مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (3) العدد (4)2019
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series Vol. (3) No.(4)2019

دراسة تمثيل العددين ± 1 بالصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة $f(x,y) = ax^2 + 2bxy - 4ay^2$

أ. م. د. حسن عبدو سنكري*

(تاريخ الإيداع 10/13 /2019. قُبِل للنشر في 26 / 11 /2019)

□ ملخّص □

درسنا بهذا البحث تمثيل العددين ± 1 بالصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة $f(x,y)$ حيث أوجدنا شرطاً لازماً لتمثيل العدد -4 بالصيغة التربيعية $F(X,Y) = X^2 - \Delta Y^2$، وبيّنا أنه إذا كان العدد -4 لا يمثل بالصيغة $F(X,Y)$ فإن أياً من العددين ± 1 لا يمثل بالصيغة التربيعية $f(x,y)$، ثم قدمنا شرطاً لازماً وكافياً لكي يمثل أحد العددين ± 1 بالصيغة التربيعية $f(x,y)$. بالإضافة إلى ذلك برهنا أنه إذا كان Δ عدداً أولياً فإن أحد العددين ± 1 يمثل بالصيغة $f(x,y)$ إذا فقط إذا كان نظيم عنصر الواحدة الأساسي في الحلقة $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right]$ يساوي -1.

الكلمات المفتاحية: الصيغ التربيعية الثنائية الصحيحة، تمثيل الأعداد الأولية، الحقول التربيعية، حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة.

---

*استاذ مساعد في قسم الرياضيات من كلية العلوم جامعة تشرين _ اللاذقية _ سوريا .

On Representation of numbers ± 1 by the integral quadratic binary form $f(x,y) = ax^2 + 2bxy - 4ay^2$

A.P.M. Hasan Abdo Sankari*

(Received 13/10 /2019. Accepted 26/ 11 /2019)

□ ABSTRACT □

In this paper, we investigate the representation of numbers ± 1 by the integral quadratic binary form $f(x,y)$, where we find a condition for representation of the number -4 by quadratic form $F(X,Y)$, and we proved necessary that the number -4 is not represented by the quadratic form $F(X,Y)$ if and only if the numbers ± 1 are not represented by the quadratic form $f(x,y)$. Besides, we proved that if Δ is a prime number, then the numbers ± 1 representation by $f(x,y)$ if and only if the norm of essential unit element of the ring $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right]$ is equal to -1.

Keywords: Integral quadratic Binary forms, representation of primes, Quadratic fields, Ring of integrals.

*Assistant Professor – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University –Syria.

مقدمة

تعرف الصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة بأنها كثيرة حدود $f(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ متجانسة من الدرجة الثانية من الشكل $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$، وتعد من المواضيع المهمة في الرياضيات بشكل عام وفي نظرية الأعداد بشكل خاص، ولذلك انصب اهتمام الباحثين على دراستها منذ مئات السنين وحتى يومنا هذا، وخصصوا الكثير من الوقت للعمل في هذا المجال في معاهد الرياضيات ومراكز البحوث المتقدمة المنتشرة في جميع أنحاء العالم .

