \qquad (1.7)$$

وهكذا فإن (1.6)، (1.7) تسمح ببناء متتالية الدوال التالية:

$$x_m(t, y_0, \lambda) = x_0 + \int_0^1 \Big[f\big(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)\big) - \\ -\frac{1}{T}\int_0^T f\big(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda)\big)ds\ \Big]dt + \\ +\frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (\lambda_1 C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right], \qquad m = 1, 2, \dots; \\ x_0(t, y_0, \lambda) = x_0 \qquad (1.8)$$

التي تلبي الشروط الحدية المعطاة مع المشتقات $y_0, \lambda \in A$.

مبرهنة1 : إن متتالية الدوال$X_m(t, y_0, \lambda)$ تحقق معادلتي القيم الحدية وتعتبر حلا لمعادلة القيم الحدية المشوشة.

لنفترض من أجل مسألة القيمة الحدية (1.3) – (1.1) بارتباط خطي لمقداري قيم المتجهات التالية M, K, d والمصفوفات المربعة A, C، والقيمة العددية T ومجالي التحديد (1.4)، بحيث تحقق شروط المعادلة (1.5).

عندئذٍ تحقق متتالية الدوال$x_m(t, y_0, \lambda)$ الشكل (1.8)، الموافقة للشروط الحدية (1.2)، (1.3) من أجل جميع $m = 0, 1, 2, \dots$ و $y_0 \in \mathrm{G}, \lambda \in \Lambda$.[7]

عندما $m \to \infty$ فإنها تسعى بانتظام بالنسبة للمجال

$$(t, y_0, \lambda) \in [0, T] \times G \times \mathrm{A} \qquad (1.9)$$

إلى الدالة الحدية $x^*(t, y_0, \lambda)$.من أجل $t = 0$ تمر عبرها النقطة التالية:

$x^*(0, y_0, \lambda) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0),$ ، وتحقق الشروط الحدية (1.2)، (1.3) وتعتبر حلاً لمعادلة التكامل التالية[8]:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \Big\{f\big(t, x(t)\big) - \frac{1}{T}\int_0^T f\big(s, x(s)\big)ds + \\ \frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (\lambda_1 C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right]\Big\}dt,$$

أي أن: $x^*(t, y_0, \lambda)$ هي حل مسألة القيمة الحدية "المشوشة" من الشكل:

$$x = f(t,x) + \Delta(y_0,\lambda), \qquad \lambda_1 Ax(0) + \lambda_2 Cx(T) = d,$$
$$x_1(0) = x_{01,} x_2(0) = x_{02,}$$

حيث:

$$\Delta(y_0,\lambda) = +\frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (\lambda_1 C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right] -$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T f\big(t, x(t)\big)dt.$$

وعليه، فإنه في المجال المحقق للمعادلة (1.9) يقيّم الخطأ xm للتقارب بالمتراجحة:

$$x^*(t, y_0, \lambda) - x_m(t, y_0, \lambda) \leq \alpha_1(t) w_3(y_0, \lambda) = \varepsilon(x^*(t, y_0, \lambda), x_m(t, y_0, \lambda)), \tag{1.10}$$

حيث:

$$w_3(y_0,\lambda) = Q^m(E-Q)^{-1}M + KQ^{m-1}(E-Q)^{-1}\beta_1(x_0,\lambda);$$
$$Q = \frac{T}{\pi}K; \quad \tilde{\alpha}_1(t)$$

مبرهنة2: حل مسألة كوشي يتطابق مع حل المعادلة المشوشة

إذا كانت الشروط النظرية السابقة محققة فإنه من أجل المزدوجة العشوائية $(y_0, \lambda), y_0 \in G, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in A$ توجد قيمة وحيدة للبارامتر المساعد الموجه[9].

$$\mu = \frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (\lambda_1 C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right] -$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T f\big(t, x^*(t, y_0, \lambda)\big)dt.$$

