مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (4) العدد (1)2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series Vol. (4) No.(1) 2020

دراسة خواص وتقريب صف التوابع $D^r H_0^\alpha$

د. عائدة صائمة*
د. محمد علي**
رهف حمود***

(تاريخ الإيداع 25/9 /2019. قُبِل للنشر في 27 / 2 /2020)

□ ملخّص □

تلعب الصفوف التابعية دورا هاما في التحليل الرياضي وبشكل خاص في مجال التحليل التابعي ومجال نظرية التوابع لذا سيكون بحثنا في نظرية تقريب التوابع العقدية حيث يعتبر صف التوابع المدروس هو المفهوم الرئيسي فيها .

الهدف في هذا البحث هو تركيز الضوء على صف جديد من التوابع العقدية يرمز له بالرمز $D^r H_0^\alpha$ يعتمد في تعريفه على تعريف صف هولدر الشهير H^α حيث قمنا بدراسة العلاقة بين هذا الصف وبعض الصفوف الأخرى مثل $D^r H^\alpha,\ H_0^\alpha$ وإثبات بعض الخواص التي يتمتع بها الصف المذكور للوصول إلى الهدف الرئيسي وهو تطبيق النتائج التي توصلنا إليها لتقريب صف التوابع $D^r H_0^\alpha$ على منحنيات مغلقة تنتمي إلى أسرة واسعة من المنحنيات من خلال تقديم مرهنة لتقريب تلك التوابع.

الكلمات المفتاحية : صف هولدر ، تابع عقدي ، الصف $D^r H_0^\alpha$ ، نظرية التقريب .

*مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا
**أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا
***طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (4) العدد (1)2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series Vol. (4) No.(1) 2020

Studying properties and approximation of class of functions $D^r H_0^\propto$

***Dr. Ayda Saemah**
****Dr. Mohamad Ali**
*****Rahaf Hammoud**

(Received 25/9 /2019. Accepted 27/2/2020)

□ ABSTRACT □

Functional classes play a distinctive role in the mathematical analysis; especially in the fields of functional analysis and theory of functions. So; our research will be about the theory of approximation of the complex functions which consider the studied row functions its main concept.

The target of this research is to conccntrate on a new class of the complex functions that symbolized as $D^r H_0^\propto$ depending in its definition on the famous Holder's class so, we have studied the relationship between the new class $D^r H_0^\propto$ and some other classes as $H_0^\propto$ and $D^r H^\propto$ and proved some properties of the class$D^r H_0^\propto$ to arrive the main purpose of the study is to apply the resulted study in approximation of the functions' class $D^r H_0^\propto$ on closed curves that belong to a wide group of the curves. All that was through submitting a theory for approximation those functions.

Key Words: Holder's Class , Complex Function , The Class $D^r H_0^\propto$، Theory of Approximation.

*Dr. In Math Department-Faculty of Sciences –Tartous University – Tartous-Syria.
**Pro. In Math Department-Faculty of Sciences –Tishreen University – Tartous-Syria.
***Higher student (Master) – In Mathematics Department in –Tartous University – Tartous-Syria.

مقدمة:

تنقسم أساسيات نظرية التقريب للتوابع العقدية بشكل عام إلى ثلاثة أقسام رئيسية هي:

1- صف التوابع العقدية الذي تم تقريبه.

2- صف أدوات التقريب أو صف التوابع التي يتم التقريب إليها وأحد أهم هذه الأدوات صف كثيرات الحدود أو التوابع الكسرية.

3- الفروق بين التوابع المقربة وأدوات التقريب التي تسمى بقيمة أفضل تقريب أو الخطأ الأصغري.

نهتم في هذه المقالة بالبند الأول من أساسيات نظرية التقريب العقدية فمن المعلوم أن أحد أهم الصفوف التابعية التي لفت انتباه دارسي نظرية تقريب التوابع هو صف توابع هولدر H^{α} [1] وبعد ذلك اشتغل الباحثون بتقريب بعض الصفوف التابعية والتي تعتبر تعميم لـ H^{α} مثل : $H_{\alpha}^{\alpha+\beta}$ [1] و $H_{\alpha,p}$ [2] .

سنقدم صف جديد من التوابع $D^{r}H_{0}^{\alpha}$ الذي يعتمد في تعريفه على انتماء مشتق التابع $f_{0}^{(r)}(w) = D^{r} f(\psi(w))$ من المرتبة r إلى صف توابع هولدر على دائرة الوحدة وسندرس خواصه.