ظهرت الصيغ التربيعية بمتحولين قديماً كجزء من أسرة المعادلات الديوفانتية، وبشكل خاص من المعادلات الديوفانتية التربيعية، ودُرست المسائل المتعلقة بالصيغ التربيعية الثنائية الصحيحة قديماً من قبل الهنود واليونانيين، فقد أوجد الرياضي الهندي براهماغوابتا (Brahmagupta) طريقة لإيجاد الحلول الصحيحة للمعادلة $x^2-2y^2=1$، كما وضع الرياضي اليوناني ديوفانتس (Diophantus) حوالي 250 ميلادية مسألة يؤول حلها لحل المعادلة $x^2+y^2=n$ ، ولاحظ أنه يجب أن يكون $n \neq 4k+3$. ودرس بنفسه المعادلة في حال $n=13$. وقام الرياضي الفرنسي فيرما (Fermat) بدراستها من أجل n عدد أولي، وتوصل إلى مسألة العددين التربيعين الشهيرة التي تحدد الشروط التي تحققها الأعداد الصحيحة لكي تكتب كمجموع مربعي عددين صحيحين حيث برهن أنه إذا كان n عدداً أولياً فإنّ $n=x^2+y^2$ إذا وفقط إذا كان $n=2$ أو $n=4k+1$، وبرهنها العالم السويسري أولر (Euler) في عام 1747، كذلك برهن أنه إذا كان p عدداً أولياً فردياً فإن $p=x^2+2y^2$ إذا وفقط إذا كان $p\equiv 1,3(mod 8)$. وإنّ $p=x^2+3y^2$ إذا وفقط إذا كان $p=3$ أو $p\equiv 1(mod\ 3)$ ، وعمم العالم الألماني غاوس (Gauss) المسألة السابقة من أجل الأعداد الأولية التي تكتب بالشكل $p=x^2+ny^2$ وقام بحلها من أجل بعض القيم الخاصة لـ n وأوجد بعض النتائج الجزئية من أجل هذه القيم [1].

حديثاً في أواخر القرن الماضي درس الرياضيان وليام (Williams) وهاردي (Hardy) [2] تمثيل العدد 1 بالصيغة التربيعية $f(V,W)=aV^2-2bVW-aW^2$ وأعطيا معيارياً لكي يمثل العدد 1 بهذه الصيغة، وفي [3] درس العالم كابلانسكي (Kaplansky) تمثيل الأعداد الأولية في أن واحد بالصيغتين $F(X,Y)=X^2+127Y^2$ و $f(x,y)=x^2+xy+10y^2$، وكذلك في [4] درس تمثيل الأعداد الأولية بالصيغتين $F(X,Y)=X^2+32Y^2$ و $F(X,Y)=X^2+64Y^2$، وأيضاً في [5] درس الرياضيون سير (Siar) وكيكين (Keskin) وكاراتلي (Karaatli) تمثيل الأعداد -2^n بالصيغة التربيعية $f(x,y)=x^2-kxy+y^2$، وفي [6] درس الرياضي كابلان (Kaplan) تمثيل الأعداد الأولية بالصيغة $F(X,Y)=X^2+14Y^2$، ودرس نوردسيج (Noordsij) في [7] تمثيل أعداد فيبوناتشي بالصيغ التربيعية $F(X,Y)=X^2+nY^2$، وفي [8] قام زمان (Zaman) بتحديد حدٍ أعلى لعدد الأعداد الأولية التي تمثل بصيغة تربيعية موجبة معطاة، وكذلك في [9] استخدم الباحثان إيليا (Elia) وبينتوري (Pintore) المنحنيات الاهليليجية فوق الحقول المنتهية لتمثيل الأعداد الأولية بصيغ تربيعية ثنائية صحيحة، وفي [10] درس الرياضيان تيكان (Teckan) وأوزكوج (Ozkoc) تمثيل الأعداد الصحيحة الموجبة للصيغ التربيعية الثنائية الصحيحة فوق الحقول المنتهية، واستخدم سيغون (Seguin) زمرة تكافؤ الإيديالات للحقول التربيعية $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ في تمثيل الأعداد بصيغ تربيعية ثنائية صحيحة [11]. وفي هذا العمل سوف ندرس تمثيل العددين ± 1 بالصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة $f(x,y)=ax^2+2bxy-4ay^2$.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة تمثيل العددين ± 1 بالصيغة التربيعية الثنائية:

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy - 4ay^2 (I)$$

وتكمن أهميته في أنه يقدم شرطاً لازماً وكافياً لتمثيل أحد العددين ± 1 بالصيغة التربيعية (I)، بالإضافة إلى ذلك فإنه يقدم شرطاً لازماً لتمثيل العدد -4 بالصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة:

$$F(X,Y) = X^2 - \Delta Y^2 (II)$$

حيث Δ عدد صحيح موجب كيفي من التربيع بالإضافة إلى بعض النتائج المتعلقة في هذا المجال.