التي يكون معها الحل من أجل المعادلة "المشوشة" $x = x(t)$ من مسألة كوشي:

$$x = f(t,x) + \mu, x(0) = (x_{01,} x_{02,} y_0)$$

تتطابق مع حل مسألة القيمة الحدية:

$$x = f(t,x) + \mu, \lambda_1 Ax(0) + \lambda_2 Cx(T) = d, \;\; x_1(0) = x_{01,}$$
$$x_2(0) = x_{02,}$$

إضافة إلى ذلك، عندئذٍ $x(t) = x^*(t, y_0, \lambda)$، حيث $x^*(t, y_0, \lambda)$ هي حد متتالية الدوال (1.8).

مبرهنة 3 : حل مسألة القيم الحدية شرط لازم وكافي لحل مسألة كوشي.

لنفترض أنه من أجل مسألة القيمة الحدية (1.3) – (1.1) والمحققة لشروط المبرهنة 1.

عندئذٍ ولكي يكون الحل $x = x^*(t)$ هو حلا لمسألة كوشي المعطى بالشكل التالي:

$$x^{\cdot} = f(t,x), = \left(x_{01,}\ x_{02,}y_0\right) \qquad (1.11)$$

شرطا لاما وكافيا متزامناً لحل مسألة القيمة الحدية (1.3) − (1.1)، هو ان تكون القيمة البدائية y_0 في (1.1) وقيم البارامترات λ_1 و λ_2 في الشروط الحدية أي الثنائية (y_0,λ) تكون حلاً للمعادلة المحددة[10]:

$$\Delta(y_0,\lambda) = \frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (\lambda_1 C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(t, x^*(t,y_0,\lambda)\right)dt = 0, \qquad (1.12)$$

حيث $x^*(t,y_0,\lambda)$ هي الدالة الحدية للمتتالية (1.8). وعليه، بالنسبة للمزدوجة المذكورة (y_0,λ) يكون لها مكان المساواة $x^*(t) = x^*(t,y_0,\lambda)$، وإذا أخذنا كحل مقرب للدالة *xm* من التقريب $x_m(t,y_0,\lambda)$، فإن الخطأ يقدر وفق الصيغة (المعادلة) (1.10) .

مبرهنة 4 : لكل حل لمسألة القيم الحدية يوجد مجال محدب مغلق يحقق الحل الابتدائي .

من أجل مسألة القيمة الحدية (1.3) − (1.1) وتحقق شروط المبرهنة1 ويوجد مجال محدب مغلق

$$A^{'} = G^{'} \times \left[\vec{A_1}, \vec{A_1^{''}}\right] \times \left[\vec{A_2}, \vec{A_2^{''}}\right] \subset G \times A, \qquad (1.13)$$

بحيث أنه من أجل *m≥1* تكون المعادلة محددة:

$$\Delta_m(y_0,\lambda) = \frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - (\lambda_1 C^{-1}A + \lambda_2 E)x_0\right] - -\frac{1}{T}\int_0^T f\left(t, x_m(t,y_0,\lambda)\right)dt = 0, \qquad (1.14)$$

وتملك في المجال (1.13) حل واحد فقط $(y_0,\lambda) = (y_{0m},\lambda_m),\ \lambda_m = (\lambda_{m1},\lambda_{m2})$. ليكن أس (دليل) هذا الحل للمعادلة (1.14) [10] لا يساوي الصفر وعلى الحد *S¹* من المجال*A¹* تتحقق المتراجحة:

$$inf_{(y_0,\lambda)\in S} = |\Delta_m(y_0,\lambda)| > \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 Q w_3(y_0,\lambda),$$