هدف البحث وأهميته :

تكمن أهمية هذا البحث من كونه يدرس مسألة تقريب صف جديد من التوابع وعلاقة هذا الصف مع صفوف أخرى وهو يهدف إلى الأمور التالية:

1- عرض تعريف صف جديد من التوابع وهو $D^{r}H_{0}^{\alpha}$.

2- دراسة العلاقة بين الصف الجديد $D^{r}H_{0}^{\alpha}$ وبعض الصفوف الأخرى.

3- إثبات بعض خواص التوابع التي تنتمي إلى الصف $D^{r}H_{0}^{\alpha}$.

4- دراسة التداخل بين $D^{r}H_{0}^{\alpha}$ و $D^{r}H_{0}^{\beta}$.

5- تقريب صف التوابع $D^{r}H_{0}^{\alpha}$ إلى توابع كسرية على أسرة واسعة من المنحنيات المغلقة.

طريقة البحث وموارده:

تعتمد دراسة هذا البحث على بعض المفاهيم والتعاريف والمبرهنات الرياضية المعروفة وقد تم استخدام عدة طرق رياضية تعتمد على أدبيات نظرية تقريب التوابع العقدية.

- تعاريف ومفاهيم أساسية :

- تعريف 1 [1] :

يعرف صف هولدر H^{α} $(0 < \alpha \leq 1)$ على المنحني Γ كما يلي :

$$H^{\alpha}(\Gamma) = \{ f \in C(\Gamma);\ \left|f(z_{1}) - f(z_{2})\right| \leq c\,|z_{1} - z_{2}|^{\alpha}\ ;\ \forall z_{1}, z_{2} \in \Gamma \}$$

ويعرف الصف MH^{α} حيث أن M ثابت ما بالعلاقة :

$$MH^{\alpha}(\Gamma) = \{ f \in C(\Gamma);\ \left|f(z_{1}) - f(z_{2})\right| \leq M\,|z_{1} - z_{2}|^{\alpha}\ ;\ \forall z_{1}, z_{2} \in \Gamma \}$$

ويعرف صف هولدر أيضا من خلال معامل الاستمرارية كما يلي :

- تعريف 2 [3] :

يعرف معامل الاستمرارية للتابع $f(z)$ على المنحني Γ بالعلاقة :

$$\omega(f,\delta) = sup_{|z_1-z_2|<\delta} |f(z_1) - f(z_2)| \; ; \; \forall z_1 , z_2 \in \Gamma$$

أو بالعلاقة :

$$\omega(f,\delta) = sup_{h<\delta} |f(z+h) - f(z)| \; ; \; \forall z_1 , z_2 \in \Gamma$$

ومنه نستطيع تعريف الصف $H^\alpha(0 < \alpha \le 1)$ بالعلاقة :

$$H^\alpha(\Gamma) = \{ f \in C(\Gamma); \omega(f,\delta) \le c\, \delta^\alpha \}$$

سنستعرض الان بعض الرموز المستخدمة في هذه المقالة :

ليكن Γ منحني جوردن يملك طولا محدودا يقسم المستوي إلى قسمين منفصلين

لنرمز لدائرة الوحدة بالرمز γ ونرمز بالرمز $w = \varphi(z)$ للتابع الذي يحول بشكل محافظ خارج المنحني Γ في المستوي Z إلى خارج دائرة الوحدة في المستوي w وبحيث يتحقق أن :

$$\varphi(w) = \infty \qquad , \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

و بـ $Z = \psi(w) = \varphi^{-1}(w)$ للتابع الذي يحول بشكل محافظ خارج دائرة الوحدة إلى خارج المنحني Γ التابع العكسي لـ φ.

إذا كان لدينا تابع $f(z)$ معرف على المنحني Γ فإننا سوف نرمز بـ $f_0 = f\, o\, \psi$ أي $f_0(w) = f(\psi(w))$ وهو تابع معرف على دائرة الوحدة.

- تعريف 3 [4] :

نعرف صف التوابع H_0^α كما يلي :

$$H_0^\alpha(\Gamma) = \{ f \epsilon\, C(\Gamma) \; ; \; f_0(w) = f(\psi(w)) \in H^\alpha(\gamma) \}$$

أي أن :

$f_0(w) \in H^\alpha(\gamma)$ إذا كان $f(z) \in H_0^\alpha(\Gamma)$

- تعريف 4 [5] :

نعرف صف التوابع $D^r H^\alpha$ بالعلاقة :

$$D^r H^\alpha(\Gamma) = \{ f \in C(\Gamma); |f^r(z_1) - f^r(z_2)| \le c\, |z_1 - z_2|^\alpha \; ; \; \forall z_1 , z_2 \in \Gamma \}$$

أي أن المشتق $f^{(r)}(z)$ ينتمي إلى $H^\alpha(\Gamma)$.

