مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (3) العدد (3)2019
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series Vol. (3) No.(3) 2019

معايير لتذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد والأعظمي

د. سامي انجرو*

د. رامز كروم **

محمد معلا***

(تاريخ الإيداع 12/9/ 2019. قُبِل للنشر في 24 / 10 /2019)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد والأعظمي $[r(t)z'(t)]' + c(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\big(x(s), r(t)z'(t)\big) = 0$، إذ إن التابع $z(t)$ يعطى بالعلاقة $z(t) = x(t) + a(t)x\big(\theta(t)\big)$. حصلنا على معايير جديدة للتذبذب، كما قدمنا أيضاً مثالين لتوضيح النتائج الرئيسة.

كلمات مفتاحية: معادلة تفاضلية نصف خطية – محايد – أعظمي – تذبذب – معايير التذبذب.

---

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

** أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه)– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

Oscillation Criteria for Second Order Generalized Half-Linear Neutral Differential Equations with Maxima

Dr. Sami Injrou*
Dr. Ramez Karroum**
Mohammad Moalla***

(Received 12 /9 /2019. Accepted 24/ 10 /2019)

□ ABSTRACT □

This research aims to study the oscillation of the second order generalized half-linear neutral differential equation with maxima $[r(t)z'(t)]' + c(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\big(x(s), r(t)z'(t)\big) = 0$ where $z(t) = x(t) + a(t)x\big(\theta(t)\big)$. We obtained some oscillation criteria. Two examples are also provided to illustrate the main results.

Keywords: Half-Linear Differential Equation – Neutral –Maxima– Oscillation Criteria

* Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.
** Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.
*** PhD Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة

تلعب المعادلات التفاضلية بشكل عام دوراً مهماً في نمذجة العديد من المشكلات التي تصادفنا في حياتنا، كما تعبر عن الظواهر الطبيعية والفيزيائية بصورة رياضية، وبشكل خاص تلك المعادلات ذات الحد المحايد(Neutral)، والأخرى ذات الحد الأعظمي(Maxima)، إذ تفيد هذه المعادلات في أنظمة التحكم الآلي بنظم تقنية مختلفة [8]، إن ما يميز هذا النوع من المعادلات أننا قد نجد لنفس المعادلة ذات الحد المحايد والأعظمي حلولاً متذبذبة (Oscillatory) وأخرى غير متذبذبة (Non–Oscillatory). تمكننا دراسة السلوك اللانهائي لحلول المعادلات التفاضلية ذات الحد المحايد من التنبؤ بنتائج تلك الظواهر الموصوفة، وبالتالي إمكانية السيطرة عليها والتحكم بها. من هنا تأتي أهمية المعادلات ذات الحد المحايد والأعظمي لوصف تلك الظواهر.

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية بالشكل الآتي:[5,4,2]

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)f\big(x(t), r(t)x'(t)\big) = 0 \qquad (1)$$

إن حيث $f(x,y) = |x|^{p-1}|y|^{2-p}sgn(x)$، و p عدد حقيقي يحقق $p \geq 1$.

يتمتع التابع $f(x,y)$ بالخواص الآتية:

1. مستمر على المنطقة $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$، حيث إن $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$،
2. $f(x,y)$ متجانس من الدرجة الأولى، أي يحقق العلاقة $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$ أياً كانت λ من $\mathbb{R}$ ،
3. يحقق التابع $f(x,y)$ العلاقة $xf(x,y) > 0$، وذلك من أجل $xy \neq 0$،
4. يضمن التابع $f(x,y)$ وجود ووحدانية الحل للمعادلة (1)، وبالتالي من أجل أي نقطة (x_1, x_2) من Ω، فإنه يوجد حل $x(t)$ للمعادلة (1) يحقق الشرطين: $x(t_0) = x_1\, , x'(t_0) = x_2$ ،
5. إذا كان التابع $F(t)$ معرفاً بالعلاقة $F(t) := tf(t,1)$، عندئذٍ يتحقق أن $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+F(t)} < +\infty$ و $\lim_{|t|\to+\infty} F(t) = +\infty$.

يقصد بتذبذب المعادلة (1) هو أن يملك كل حل من حلولها عدداً لانهائياً من الأصفار على مجال ما، أما عدم التذبذب فهو أن يوجد حل ما للمعادلة (1) بحيث يملك عدداً منتهياً من الأصفار على ذلك المجال.[1]

درس الباحثان Došlý وŘezníčková الحلول الأساسية للمعادلة(1) في [3]، بعد ذلك وضع الباحثان Bognár و Dosly في [2] معايير مهمة من أجل تذبذب المعادلة (1).

إن المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد والأعظمي لها الشكل الآتي:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\big(x(s), r(t)z'(t)\big) = 0 \;; t \geq t_0 \geq 0 \qquad (2)$$

إن حيث $f(x,y)$ معرف كما في المعادلة (1) بشرط p عدد طبيعي زوجي يحقق $p \geq 2$، وأن $c(t)$ و $r(t)$ تابعان موجبان تماماً، والتابع $\tau(t)$ يتمتع بالخواص الآتية:

1) $\tau(t) \in C^1([t_0, +\infty[, \mathbb{R})$
2) $\tau(t) \leq t$
3) $\tau'(t) > 0$
4) $\lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty$

أما التابع $z(t)$ ، فيعطى بالعلاقة $z(t) = x(t) + a(t)x\big(\theta(t)\big)$، $a(t)$ إن حيثتابع اشتقاقي ويحقق أن $0 \le a(t) \le a_0 < 1$، بينما التابع $\theta(t)$ يحقق أن $\theta(t) \le t$، إضافةً لذلك فإن $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = +\infty$، حيث إن $t \in [t_{0,}, +\infty[$.