حيث $\Delta_m(y_0,\lambda)$ تحسب بموجبه (1.14)؛ والمتجه $w_3(y_0,\lambda)$ هو متجهة المتشكل (المرتسم) في المعادلة (1.14). عندئذٍ يكون لمسألة القيمة الحدية (1.3) − (1.1) حل هو$x^*(t)$ على أن يكون *t=0* تحدد القيمة الابتدائية لهذا الحل $x^*(0) = \left(x_{01,}\ x_{02,}y_0^*\right)$ بالمتجه القياسي $(n-2)$ y_0^*الكائن في المجال G'، أما البارامترات λ_1^*,λ_2^* المحققة للمعادلة(1.2)، بحيث تكون:

$$\lambda_1^* \in [\bar{A}_1', \bar{A}_1''], \lambda_2^* \in [\bar{A}_2, \bar{A}_2'']$$

فرضية: إذا كانت محققة شروط النظرية 1 فإنه من أجل أي ثنائيتين [11].

$$(y_0', \lambda'), \qquad (y_0'', \lambda'') \in G' \times [A_1', A_1''] \times [A_2', A_2''] \qquad (1.15)$$

بالنسبة لفرق الدالات الحدية $x^*(t, y_0', \lambda'), x^*(t, y_0'', \lambda'')$ للمتتاليتين من الشكل (1.8) تحقق المتراجحة:

$$\begin{aligned}|x^*(t, y_0', \lambda') - x^*(t, y_0'', \lambda'')| \le [E + \tilde{\alpha}_1(t) K (E-Q)^{-1}] \times \\ \times [|x_0' - x_0''| + b(\lambda', \lambda'', y_0', y_0'')],\end{aligned} \qquad (1.16)$$

حيث المتجه

$$\begin{aligned}b(\lambda', \lambda'', y_0', y_0'') = | \frac{1}{\lambda_2' \lambda_2''} [(\lambda_2'' - \lambda_2') C^{-1} d + C^{-1} A (\lambda_2' \lambda_1'' x_0'' - \\ \lambda_2'' \lambda_1' x_0')] + x_0'' - x_0']|.\end{aligned}$$

البرهان. لدينا من (1.8) مباشرة

$$\begin{aligned}x_1(t, y_0', \lambda') - x_1(t, y_0'', \lambda'') = x_0' - x_0'' + \int_0^1 [f(t, x_0') - \\ - f(t, x_0'')) - \frac{1}{T}\int_0^T \left(f(s, x_0') - f(s, x_0'')\right) ds \Bigg] dt + \\ + \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\lambda_2''} C^{-1} d - (\frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} C^{-1} A + E) x_0'\right] - \\ - \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\lambda_2''} C^{-1} d - (\frac{\lambda_1''}{\lambda_2''} C^{-1} A + E) x_0''\right]\end{aligned}$$

ونجد مما سبق أن:

$$\begin{aligned}|x_1(t, y_0', \lambda') - x_1(t, y_0'', \lambda'')| \le |x_0' - x_0''| + \\ + K\left[(1 - \frac{t}{T}) \int_0^t |x_0' - x_0''| dt + \frac{t}{T} \int_t^T |x_0' - x_0''| dt\right] + \\ + b(\lambda', \lambda'', y_0', y_0'') = [E + \alpha_1(t) K] |x_0' - x_0''| + b(\lambda', \lambda'', y_0', y_0'').\end{aligned}$$

وبشكل مماثل نحصل على:

$$\begin{aligned}x_2(t, y_0', \lambda') - x_2(t, y_0'', \lambda'') \le |x_0' - x_0''| + \\ K\Bigg[(1 - \frac{t}{T}) \int_0^t |x_1(t, y_0', \lambda') - x_1(t, y_0'', \lambda'')| dt +\end{aligned}$$

$$+\frac{t}{T}\int_{t}^{T}\left|x_1\left(t,y_0^{'},\ \lambda^{'}\right)-x_1\left(t,y_0^{"},\ \lambda^{"}\right)\right|dt+b\left(\ \lambda^{'},\ \lambda^{"},y_0^{'},y_0^{"}\right)\leq$$
$$\leq\left[E+\alpha_1(t)K+\alpha_2(t)K^2\right]\left|x_0^{'}-x_0^{"}\right|+$$
$$+\left[E+\alpha_1(t)K\right]b\left(\ \lambda^{'},\ \lambda^{"},y_0^{'},y_0^{"}\right).$$