- تعريف 5[1]: أسرة المنحنيات– K :

يقال إن المنحني Γ ينتمي إلى أسرة المنحنيات – K إذا كان من أجل أي نقطتين من نقاطه z_1 , z_2 يوجد ثابت $K = K(\Gamma)$ بحيث يتحقق : $\quad |z_1 - z_2| \ge K\, \ell\,(z_1, z_2)$

حيث $\ell\,(z_1, z_2)$ هو طول أقصر قوس بين النقطتين z_1, z_2 أما $|z_1 - z_2|$ فهو طول الوتر الذي يصل بين z_1, z_2.

النتائج والمناقشة :

نقدم فيما يلي تعريف الصف الجديد $D^r H_0^\alpha$ الذي يعتمدَ على تعريف الصفين $D^r H^\alpha$ و H_0^α .

- تعريف 6 :

نعرف صف التوابع $D^r H_0^\alpha$ بالشكل :

$$D^r H_0^\alpha(\Gamma) = \{ f(z): f_0^{(r)}(w) = f^{(r)}\big(\psi(w)\big) \in H^\alpha(\gamma)\}$$

أي أن : $f(z) \in D^r H_0^\alpha(\Gamma)$ إذا كان المشتق من المرتبة r وهو $f_0^{(r)}(w)$ ينتمي إلى H^α.

- ونعرف الصف $D^r H_0^\alpha$ من خلال معامل الاستمرارية بالشكل :

$$D^r H_0^\alpha(\Gamma) = \{ f(Z) \ ; \ \omega\Big(f_0^{(r)}, \delta\Big) \le c\ \delta^\alpha \}$$

- نتيجة 1 : من التعريف (6) ينتج أنه عندما r =0 فإن : $H_0^\alpha = D^r H_0^\alpha$.

سنعرض الأن بعض المبرهنات التي تعطينا العلاقة بين الصف $D^r H_0^\alpha$ والصف $D^r H^\alpha$

مبرهنة 1 :

إذا كان $f(z) \in D^r H^\alpha$ حيث $0 < \alpha \le 1$ وكان التابع $\psi(w) \in H^1(\gamma)$ فإن : $f(z) \in D^r H_0^\alpha(\Gamma)$.

<u>الإثبات :</u>

لدينا $f(z) \in D^r H^\alpha$ فيكون :

$$\left|f^{(r)}(z_1) - f^{(r)}(z_2)\right| \le c\ |z_1 - z_2|^\alpha ;\ \forall z_1, z_2 \in \Gamma$$

وبما أن $\psi(w) \in H^1(\gamma)$ عندئذ يتحقق :

$$|\psi(w_1) - \psi(w_2)| \le c\ |w_1 - w_2| \quad ;\ \forall w_1, w_2 \in \gamma \}$$

وبالتالي سيكون :

$$\begin{aligned}\left|f_0^{(r)}(w_1) - f_0^{(r)}(w_2)\right| &= \left|f^{(r)}\big(\psi(w_1)\big) - f^{(r)}(\psi(w_2))\right| \\ &\le c_1\ |\psi(w_1) - \psi(w_2)|^\alpha \le c_1 c_2^\alpha\ |w_1 - w_2|^\alpha \\ &= c\ |w_1 - w_2|^\alpha \quad ; c = c_1 . c_2^\alpha\end{aligned}$$

منه نجد أن $D^r H^\alpha$ جزئي من $D^r H_0^\alpha$.

مبرهنة 2 :

إذا كان $f(z) \in D^r H_0^\alpha(\Gamma)$ حيث$0 < \alpha \le 1$ وكان $\varphi(z) \in H^1(\gamma)$ فإن : $f(z) \in D^r H^\alpha$.

<u>الإثبات :</u>

بما أن $f(z) \in D^r H_0^\alpha(\Gamma)$ فإن

$$\left|f_0^{(r)}(w_1) - f_0^{(r)}(w_2)\right| \le c_1\ |w_1 - w_2|$$

وكذلك بما أن $\varphi(z) \in H^1(\gamma)$ فإن

$$\left|\varphi(z_{1)} - \varphi(z_2)\right| \le c_2\ |z_1 - z_2|$$

ولنبرهن أن :

$$\left|f^{(r)}(z_1) - f^{(r)}(z_2)\right| \leq c\,|z_1 - z_2|^\alpha$$

$$\left|f^{(r)}(z_1) - f^{(r)}(z_2)\right| = \left|f^{(r)}(\psi(z_1)) - f^{(r)}(\psi(z_2))\right|$$
$$= \left|f_0^{(r)}(w_1) - f_0^{(r)}(w_2)\right| \leq c_1\,|w_1 - w_2|^\alpha$$
$$\leq c_1\left|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)\right|^\alpha \leq c_1\left|c_2|z_1 - z_2|\right|^\alpha$$
$$= c_1 c_2^\alpha |z_1 - z_2|^\alpha = c\,|z_1 - z_2|^\alpha \quad ; \quad c = c_1 . c_2^\alpha$$