بدراسة التابع $[r(t)z'(t)]'$، نلاحظ أن $[r(t)z'(t)]' = [r(t)x'(t)]' + \Big[r(t)\big[a(t)x(\theta(t))\big]'\Big]'$، ومنه نلاحظ وجود الحد المحايد $\Big[r(t)\big[a(t)x(\theta(t))\big]'\Big]'$.

درس الباحثان Fišnarová و Marík في [7] تذبذب المعادلات التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، ووضعا معايير لتذبذب هذه المعادلات ذات الحد المحايد من خلال تذبذب المعادلات الكلاسيكية، ثم عمل الباحثان Marík و Fišnarová في [6] على إيجاد معيار لتذبذب المعادلات ذات الحد المتأخر، وذلك من خلال تذبذب المعادلات الخطية من المرتبة الثانية.

اهتم الباحث Selvarangam وآخرون في [8] بدراسة المعادلات التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد والأعظمي، حيث وضعت عدة معايير لمعالجة مسألة تذبذب حلول ذلك النوع من المعادلات.

سنعرض في القسم الأول من بحثنا بعض التمهيديات التي ستساعدنا في الوصول إلى نتائجنا حول تذبذب المعادلة(2)، أما في القسم الثاني فسنضع بعض المعايير التي تعالج تذبذب المعادلة(2) ثم نبرهن على صحة تلك المعايير، وفي القسم الثالث نعرض مثالاً لمعادلة تفاضلية ذات الحد المحايد والأعظمي ثم نطبق المعايير المذكورة ضمن البحث كي نعالج تذبذب تلك المعادلة.

أهمية البحث وأهدافه

تأتي أهمية هذا البحث من أنه يعطي دراسة تحليلية لسلوك حلول المعادلة (2)، وهي معادلة تفاضلية نصف خطية معممة من المرتبة الثانية ذات حدٍ أعظمي. إن لهذه الدراسة دوراً مهماً في معرفة سلوك الظواهر التي تصفها تلك المعادلة وبالتالي إمكانية التحكم بنتائج تلك الظواهر، ولذلك فإن هذا البحث يعد على درجة كبيرة من الأهمية للباحثين في المجالات العلمية النظرية والتطبيقية. يهدف البحث إلى دراسة السلوك اللانهائي لحلول المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد الأعظمي، المتذبذبة وغير المتذبذبة.

طرائق البحث وموارده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص في مجال نظرية المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد اعتماداً أساسياً على طرائق الدراسة التحليلية للمعادلات التفاضلية العادية.

النتائج والمناقشة:

سنعرض في البداية بعض التمهيديات التي سنستخدمها لإتمام المبرهنات الموجودة في هذا البحث.

تمهيدية 1:

ليكن $x(t) > 0$ حلاً للمعادلة(2)، عندئذ $z(t)$ يحقق إحدى الحالتين الآتيتين:

1) $z(t) > 0$ ،$z'(t) > 0$ و $[r(t)z'(t)]' \leq 0$.

2) $z(t) > 0$ ،$z'(t) < 0$ و $[r(t)z'(t)]' \leq 0$.

برهان:

من أجل $x(t) > 0$ حل للمعادلة (2)، حيث إن $t \geq t_0$، فإنه يوجد $t_1 \geq t_0$ بحيث يكون $x\big(\theta(t)\big) > 0$، ومنه فإن $z(t) = x(t) + a(t)x\big(\theta(t)\big) > 0$.

من المعادلة(2) نجد أن:

$$[r(t)z'(t)]' = -c(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(x(s), r(t)z'(t)\right) \leq 0 \qquad (3)$$

وذلك من أجل $t \geq t_0$ ، ومنه فإن $[r(t)z'(t)]' \leq 0$ ، أصبح لدينا التابع $r(t)z'(t)$ متناقص، وهنا نميز حالتين:

إما أن يكون $r(t)z'(t) > 0$ من أجل كل $t \geq t_0$، وبالتالي $z'(t) > 0$ لأن $r(t)$ موجب تماماً، وإما أن يغير إشارته إلى السالب ويصبح $r(t)z'(t) < 0$ من أجل $t \geq t_1 > t_0$، وبالتالي سيحافظ على تلك الإشارة لأنه متناقص، ومنه $z'(t) < 0$ عندما $t \geq t_1$.

تمهيدية 2:

ليكن $x(t) < 0$ حلاً للمعادلة(2)، عندئذٍ $z(t)$ يحقق إحدى الحالتين الآتيتين:

1) $z(t) < 0$ ،$z'(t) > 0$ و $[r(t)z'(t)]' \geq 0$.