وبطريقة التعويض من السهل الحصول على:

$$K\left[(1-\frac{t}{T})\int_{0}^{t}\left|x_1\left(t,y_0^{'},\ \lambda^{'}\right)-x_1\left(t,y_0^{"},\ \lambda^{"}\right)\right|dt+\right.$$
$$+\frac{t}{T}\int_{t}^{T}\left|x_{m-1}\left(t,y_0^{'},\ \lambda^{'}\right)-x_{m-1}\left(t,y_0^{"},\ \lambda^{"}\right)\right|dt+b\left(\ \lambda^{'},\ \lambda^{"},y_0^{'},y_0^{"}\right)\leq$$

$$\leq\left[\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(t)K^i\right]\left|x_0^{'}-x_0^{"}\right|+\left[\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(t)K^i\right]b\left(\ \lambda^{'},\ \lambda^{"},y_0^{'},y_0^{"}\right).\qquad(1.17)$$

حيث $\alpha_i(t)$ هي الدالة من الشكل (*2.9*)

بالانتقال إلى (1.17) إلى الحد عندما $m\ \to\infty$ نحصل على:

$$\left|x^*(t,y_0,\lambda)-x_m(t,y_0,\lambda)\right|\leq\left[E+\widetilde{\alpha}_1\ (t)K\sum_{i=0}^{\infty}Q^i\right]\left|x_0^{'}-x_0^{"}\right|+$$
$$+\left[E+\widetilde{\alpha}_1\ (t)K\sum_{i=0}^{\infty}Q^i\right]b\left(\ \lambda^{'},\ \lambda^{"},y_0^{'},y_0^{"}\right)\leq\left[E+\widetilde{\alpha}_1\ (t)\times\right.$$
$$\left.\times K(E-Q)^{-1}\right]\left[\left|x_0^{'}-x_0^{"}\right|+b\left(\ \lambda^{'},\ \lambda^{"},y_0^{'},y_0^{"}\right)\right],$$

أي أن المتراجحة (1.16) (موجودة) فعلاً [12].

مبرهنة4:

إذا تحققت شروط الفرضية 1 تكون الدالة المحددة $\Delta(y_0,\lambda)$ من الشكل (1.12) مستمرة في المجال $G\times A$ ومن أجل أية ثنائيات من الشكل (1.15) تحقق المتراجحة:

$$\left|\Delta\left(y_0^{'},\ \lambda^{'}\right)-\Delta\left(y_0^{"},\ \lambda^{"}\right)\right|\leq\frac{1}{T}b\left(\ \lambda^{'},\ \lambda^{"},y_0^{'},y_0^{"}\right)+$$
$$K\left[E+\frac{\pi T}{9}K(E-Q)^{-1}\left[\left|x_0^{'}-x_0^{"}\right|+b\left(\ \lambda^{'},\ \lambda^{"},y_0^{'},y_0^{"}\right)\right],\right.\qquad(1.18)$$

البرهان. بحسب المبرهنة (1.1) فأن نهاية متتالية الدوال (1.8) تمثل دالة مستمرة. لذلك عندما يكون: $\Delta(y_0,\lambda)\ \in \mathrm{G}\times A$ تكون الدالة $\Delta(y_0,\lambda)$ مستمرة ومحدودة:

$$|\Delta(y_0,\lambda)| \le \frac{1}{\lambda_2 T}\left|C^{-1}d-\left(\lambda_1 C^{-1}A+\lambda_2 E\right)x_0\right| + M.$$