مبرهنة 3 :

$f(z) \in MD^{r-1}H_0^1$ إذا وفقط إذا كان $\left|f_0^{(r)}(w)\right| \leq M$.

<u>الإثبات :</u>

لزوم الشرط : لنأخذ $f(z) \in MD^{r-1}H_0^1$ ولنبرهن أن $\left|f_0^{(r)}(w)\right| \leq M$

بما أن $f(z) \in MD^{r-1}H_0^1$ فإن :

$$\left|f_0^{(r-1)}(w+h) - f_0^{(r-1)}(w)\right| \leq M.h$$

بالتقسيم على h وأخذ نهاية الطرفين نجد :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left|f_0^{(r-1)}(w+h) - f_0^{(r-1)}(w)\right|}{h} \leq M \Rightarrow \left|f_0^{(r)}(w)\right| \leq M$$

كفاية الشرط : لنأخذ $\left|f_0^{(r)}(w)\right| \leq M$ ولنبرهن أن $f(z) \in MD^{r-1}H_0^1$

$$\left|f_0^{(r-1)}(w+h) - f_0^{(r-1)}(w)\right| = \left|\int_w^{w+h} f_0^{(r)}(t)dt\right|$$
$$\leq \int_w^{w+h}\left|f_0^{(r)}(t)\right| dt \leq \int_w^{w+h} M \quad dt = M.h$$

نوضح في المبرهنة الأتية تداخل فضاءات هولدر

مبرهنة مساعدة (1) [6] :

إذا كانت $0 < \alpha < \beta \leq 1$ فإن $H^\beta \subset H^\alpha$.

مبرهنة 4 :

من أجل أي عددين α, β ، حيث أن $0 < \alpha < \beta \leq 1$ يكون $D^r H_0^\beta \subset D^r H_0^\alpha$.

<u>الإثبات :</u>

لنفرض أن $f \in D^r H_0^\beta$ ولنبرهن أن $f \in D^r H_0^\alpha$

من الفرض $f \in D^r H_0^\beta$ ومن التعريف ينتج أن $f_0^{(r)} \in H^\beta$ وبالاعتماد على المبرهنة المساعدة (1)

ينتج أن $f_0^{(r)} \in H^\alpha$ الأمر الذي يعني أن $f \in D^r H_0^\alpha$

إذا تحقق أن $D^r H_0^\beta \subset D^r H_0^\alpha$

مبرهنة مساعدة (2) [2] :

ليكن Γ منحني مغلق يشكل محيطا للمنطقة G ينتمي إلى أسرة المنحنيات $K-$ وإذا كان التابع f ينتمي إلى صف

التوابع على المنحني Γ $(f(w) \in H_0^{\alpha}(\Gamma))$ فإنه يوجد ثابتان A, B وتابع كسري $R_n(w)$ بحيث يتحقق :

$$|f_0(w) - R_n(w)| \le (A\, ln^2 n + B)(\frac{1}{n})^{\alpha}$$

مبرهنة 5 :

إذا كان f تابع قابل للاشتقاق على المنحني Γ الذي يملك طولا منتهياً بحيث طوله $|\Gamma| > 1$ عندئذ إذا كانت :

$$\left|\acute{f}(w) - \acute{R}_n(w)\right| < \frac{K}{|\Gamma|} < K$$

فإنه يتحقق : $|f(w) - R_n(w)| < K$.

حيث أن $\acute{R}_n(w)$ هو مشتق $R_n(w)$.