2) $z(t) < 0$ ،$z'(t) < 0$ و $[r(t)z'(t)]' \geq 0$.

برهان:

يتم البرهان بطريقة مماثلة للتمهيدية 1.

تمهيدية 3:

إن $x(t) < 0$ حل للمعادلة(2) عندما يكون $-x(t)$ حلاً للمعادلة الآتية:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)\min_{s\in[\tau(t),t]} f\left(x(s), r(t)z'(t)\right) = 0 \qquad (4)$$

برهان:

بما أن $-x(t)$ حل للمعادلة (4) فإنه لدينا :

$$-[r(t)z'(t)]' + c(t)\min_{s\in[\tau(t),t]} f\left(-x(s), -r(t)z'(t)\right) = 0 \qquad (5)$$

وبحسب الخاصة الثانية للتابع $f(x,y)$ نجد أن:

$$-[r(t)z'(t)]' + c(t)\min_{s\in[\tau(t),t]}\left[-f\left(x(s), r(t)z'(t)\right)\right] = 0 \qquad (6)$$

وبما أن $\min(-M) = -\max(M)$ وذلك مهما يكن العدد الحقيقي M، فإنه يتم البرهان.

تمهيدية 4:[7]

ليكن لدينا a و w و b أعداد حقيقية، حيث $w \geq 0$ و $b \geq 0$، عندئذٍ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$aw - bw^{\frac{p}{p-1}} \leq \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} a^p \frac{1}{b^{p-1}} \tag{7}$$

كما نذكر متراجحة يونغ الشهيرة، حيث سنستخدمها في البراهين القادمة وهي بالعلاقة $\mu.\vartheta \geq \frac{\mu^\alpha}{\alpha} + \frac{\vartheta^\beta}{\beta}$ حيث إن μ, ϑ عددان حقيقيان موجبان، كما أن $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

معايير تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة ذات الحد المحايد والأعظمي

للتبسيط سنضع $A(t) := \int_t^{+\infty} \frac{1}{r(s)} ds$.

مبرهنة 1:

ليكن لدينا المعادلة(2) مع $A(t_0) < +\infty$، إذا كان $\frac{a(t)A(\theta(t))}{A(t)} < 1$ ويوجد تابع اشتقاقي متزايد $\rho(t) > 0$ وذلك من أجل $t > t_0$، ويحقق الآتي:

(8)

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[\rho(s) c(s) \max_{u\in[\tau(s),s]} f\left(1-a(u),1\right) - \frac{(\rho'(s))^p r(s)}{(\rho(s))^{p-1}(p)^p} \right] ds = +\infty,$$

(9)

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[A^{p-1}(s) c(s) \max_{u\in[\tau(s),s]} f\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)} a(u),1\right) - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{\left(A(s)\right)^{-1}}{r(s)} \right] ds = +\infty$$

عندئذٍ تكون المعادلة(2) متذبذبة.

برهان:

بفرض أن المعادلة(2) غير متذبذبة، عندئذٍ يوجد $x(t) > 0$ من أجل $t > t_0$، ومنه يوجد $t_1 > t_0$ بحيث $x(\theta(t)) > 0$ و $x(\tau(t)) > 0$ وذلك أياً كانت $t > t_1$، ومنه فإن $z(t) > 0$ وهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى:

عندما تكون $z(t) > 0$، $z'(t) > 0$ و $[r(t)z'(t)]' \leq 0$ حيث $t > t_1$، نجد أن $z(t)$ متزايد تماماً، وبما أن $\theta(t) \leq t$، وأن $z(t) \geq x(t)$، فإنه ينتج لدينا الآتي:

(10)

$$x(t) = z(t) - a(t)x(\theta(t)) \geq z(t) - a(t)z(\theta(t)) \geq z(t)(1-a(t))$$

ومنه فإن:

(11)

$$\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(x(s), r(t)z'(t)\right) \geq z^{p-1}(t) \max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(1-a(s), r(t)z'(t)\right)$$

وبالتالي نحصل على المتراجحة الآتية:

$$[r(t)z'(t)]'+c(t)z^{p-1}(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(1-a(s),r(t)z'(t)\right)\le 0 \qquad (12)$$

لنعرف التابع $w(t):=\frac{\rho(t)\, r(t)z'(t)|r(t)z'(t)|^{p-2}}{z^{p-1}(t)}$، إن $w(t)>0$ من أجل $t>t_1$ و $w'(t)$ يحقق الآتي:

$$w'(t)\le \rho'(t)\frac{r(t)z'(t)\left|r(t)z'(t)\right|^{p-2}}{z^{p-1}(t)}+\left(r(t)z'(t)\right)'\frac{\rho(t)\left|r(t)z'(t)\right|^{p-2}}{z^{p-1}(t)}$$

$$-(p-1)\frac{\rho(t)r(t)z'(t)\left|r(t)z'(t)\right|^{p-2}}{z^{p}(t)}z'(t) \qquad (13)$$

ومنه نجد أن:

$$w'(t)\le \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t)-c(t)\rho(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(1-a(s),1\right)-\frac{(p-1)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(t)}w^{1+\frac{1}{p-1}}(t) \qquad (14)$$