وفق لتحديد $\Delta(y_0,\lambda)$ من أجل الثنائيات العشوائية (1.15) مع الأخذ بالحسبان الفرضية 1 يكون لدينا:

$$\begin{gathered}\left|\Delta\left(y_0', \lambda'\right)-\Delta\left(y_0'', \lambda''\right)\right| \le \frac{1}{T} b\left(\lambda', \lambda'', y_0', y_0''\right)+\\ \frac{1}{T} K \int_0^T |x^*(t,y_0,\lambda)-x_m(t,y_0,\lambda)|\,dt \le \\ \frac{1}{T} b\left(\lambda', \lambda'', y_0', y_0''\right)+\left[K+\frac{1}{T}K^2(E-Q)^{-1}\int_0^T \tilde{\alpha}_1\,(t)dt\right]\times \\ \times\left[\left|x_0'-x_0''\right|+b(\lambda', \lambda'', y_0', y_0'')\frac{1}{T} b\left(\lambda', \lambda'', y_0', y_0''\right)+\right. \\ K\left[E+\frac{\pi T}{9}K(E-Q)^{-1}\left[\left|x_0'-x_0''\right|+b(\lambda', \lambda'', y_0', y_0'')\right]\right.,\end{gathered}$$

أي أن المتراجحة (1.18) تنفذ فعلاً.

مبرهنة5:

لنفترض أن شروط المبرهنة1 محققة عندئذٍ ولكي يتضمن مجال فرعي ما من مجال تحديد مسألة القيمة الحدية $(1.1)-(1.3)$

$$A'' = G'' \times \left[\tilde{A}_1', \tilde{A}_1''\right] \times \left[\tilde{A}_2', \tilde{A}_2''\right] \subset G \times \left[A_1', A_1''\right] \times \left[A_2', A_2''\right], \qquad (1.19)$$

فأن الثنائية (y_0^*, λ^*) التي تحدد من أجل هذه المسألة عندما يكون $\lambda=\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*)$، حلها $x=x(t)$ بقيمة أبتدائية $x^*(0)=\left(x_{01},\ x_{02,}y_0^*\right)$، لابد من وجود المتراجحة التالية من أن تكون من أجل m والثنائية العشوائية $\left(\bar{y}_0,\bar{\lambda}\right)$ من المجال (1.19) [13]

$$\begin{gathered}\left|\frac{1}{\bar{\lambda}_2 T}\left[C^{-1}d-(\bar{\lambda}_1 C^{-1}A+\bar{\lambda}_2 E)\bar{x}_0\right]-\frac{1}{T}\int_0^T f\left(t,x_m\left(t,\bar{y}_0,\bar{\lambda}\right)\right)dt\right| \le \\ sub_{(y_0,\lambda)\in A''}\left\{\frac{1}{T}b\left(\bar{\lambda},\lambda,\bar{y}_0,y_0\right)++K\left[E+\frac{\pi T}{9}K(E-Q)^{-1}\right]\times\right. \\ \left.\left|x_0'-x_0''\right|+b(\lambda', \lambda'', y_0', y_0'')\right\}+\varepsilon\left(\Delta\left(\bar{y}_0,\bar{\lambda}\right),\Delta_m\left(\bar{y}_0,\bar{\lambda}\right)\right),\end{gathered}$$

حيث:

$\bar{x}_0 = (x_{01},\ x_{02,}\bar{y}_0),\ \varepsilon\left(\Delta(\bar{y}_0,\bar{\lambda}),\Delta_m(\bar{y}_0,\bar{\lambda})\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\left(\frac{T}{\pi}K\right)\times w_3(\bar{y}_0,\bar{\lambda})$؛
الأشعة $w_3(\bar{y}_0,\bar{\lambda})$، $b(\lambda', \lambda'', y_0', y_0'')$ مستخدمة في (1.10)، (1.16).

لندرس هذا التقريب العددي التحليلي ولإيجاد حلول مسائل القيمة الحدية التي تحوي بارامترات متجهة في الشروط الحدية على المثال المحدد التالي [14].