الإثبات :

لدينا $K < \frac{K}{|\Gamma|} < \left|\acute{f}(w) - \acute{R}\,(w)\right|$ وبما أن $\acute{R}_n(w)$هي دالة كسرية فإن $\int \acute{R}_n(w)\, dw$ هو أيضاً دالة كسرية وسوف نرمز لها بالرمز $R_n(w)$

وعندئذ يكون :

$$|f(w) - R_n(w)| = \left|\int_a^w \acute{f}\,(t)dt - \int_a^w \acute{R}_n(w)dt\right|$$
$$= \left|\int_a^w (\acute{f}(t) - \acute{R}_n(w)\ dt\right| \le \int_a^w \left|\acute{f}(t) - \acute{R}_n(t)\right| . |dt|$$
$$< \int_a^w \frac{K}{|\Gamma|}\,|dt| = \frac{K}{|\Gamma|}\int_a^w |dt| = \frac{K}{|\Gamma|}\,|w-a| \le \frac{K}{|\Gamma|}\,|\Gamma| = K$$
$$\Rightarrow |f(w) - R_n(w)| < K$$

نتيجة (2) :

ليكن Γ منحني مغلق يشكل محيطا للمنطقة G ينتمي إلى أسرة المنحنيات $K-$ وإذا كان التابع $f(z)$ ينتمي إلى صف التوابع $D^r H_0^{\alpha}$ على المنحني Γ $((f(z) \in D^r H_0^{\alpha}(\Gamma)))$ فإنه يوجد ثابتان A, B بحيث يتحقق :

$$|f_0(w) - R_n(w)| \le (A\, ln^2 n + B)(\frac{1}{n})^{\alpha}$$

حيث أن $R_n(w)$ هي دالة كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئية لسلسلة فابير للتابع f

الأثبات :

لدينا $f(z) \in D^r H_0^{\alpha}(\Gamma)$ عندئذ $f_0^{(r)}(w) \in H_0^{\alpha}$ ومنه بحسب المبرهنة المساعدة (2) يكون :

$$\left|f_0^{(r)}(w) - R_n^{(r)}(w)\right| \le (A\, ln^2 n + B)(\frac{1}{n})^{\alpha}$$

وبتطبيق المبرهنة (6) نجد أن :

$$\left|f_0^{(r-1)}(w) - R_n^{(r-1)}(w)\right| \le (A\, ln^2 n + B)\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \quad \_\_\_\_\_\_\_\_(1)$$

ومن ثم بتطبيق المبرهنة (6) على المتراجحة (1) $(r-1)$ مرة نجد أن :

$$|f_0(w) - R_n(w)| \le (A\, ln^2 n + B)\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \quad \_\_\_\_\_\_\_(2)$$

حيث أن $R_n(w)$ هي تكامل الدالة الكسرية $\acute{R}_n(w)$ على المنحني Γ

نتيجة (3) :

إذا رمزنا بـ $R_n(w) = R_n\big(\varphi(z)\big) = R_n^*(z)$ في العلاقة (2) وبما أن :

$f_0(w) = f\big(\psi(w)\big) = f(z)$ فإن العلاقة (2) تصبح كما يلي :

$$|f(z) - R_n^*(z)| \leq (A\, ln^2 n + B)\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$$

وهذه النتيجة تعطينا تقريب التابع $f(z) \in D^r H_0^\alpha(\Gamma)$ إلى توابع كسرية تابعة لـ $\varphi(z)$.

الاستنتاجات والتوصيات :

توصلنا في هذا البحث إلى النتائج التالية :

1- قدمنا تعريف للصف الجديد $D^r H_0^\alpha$.

2- أثبتنا بعض خواص التوابع التي تنتمي إلى $D^r H_0^\alpha$.

3- توصلنا إلى تقريب صف التوابع $D^r H_0^\alpha$ إلى توابع كسرية على منحنيات مغلقة.

ونوصي بتعريف صفوف تابعية أخرى ودراسة خواص وتقريب توابع هذه الصفوف وعلاقتها بصف التوابع الجديد $D^r H_0^\alpha$ الذي دراسناه في هذه المقالة .

المراجع:

[1] -Mamedkhanov,J،I.1984 ,*Approximation in complex plane and Singular oppretors with Cauchy's Kernel* .PHD,Thesis,Tbilsi (in Russian).

[2] -Israfilov.D.M.2011, *Approximation in Morry –Smirnov classes.Azerbijan journal of mathematics*, VLO1, NO1,PP 99 -113.

[3] – Ali,Mohammad. 2013,*On properties and approximation of class of functionH$_0^\alpha$*.Tishreen University Journal for Research and Sciences Studies – Basic Sciences Series,Syria,Vol(40),No(1),PP 9-17.

[4] - Ali,Mohammad.2017,*Approximation theory* - Tishreen University Publication Faculty of Sciences-Syria,236.

[5] -Willin,Hans.1999, *Best approximation and saturation on domains bounded rotation*. Journal of approximation theory 100, PP157-182.

[6] -Raman, Mohapatra. *Degree of Approximation of local continuous function*. PHD, Thesis , fall Jerm 2008, Benjamina,London.