وبالاستفادة من التمهيدية 4 نحصل على:

$$w'(t)\le \frac{\left(\rho'(t)\right)^{p} r(t)}{p^{p}\rho^{p-1}(t)}-c(t)\rho(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(1-a(s),1\right) \qquad (15)$$

بالمكاملة من t_1 إلى t نجد أن:

(16)

$$w(t)-w(t_1)\le \int_{t_1}^{t}\left[\frac{\left(\rho'(s)\right)^{p} r(s)}{p^{p}\rho^{p-1}(s)}-c(s)\rho(s)\max_{u\in[\tau(s),s]} f\left(1-a(u),1\right)\right]ds$$

بالتالي نجد الآتي:

(17)

$$w(t_1)\ge w(t_1)-w(t)\ge \int_{t_1}^{t}\left[-\frac{\left(\rho'(s)\right)^{p} r(s)}{p^{p}\rho^{p-1}(s)}+c(s)\rho(s)\max_{u\in[\tau(s),s]} f\left(1-a(u),1\right)\right]ds$$

ومن الفرض لدينا $\int_{t_1}^{t}\left[-\frac{\left(\rho'(s)\right)^{p} r(s)}{p^{p}\rho^{p-1}(s)}+c(s)\rho(s)\max_{u\in[\tau(s),s]} f\left(1-a(u),1\right)\right]ds=+\infty$ ، وهذا تناقض مع تعريف $w(t)$.

الحالة الثانية:

عندما تكون $z(t)>0$، $z'(t)<0$ و $[r(t)z'(t)]'\le 0$ حيث $t>t_1$. لنعرف الآن التابع $v(t)$ بالعلاقة $v(t):=\frac{r(t)z'(t)\left|r(t)z'(t)\right|^{p-2}}{z^{p-1}(t)}$، إن $v(t)<0$ من أجل $t>t_1$، وبما أن $[r(t)z'(t)]'\le 0$، فإنه لدينا $z'(s)\le\frac{r(t)z'(t)}{r(s)}$ من أجل $s\ge t$، وبالمكاملة من t إلى l، نجد الآتي:

$$z(l) \le z(t) + r(t)z'(t)\int_t^1 \frac{1}{r(s)}ds \tag{18}$$

وعندما $l \to +\infty$ نجد أن:

$$0 \le z(1) \le z(t) + r(t)z'(t)A(t) \tag{19}$$

ومنه فإن $\frac{r(t)z'(t)A(t)}{z(t)} \ge -1$ ، وبما أن p زوجي فإن $v(t)A^{p-1}(t) \ge -1$، وبدراسة التابع $\frac{z(t)}{A(t)}$ نجد أنه متزايد لأنه من العلاقة (19) نلاحظ أن $-r(t)z'(t) \le \frac{z(t)}{A(t)}$، وبالاشتقاق نجد $\left(\frac{z(t)}{A(t)}\right)' \ge 0$، ومنه فإن:

$$x(t) = z(t) - a(t)x(\theta(t)) \ge z(t) - a(t)z(\theta(t)) \ge z(t)\left[1 - \frac{A(\theta(t))}{A(t)}a(t)\right] \tag{20}$$

وبالتالي:

$$\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(x(s), r(t)z'(t)\right) \ge z^{p-1}(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(1 - \frac{A(\theta(s))}{A(s)}a(s), r(t)z'(t)\right) \tag{21}$$

وبالتالي نحصل على المتراجحة الآتية:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)z^{p-1}(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(1 - \frac{A(\theta(s))}{A(s)}a(s), r(t)z'(t)\right) \le 0 \tag{22}$$

كما أن $\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-1}{r(t)}(-v(t))^{\frac{1}{p-1}}(t)$، و باشتقاق التابع $v(t)$ نحصل على المتراجحة الآتية:

$$v'(t) \le \left(r(t)z'(t)\right)'\frac{\left|r(t)z'(t)\right|^{p-2}}{z^{p-1}(t)} - (p-1)\frac{r(t)z'(t)\left|r(t)z'(t)\right|^{p-2}}{z^{p}(t)}z'(t) \tag{23}$$

نضرب الطرفين بـ $A^{p-1}(t)$، وبالاستفادة من العلاقة (22) نجد أن:

$$A^{p-1}(t)v'(t) \le -A^{p-1}(t)c(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(1 - \frac{A(\theta(s))}{A(s)}a(s), 1\right) - A^{p-1}(t)(p-1)\frac{(-v(t))^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(t)} \tag{24}$$

وبالمكاملة من t_1 إلى t، وباستخدام التكامل بالتجزئة نجد أن:

$$A^{p-1}(t)v(t) - A^{p-1}(t_1)v(t_1) - (p-1)\int_{t_1}^{t}\frac{1}{r(s)}A^{p-2}(s)v(s)ds \le$$

$$\int_{t_1}^{t} -A^{p-1}(s)c(s)\max_{u\in[\tau(s),s]} f\left(1 - \frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u), 1\right) - (p-1)A^{p-1}(s)\frac{(-v(s))^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(s)}ds$$