مثال : لنفترض أنه في المقطع $t \in [0,1]$ أعطيت مسألة حدية ثنائية النقاط ببارامتر واحد في الشروط الحدية

$$x_1 = x_2;$$
$$x_2 = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{19}{100}; \tag{1.20}$$
$$x(0) - \lambda x(1) = d; \tag{1.21}$$
$$x_1(0) = x_{01} = 0.1;\ \ d = (0 - 0.1). \tag{1.22}$$

من الواضح أن مسألة القيمة الحدية المعطاة عبارة عن حالة خاصة (1.1) – (1.3) عندما تكون:

$$f(t,x) = \left(f_1(t,x), f_2(t,x)\right) = \left(x_2, \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{19}{100}\right), \tag{1.23}$$
$$A = E,\qquad C = -E,\ \ d = (0;\ -0{,}1)$$

لنفترض أن القسم الأيمن (1.23) محدد ومستمر في المجال:

$$(t,x) \in (0,1) \times D,\ \ D = \left\{x = (x_1,x_2) \in E_2; |x_2| \le \frac{1}{2}\right\}. \tag{1.24}$$

في المجال المغلق المحدود (1.24) الدالة $f(t,x)$ محددة بالشعاع M وحسب المتغير x تحقق شروط ليبشيتز مع المصفوفةK:

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}31 \end{bmatrix},\qquad K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

من السهل أن نرى أنه من أجل المسألة (1.20) المتجه β في (1.5) يعطى كما يلي:

$$\beta = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}16 \end{bmatrix} + \beta_1(x_0,\lambda) = \begin{bmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \end{bmatrix},$$
$$\beta_1(x_0,\lambda) = |\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)x_0| \tag{1.25}$$

لذلك فإن مجموعة النقاط D_β الواقعة في المجال D لجميع قيم λ من مجال ما $I_\lambda = [0{,}4; 0{,}9]$ مع محيطه β.

$$D_\beta = \left\{x \in E_2;\ \ |x_1| \le \frac{1}{2} - \beta^{(1)}; |x_2| \le \frac{1}{2} - \beta^{(2)}\right\}, \tag{1.26}$$

يبين التحقق المباشر أنه توجد النقاط $x_0 = (x_{01}, x_{02}) = (0,1,x_{02})$, التي من أجلها القيم المحسوبة بموجب (1.25) $\beta^{(2)} < 1/2$ H $\beta^{(1)} < 1/2$. وبالتالي فإن المجموعة D_β من الشكل (1.26) ليست خالية. بإيجاد القيمة الحقيقية الأكبر لـ $\lambda(Q)$ من المصفوفة $Q = \frac{1}{\pi}K$، نتأكد أنها أقل من الواحد.

وهكذا، يمكن تطبيق الطريقة العددية التحليلية على المسألة المدروسة في المجال (1.24) للمسألة الحدية ثنائية النقاط مع البارامتر في الشروط الحدية [15].

التقريبات المتتالية (1.8) من أجل المسألة (1.20) – (1.22) تأخذ الشكل التالي:

$$x_m(t, y_0, \lambda) = 0{,}1 + \int_0^t \left[f_1(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)) - \int_0^1 f_1(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda))ds\right]dt + t\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)0{,}1; \qquad (1.27)$$

$$x_{m2}(t, y_0, \lambda) = x_{02} + \int_0^t \left[f_2(t, x_{m-1}(t, y_0, \lambda)) - \int_0^1 f_2(s, x_{m-1}(s, y_0, \lambda))ds\right]dt + t\left[\frac{0{,}1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)x_{02}\right],$$

حيث *m = 1, 2, …;* ؛ $x_0(t, y_0, \lambda) = (x_{01}, x_{02}) = (0, 1;\ x_{02})$ ؛

$x_m(t, y_0, \lambda) = (x_{m1}(t, y_0, \lambda), x_{m2}(t, y_0, \lambda)), f_1(t, x), f_2(t, x)$

تعطى بموجب (1.23).