وباستخدام العلاقة(19) وبما أن $v(t)<0$ فإن:

$$1+A^{p-1}(t_1)v(t_1)\ge +(p-1)\int_{t_1}^{t}\frac{1}{r(s)}A^{p-2}(s)v(s)ds$$

$$+\int_{t_1}^{t}A^{p-1}(s)c(s)\max_{u\in[\tau(s),s]}f\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)+(p-1)A^{p-1}(s)\frac{\left(-v(s)\right)^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(s)}ds \quad (25)$$

لنضع $\alpha=\frac{p}{p-1}$ و $\beta=p$ ومنه نجد $\alpha,\beta>1;\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$، كما نضع $\mu=-p^{\frac{p-1}{p}}v(t)(A(t))^{\frac{(p-1)^2}{p}}$

و $\vartheta=\frac{p-1}{p^{\frac{p-1}{p}}}(A(t))^{-\frac{1}{p}}$، وحسب متراجحة يونغ $\frac{\mu^{\alpha}}{\alpha}+\frac{\vartheta^{\beta}}{\beta}\ge\mu.\vartheta$ نجد أن:

$$(p-1)\left(-v(t)\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(A(t)\right)^{p-1}+\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p}\left(A(t)\right)^{-1}\ge-(p-1)v(t)\left(A(t)\right)^{p-2} \quad (26)$$

وبتعويض (26) في العلاقة (25) نجد أن:

$$\int_{t_1}^{t}A^{p-1}(s)c(s)\max_{u\in[\tau(s),s]}f\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p}\frac{\left(A(s)\right)^{-1}}{r(s)}ds\le 1+A^{p-1}(t_1)v(t_1) \quad (27)$$

وعندما t تسعى نحو $+\infty$، نلاحظ وجود تناقض مع محدودية المقدار $A^{p-1}(t_1)v(t_1)$.

مبرهنة 2:

ليكن p عدداً زوجيّاً، وليكن $A(t_0)<+\infty$، وبفرض وجود تابع موجب تماماً ومتزايد واشتقاقي $\rho(t)$ ويحقق الشرط(8)، عندئذٍ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[A^{p-1}(s)c(t)K-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p}\frac{\left(A(s)\right)^{-1}}{r(s)}\right]ds=+\infty \quad (28)$$

مهما يكن $K\in[0,1]$، فإن المعادلة(2) متذبذبة.

برهان:

لنفرض أن المعادلة(2) غير متذبذبة، ومنه يوجد $x(t)>0$ حل للمعادلة(2) من أجل $t>t_0$، وهنا $z(t)$ يحقق إحدى الحالتين بحسب التمهيدية 1:

الحالة الأولى:

عندما يكون $z(t)>0$، $z'(t)>0$ و $[r(t)z'(t)]'\le 0$ من أجل $t>t_1$، يتم البرهان عليها بنفس خطوات برهان الحالة الأولى للمبرهنة 1.

الحالة الثانية:

عندما يكون $z(t)>0$، $z'(t)<0$ و $[r(t)z'(t)]'\le 0$ من أجل $t>t_1$. لنعرف التابع $v(t)$ بالشكل $v(t):=\frac{r(t)z'(t)|r(t)z'(t)|^{p-2}}{z^{p-1}(t)}$، نجد أن $v(t)<0$ من أجل $t>t_1$. لنفرض أن $\lim_{t\to+\infty}z(t)=c$، إن $c>0$، لأن $z(t)\ge x(t)>0$، وعندما يكون $c=0$، فإن $x(t)=0$ عند قيمة ما لـ t وهذا تناقض، ومنه فإن $c<z(t)<c+\varepsilon$ مهما كان $\varepsilon>0$، لنضع $\varepsilon<\frac{(1-a_0)c}{a_0}$، عندئذٍ نجد الآتي:

$$x(t)=z(t)-a(t)x(\theta(t))\ge z(t)-a_0z(\theta(t))\ge c-a_0(c+\varepsilon)\ge mz(t) \quad (29)$$

حيث إن $m := \frac{c - a_0(c+\varepsilon)}{c+\varepsilon}$. الآن بحسب العلاقة (23):

$$v'(t) \le \frac{-c(t)}{z^{p-1}(t)} \max_{s\in[\tau(t),t]} f(mz(s),1) - (p-1)\frac{\left(-v(t)\right)^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(t)} \tag{30}$$

وبما أن $z(t)$ متناقص، فإننا نجد الآتي:

$$v'(t) \le -c(t)\left(\frac{z(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1} m^{p-1} - (p-1)\frac{\left(-v(t)\right)^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(t)}$$

$$\le -c(t)m^{p-1} - (p-1)\frac{\left(-v(t)\right)^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(t)} \tag{31}$$

نضرب طرفي المتراجحة (31) بـ$A^{p-1}(t)$ ، وبالتالي نجد أن:

$$A^{p-1}(t)v'(t) \le -A^{p-1}(t)m^{p-1} - (p-1)A^{p-1}(t)\frac{\left(-v(t)\right)^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(t)} \tag{32}$$

وبالمكاملة من t_1 إلى t، وباستخدام التكامل بالتجزئة نجد أن:

$$A^{p-1}(t)v(t) - A^{p-1}(t_1)v(t_1) - (p-1)\int_{t_1}^{t}\frac{1}{r(s)}A^{p-2}(t)v(s)ds$$

$$\le \int_{t_1}^{t} -A^{p-1}(s)m^{p-1} - (p-1)A^{p-1}(s)\frac{\left(-v(s)\right)^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(s)}ds \tag{33}$$