ونعلم أن تقارب التقريبات المتتالية (1.27) عندما $m \to \infty$ بانتظام من الدالة الحدية $x^*(t, y_0, \lambda)$. من (1.27) عندما *m = 1* بموجبه نحصل على التقريب الأول[15].

$$\begin{aligned} x_{11}(t, y_0, \lambda) &= 0{,}1 + C_{11}(\lambda, x_{02})t, \\ x_{12}(t, y_0, \lambda) &= x_{02} + d_{11}(\lambda, x_{02})t, \end{aligned} \qquad (1.28)$$

حيث:

$$C_{11}(\lambda, x_{02}) = 0{,}1\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right);$$

$$d_{11}(\lambda, x_{02}) = \left[\frac{0{,}1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)x_{02}\right];\ y_0 = x_{02}$$

وبحساب (1.28) من (1.27) عندما *m = 2* نحصل على التقريب الثاني

$$\begin{aligned} x_{21}(t, y_0, \lambda) &= 0{,}1 + C_{21}(\lambda, x_{02})t + C_{22}(\lambda, x_{02})t^2, \\ x_{22}(t, y_0, \lambda) &= x_{02} + d_{21}(\lambda, x_{02})t + d_{22}(\lambda, x_{02})t^2 \\ &\quad + d_{23}(\lambda, x_{02})t^3, \end{aligned} \qquad (1.29)$$

حيث:

$$C_{21}(\lambda, x_{02}) = x_{02} - d_{11}(\lambda, x_{02}) + C_{11}(\lambda, x_{02});$$

$$C_{22}(\lambda, x_{02}) = \frac{d_{11}(\lambda, x_{02})}{2};\ \ d_{21}(\lambda, x_{02})$$
$$= d_{11}(\lambda, x_{02}) + \frac{d_{11}^2(\lambda, x_{02})}{4} +$$
$$+\frac{1}{2}x_{02}d_{11}(\lambda, x_{02}) - 0{,}1C_{11}(\lambda, x_{02});$$
$$d_{22}(\lambda, x_{02}) = \frac{0{,}1}{2}C_{11}(\lambda, x_{02}) - \frac{1}{4}x_{02}d_{11}(\lambda, x_{02});$$
$$d_{23}(\lambda, x_{02}) = \frac{d_{11}^2(\lambda, x_{02})}{12}.$$

نوجد حل المعادلة المحددة عندما $m = 0$. يكون لهذه المعادلة الشكل التالي:

$$\Delta_{01}(y_0, \lambda) = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)0{,}1 - x_{02} = 0,$$
$$\Delta_{01}(y_0, \lambda) = \frac{0{,}1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)x_{02} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4}x_{02}^2 = 0.$$

بحل المجموعة الأخيرة من المعادلات نصل إلى:

$$0{,}0975\lambda^2 + 0{,}105\lambda - 0{,}1025 = 0,$$

ومنها:

$$\lambda^{(0)} \approx 0{,}62;\quad x_{02}^{(0)} \approx 0{,}06. \qquad (1.30)$$

يمكن قبول القيم (1.30)على أنها القيمة الأبتدائية المقربة x_{02} من حل مسألة القيمة الحدية (1.20) – (1.21) والقيمة المقربة للبارامتر λ. [16] نلاحظ أن الحل الدقيق لهذه المسألة الحدية

$$x_1^*(t) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}t^2, \qquad x_2^*(t) = \frac{1}{5}t,\ \ \lambda^* = {}^1\!/_2, \qquad (1.31)$$

وبالتالي $x_2^*(0) = 0$.

بوضع القيم الناتجة (1.30) في التقريبات الأولى والثانية (1.28)، (1.29) يكون لدينا

$$x_{11}\left(t, x_{02}^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) \sim 0{,}1 + 0{,}6t;\ \ x_{12}\left(t, x_{02}^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) \sim 0{,}06 + 0{,}2t;$$
$$x_{21}\left(t, x_{02}^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) \sim 0{,}1 - 0{,}07t + 0{,}1t^2;$$
$$x_{22}\left(t, x_{02}^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) \sim 0{,}06 + 0{,}2t + 10^{-5}t + 3.10^{-3}t^3.$$

بمقارنة هذه العبارات مع (1.31)، من الواضح أن القيم التي تم الحصول عليها بالتقريب الصفري تعكس بشكل صحيح وكاف القيم المطلوبة كماً ونوعاً الداخلة في حل مسألة القيمة الحدية (1.20) – (1.22).