وباستخدام العلاقة (19) نجد الآتي:

$$1 + A^{p-1}(t_1)v(t_1) \ge -(p-1)\int_{t_1}^{t}\frac{1}{r(s)}A^{p-2}(t)v(s)ds$$

$$+\int_{t_1}^{t}\left[A^{p-1}(s)m^{p-1} + (p-1)A^{p-1}(s)\frac{\left(-v(s)\right)^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(s)}\right]ds \tag{34}$$

وبما أن $v(t) < 0$ فإن:

$$1 + A^{p-1}(t_1)v(t_1) \ge +(p-1)\int_{t_1}^{t}\frac{1}{r(s)}A^{p-2}(t)v(s)ds$$

$$+\int_{t_1}^{t} A^{p-1}(s)m^{p-1} + (p-1)A^{p-1}(s)\frac{\left(-v(s)\right)^{1+\frac{1}{p-1}}}{r(s)}ds \tag{35}$$

لنضع $\alpha:=\frac{p}{p-1}$ و $\beta:=p$ ومنه نجد $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\ \alpha,\beta>1$، كما نضع $\mu:=-p^{\frac{p-1}{p}}v(t)(A(t))^{\frac{(p-1)^2}{p}}$ و $\vartheta:=\frac{p-1}{p^{\frac{p-1}{p}}}(A(t))^{-\frac{1}{p}}$، وحسب متراجحة يونغ $\frac{\mu^\alpha}{\alpha}+\frac{\vartheta^\beta}{\beta}\ge\mu.\vartheta$، نجد أن:

$$(p-1)\left(-v(t)\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(A(t)\right)^{p-1}+\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\left(A(t)\right)^{-1}\ge-(p-1)v(t)\left(A(t)\right)^{p-2}\qquad(36)$$

ومنه فإن:

$$\int_{t_1}^{t}\left[A^{p-1}(s)c(s)m^{p-1}-\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\frac{\left(A(s)\right)^{-1}}{r(s)}\right]ds\le1+A^{p-1}(t_1)v(t_1)\qquad(37)$$

وبجعل $t\to+\infty$ حيث $K=m^{p-1}$، نحصل على تناقض مع محدودية المقدار $A^{p-1}(t_1)v(t_1)$.

مبرهنة 3:

ليكن لدينا المعادلة(2) حيث $A(t_0)<+\infty$، إذا كان $\frac{a(t)A(\theta(t))}{A(t)}<1$ ويوجد تابع اشتقاقي $\rho(t)>0$ متزايد ويحقق الشرط (8)، عندئذٍ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r(y)}\left[\int_{t_0}^{y}(p-1)c(s)A^{p-1}(s)\max_{u\in[\tau(s),s]}f\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)ds\right]^{\frac{1}{p-1}}dy=+\infty\qquad(38)$$

فإن المعادلة(2) متذبذبة.

برهان:

لنفرض أن المعادلة(2)غير متذبذبة، ومنه يوجد $x(t)>0$ حل للمعادلة من أجل $t>t_0$، وهنا $z(t)$ يحقق إحدى الحالتين بحسب التمهيدية 1:

الحالة الأولى:

عندما يكون $z(t)>0$، $z'(t)>0$ و $[r(t)z'(t)]'\le0$ من أجل $t>t_1$، يتم البرهان عليها بنفس خطوات برهان الحالة الأولى للمبرهنة 1.

الحالة الثانية:

عندما تكون $z(t)>0$، $z'(t)<0$ و $[r(t)z'(t)]'\le0$ من أجل $t>t_1$، وجدنا من العلاقة (22) أن:

$$[r(t)z'(t)]'+c(t)z^{p-1}(t)\max_{s\in[\tau(t),t]}f\left(1-\frac{A(\theta(s))}{A(s)}a(s),r(t)z'(t)\right)\le0$$

وبما أن التابع $\frac{z(t)}{A(t)}$ متزايد، فإنه يوجد $M>0$ بحيث إن $\frac{z(t)}{A(t)}>M$ ومنه نجد الآتي:

$$-[r(t)z'(t)]'\ge c(t)M^{p-1}A^{p-1}(t)\max_{s\in[\tau(t),t]}f\left(1-\frac{A(\theta(s))}{A(s)}a(s),r(t)z'(t)\right)\qquad(39)$$

ومنه نجد أن:

$$-(p-1)\left|r(t)z'(t)\right|^{p-2}[r(t)z'(t)]'$$
$$\geq (p-1)c(t)M^{p-1}A^{p-1}(t)\max_{s\in[\tau(t),t]} f\left(1-\frac{A(\theta(s))}{A(s)}a(s),1\right) \qquad (40)$$

وبالمكاملة من t_2 إلى t مع $t_2 > t_1$، نحصل على:

$$-\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1} \geq -\left(r(t_2)z'(t_2)\right)^{p-1}$$
$$+\int_{t_2}^{t}(p-1)c(s)M^{p-1}A^{p-1}(s)\max_{u\in[\tau(s),s]} f\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)ds \qquad (41)$$

وبالتالي نجد أن:

(42)

$$-z'(t)\geq \frac{M}{r(t)}\left[\int_{t_2}^{t}(p-1)c(s)A^{p-1}(s)\max_{u\in[\tau(s),s]} f\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)ds\right]^{\frac{1}{p-1}}$$

وبالمكاملة من t_2 إلى t مع $t_2 > t_1$، نجد أن:

(43)

$$z(t_2)\geq M\int_{t_2}^{t}\frac{1}{r(y)}\left[\int_{t_2}^{y}(p-1)c(s)A^{p-1}(s)\max_{u\in[\tau(s),s]} f\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)ds\right]^{\frac{1}{p-1}}dy$$

وعندما تسعى t نحو $+\infty$ وباستخدام الشرط (38) نحصل على تناقض مع محدودية المقدار $z(t_2)$.

أمثلة:

نقدم فيما يأتي مثالاً عن معادلة تفاضلية نصف خطية ذات حد محايد وأعظمي، ولندرس تذبذبها وفق النتائج التي حصلنا عليها.

مثال1:

لتكن لدينا المعادلة الآتية:

$$(t^2(x(t)+a_0x(t))')'+\lambda\max_{s\in[\tau(t),t]} f(x(s),t^2(x(t)+a_0x(t))')=0 \qquad (44)$$

علماً أن $a_0\in[0,1[$، وأن $\lambda>0$، و $p=2$، و $\tau(t)=\frac{t}{2}$. لندرس تذبذب المعادلة(44) على المجال $[1,+\infty[$. نلاحظ أن $A(t)=\int_t^{+\infty}\frac{ds}{s^2}=\frac{1}{t}$ ، ومنه $A(1)<\infty$، كما أن $\frac{a(t)A(\theta(t))}{A(t)}<1$، وباختيار التابع $\rho(t)$ بالعلاقة $\rho(t)=1$ وذلك أياً كانت $t\geq 1$، وعند تطبيق المعيار في المبرهنة 1 نجد أنه عندما $\lambda>\frac{1}{4(1-a_0)}$ فإن:

$$\limsup_{t\to\infty}\int_1^t\left[\rho(s)c(s)\max_{u\in[\tau(s),s]}f\,\left(1-a(u),1\right)-\frac{(\rho'(s))^p r(s)}{(\rho(s))^{p-1}(p)^p}\right]ds$$
$$=\limsup_{t\to\infty}\int_1^t\left[\lambda\max_{u\in[\frac{s}{2},s]}f\,\left(1-a_0,1\right)\right]ds=+\infty$$

كما نجد أن:

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^t\left[A^{p-1}(s)c(s)\max_{u\in[\tau(s),s]}f\,\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)-\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\frac{\left(A(s)\right)^{-1}}{r(s)}\right]ds$$
$$=\limsup_{t\to\infty}\int_1^t\left[\frac{1}{s}\lambda\max_{u\in[\frac{s}{2},s]}f\,\left(1-a_0,1\right)-\frac{1}{4s}\right]ds=\lim_{t\to\infty}\left[(\lambda\left(1-a_0\right)-\frac{1}{4})\ln s\right]_1^t=+\infty$$

وبالتالي فإن المعادلة(44) متذبذبة.

وعند تطبيق معايير المبرهنة 2، وباختيار التابع $\rho(t)$ بالعلاقة $\rho(t)=1$ وذلك أياً كانت $t\geq 1$، نجد المعيار (8) محققاً، كما نجد أنه من أجل$K\in[0,1[$، عندما $\lambda>\dfrac{1}{4K}$:

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[A^{p-1}(s)c(t)K-\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\frac{\left(A(s)\right)^{-1}}{r(s)}\right]ds$$
$$=\int_1^{\infty}\left[\frac{\lambda K}{s}-\frac{1}{4s}\right]ds=\left[(\lambda K-\frac{1}{4})\ln s\right]_1^{+\infty}=+\infty$$

وبالتالي فإن المعادلة(44) متذبذبة.

وعند تطبيق معايير المبرهنة 3، وباختيار التابع $\rho(t)$ بالعلاقة $\rho(t)=1$ وذلك أياً كانت $t\geq 1$، نجد المعيار (8) محققاً، كما نجد الآتي:

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{r(y)}\left[\int_{t_0}^{y}(p-1)c(s)A^{p-1}(s)\max_{u\in[\tau(s),s]}f\,\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)ds\right]^{\frac{1}{p-1}}dy$$
$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\left[\int_1^y\frac{\lambda}{s}(1-a_0)ds\right]dy=\lambda(1-a_0)\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\ln y\,dy=\lambda(1-a_0)$$

وبالتالي يختل الشرط(38)، وتفشل معايير المبرهنة 3 في إثبات تذبذب المعادلة(44).

مثال2:

لتكن لدينا المعادلة الآتية:

$$\left(t^2\left(x(t)+\frac{1}{3}x(\tfrac{t}{2})\right)'\right)'+t^4\max_{s\in[\frac{t}{2},t]}f\left(x(s),t^2\left(x(t)+\frac{1}{3}x(\tfrac{t}{2})\right)'\right)=0 \qquad (45)$$

علماً أنp=4، وأن$\theta(t)=\tau(t)=\frac{t}{2}$. لندرس الآن تذبذب المعادلة(45) على المجال $[1,+\infty[$.