4. النتائج والتوصيات:

لا بد في نهاية هذا البحث أن نشير إلى بعض النتائج وبعض القضايا التي نوصي بها للمتابعة في هذا البحث:

- من الواضح أن القيم التي تم الحصول عليها بالتقريب الصفري تعكس بشكل صحيح وكاف القيم المطلوبة كماً ونوعاً الداخلة في حل مسألة القيمة الحدية.

- يمكن تطبيق الطريقة العددية التحليلية المبينة في على المسألة المدروسة للمسألة الحدية ثنائية النقاط مع البارامتر في الشروط الحدية.
- نوصي بدراسة المخطط العددي التحليلي وإيجاد حلول مسائل القيمة الحدية التي تحوي بارامترات متجهة في الشروط الحدية على أمثلة أخرى غير المثال المطروح في البحث .
- إذا كانت الشروط النظرية المدروسة غير محققة ضمن الشروط المأخوذة فإنه من أجل أي ثنائية هل يمكن أن يتطابق حل مسألة كوشي مع حل المعادلة المشوشة.

المراجع

1]. PANDLT S.,KUMARM., 2014,"haarwavelet approach for numerical solution of two parametraters singularly perturbed boundary value problems", Appl. Math.in sci. vol.6, pp:29965-2974.

2]. GUPTA Y.,2017. *"Numerical solution of system of boundary value problems using B-spline with free parameter"*, mathematical Sciences and its applications, AIP confer . 1802,pp1-6.

3]. PANDEY P.K., 2018,*"Solutino of two point boundary value problems, a numerical approach: parametrical difference method"*, applied mathematics and nonlinear science,vol.3,No.2, PP649-658.

4]. BAINOV D.S.; KOSTADINOV I.; MINH VAN N.; ZABREIKO P.1994, *"Atopological classification of differential equations with impulse effect"*. Tamkang J. Math. **25**, pp15-27.

5]. BAINOV D.S.; SIMEONOV P. S.1989, *"Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Applications"*. Ellis Horwood, Chichester.

6]. HRISTOVA S. G.; BAINOV D.S.1987, *"Numeric-analytic method for finding the soluation of a boundary-value problem for a system of differential equations with impulses"* Mathematical Reprints of Toyama University, Vol. 10 ,pp1-22.

7]. HRISTOVA S.G.; BAINOV D.S.1988*" Bounded solutions of systems of differential equations with impulses"* .Annales Pulmonic Mathematic, 47,pp 191-206.

8]. KULEV G.K.; BAINOV D.S.1995,*" Lipschitz quasistability of impulsive differential equations"*. Dynamics and Stability of Systems 10, pp5-12.

9]. LAKSHMIKANTHAM V.; BAINOV D.S.; SIMEONOV.P.S.1989, *"Theory of Impulsive Differential Equation"*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London.

10]. MILOVANOVIC G.V.1991," *Numerical Analysis"* Part. Naučna Knjiga, Belgrade, (Serbian).

11]. BERMANT A., 1975, *"Mathematical Analysis"*, Moscow, Mir.

12]. ELSGOLTS L., 1973, "*Differential Equations and the Calculus of Variations"* Moscow, Mir.

13]. ERUGE N. Y, 1972, *"An Elementary Course of Differential Equations"*, Mensk .SSR.

14]. GOHN A. T, 1989, *Differential Equations.* Moscow, Mir

15]. METROPOLSKE U. F, 1989, *"Virtual rotational surfaces and the conditions of the system existence under impulsive influence"*, Ukrane –Kiev, Magazine of scientific mathematics.

16]. RICHARD B., 1997, *"Schaum,s 2500 Solved Problems In Differential Equations"* Moscow, Mir