نلاحظ أن $A(t)=\int_t^{+\infty}\frac{ds}{s^2}=\frac{1}{t}$ ، ومنه$A(1)<+\infty$، كما أن$\frac{a(t)A(\theta(t))}{A(t)}<1$، وباختيار التابع $\rho(t)$ بالعلاقة $\rho(t)=1$ وذلك أياً كانت $t\geq 1$، وعند تطبيق المعيار في المبرهنة 1 فإن:

$$\limsup_{t\to\infty}\int_1^t\left[\rho(s)c(s)\max_{u\in[\tau(s),s]}f\ (1-a(u),1)-\frac{(\rho'(s))^p r(s)}{(\rho(s))^{p-1}(p)^p}\right]ds$$

$$=\limsup_{t\to+\infty}\int_1^t\left[\frac{8}{27}t^4\right]ds=+\infty$$

كما نجد أن:

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_0}^t\left[A^{p-1}(s)c(s)\max_{u\in[\tau(s),s]}f\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)-\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\frac{(A(s))^{-1}}{r(s)}\right]ds$$

$$=\limsup_{t\to+\infty}\int_1^t\left[\frac{s}{27}-\frac{81}{256s}\right]ds=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{s^2}{54}-\frac{81}{256}\ln s\right]_1^t=+\infty$$

وبالتالي فإن المعادلة(45) متذبذبة.

وعند تطبيق معايير المبرهنة 2، وباختيار التابع $\rho(t)$ بالعلاقة $\rho(t)=1$ وذلك أياً كانت $t\geq 1$، نجد المعيار (8) محققاً، كما نجد أنه من أجل$K\in[0,1[$ فإن:

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[A^{p-1}(s)c(t)K-\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\frac{(A(s))^{-1}}{r(s)}\right]ds$$

$$=\int_1^{\infty}\left[Ks-\frac{81}{256s}\right]ds=\left[\frac{Ks^2}{2}-\frac{81}{256}\ln s\right]_1^{+\infty}=+\infty$$

وبالتالي فإن المعادلة(45) متذبذبة.

وعند تطبيق معايير المبرهنة 3، وباختيار التابع$\rho(t)$ بالعلاقة $\rho(t)=1$ وذلك أياً كانت $t\geq 1$، نجد المعيار (8) محققاً، كما نجد الآتي:

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{r(y)}\left[\int_{t_0}^{y}(p-1)c(s)A^{p-1}(s)\max_{u\in[\tau(s),s]}f\left(1-\frac{A(\theta(u))}{A(u)}a(u),1\right)ds\right]^{\frac{1}{p-1}}dy$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\left[\int_1^y\frac{3}{27}sds\right]dy=\frac{3}{54}\int_1^{+\infty}(1-\frac{1}{y^2})dy=+\infty$$

وبالتالي يتحقق الشرط(38)، وتنجح معايير المبرهنة 3 في إثبات تذبذب المعادلة(45).

الاستنتاجات

درسنا في هذا البحث تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد و الأعظمي، حيث عالجنا هذا النوع من المعادلات عندما يكون الوسيطp عدداً زوجيّاً يحقق$p\geq 2$، وتوصلنا إلى المعايير(8) و(9) في المبرهنة 1، كما توصلنا إلى المعيار(28) في المبرهنة 2 إضافة إلى

المعيار (38) في المبرهنة 3، تساعد هذه المعايير في تحديد فيما إذا كانت المعادلة ذات الحد المحايد و الأعظمي متذبذبة، كما قدمنا مثالين بينّا فيهما صحة النتائج التي توصلنا إليها وفعاليتها في دراسة التذبذب لهذا النوع من المعادلات.

المراجع

1] DOŠLÝ, O. *half-linear differential equation*. Elsevier, 2005.

2] DOŠLÝ, O; BOGNÁR, G. *Conditional oscillation and principal solution of generalized half-linear differential equation*. Submitted,Debrecen, pp. 459-451, 2013.

3] DOŠLÝ,O; ŘEZNÍČKOVÁ, J. *Conjugacy and principal solution of generalized half-linear second order differential equations*. Qual, no 5, pp 1-13,2012.

4] ELBERT, A. *On the half-linear second order differential equations*. Acta math, Hung, pp 487–508, 1987.

5] ELBERT,A. *Generalized Riccati equation for half-linear second order differential equations*. J´anos Bolyai, pp, 227–249, 1984.

6] FIŠNAROVÁ, S; R. MARÍK. *Oscillation of half-linear differential equations with delay*. Abstr. Appl. Anal. Art. ID 583147, 6 pp, 2013.

7] FIŠNAROVA, S; R. MARÍK. *Oscillation criteria for neutral second-order half-linear differential equations with applications to Euler type equations.* Boundary Value Problems, pp1-14, 2014.

8] SELVARANGAM, S; RANI, B; THANDAPANI, E. *Oscillation results for second order half-linear neutral delay differential equations with "maxima"*. Tamkang Journal Of Mathematics, Volume 48, Number 3, 289-299, Sept 2017.