طرائق البحث ومواده:

شهدت الصيغ التربيعية تطوراً كبيراً أدى إلى ارتباطها بموضوع رئيسٍ آخر في نظرية الأعداد، وأدت النتائج المتعلقة بالصيغ التربيعية الثنائية الصحيحة إلى ربطها بالحقول الجبرية التربيعية، وإيجاد تقابل بين صفوف الصيغ التربيعية الثنائية وزمر تكافؤ الإيديالات، ومن خلال هذا التقابل تم استخدام مفاهيم ونتائج في الحقول التربيعية لدراسة مسائل الصيغ التربيعية التي اعتمدنا عليها في هذه الدراسة .

لتكن الصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة $f(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ حيث $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$، ولنرمز لها اختصاراً بالرمز $f = [a,b,c]$، عندئذٍ لدينا التعريفات والمبرهنات الآتية: ([12] و[13] و[14] و[15] و[16])

- نسمي العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ مميز الصيغة$f = [a,b,c]$
- نقول عن الصيغة $f = [a,b,c]$ إنها صيغة أولية إذا كان $\gcd(a,b,c) = 1$
- نقول إنّ العدد m يمثل بالصيغة $f = [a,b,c]$ إذا وجد عددان $x,y \in \mathbb{Z}$ بحيث إن:

$$m = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

وفي هذه الحالة نقول عن الزوج (x,y) أنه تمثيلٌ للعدد m بالصيغة $f = [a,b,c]$ ، كما نقول أيضاً إنّ الصيغة $f = [a,b,c]$ تُمثل العدد m كما نقول إن العدد m يُمثل بالصيغة $f = [a,b,c]$.

- إذا كان (x,y) تمثيلاً للعدد m بالصيغة التربيعية $f = [a,b,c]$ فيسمى تمثيلاً أولياً إذا كان x وy أوليان فيما بينهما، و يسمى تمثيلاً موجباً إذا كان $x > 0$ و$y > 0$. إضافة إلى مما سبق إذا كانت الصيغة $f = [a,b,c]$ تمثل العدد m فإنه بين التمثيلات الموجبة لـ m بالصيغة (f) يوجد تمثيل (x_1,y_1) يملك أصغر قيم لـ x وy (أي $x_1 \le x$ و$y_1 \le y$) من أجل أي تمثيل موجب (x,y) لـ m ويسمى التمثيل الأساسي للعدد m بالصيغة $f = [a,b,c]$.
- نقول عن الصيغة $f = [a,b,c]$ إنها صيغة موجبة إذا كان $\Delta < 0$ وفي هذه الحالة يكون $f(x,y) \ge 0$.
- نقول عن الصيغتين $f = [a,b,c]$ و$f' = [a',b',c']$ إنهما متكافئتان ونكتب $f \sim f'$ إذا وجدت الأعداد الصحيحة $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ حيث $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ وكان $f(x,y) = f'(X,Y)$

حيث

$y = \gamma X + \delta Y$ و $x = \alpha X + \beta Y$.

- تعرف العلاقة $\sim$ بأنها علاقة تكافؤ فوق مجموعة الصيغ التربيعية التي لها مميز Δ، وإن صف التكافؤ الذي يحوي الصيغة $f = [a, b, c]$ يُرمز له بـ (a, b, c)، علاوة على ذلك فإن صفوف تكافؤ الصيغ التي لها نفس المميز Δ تشكل زمرة تبديلية وتكون ايزومورفيزمية لزمرة تكافؤ الإيديالات للحقول الجبرية التربيعية $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ حيث أنه إذا كان Δ عدداً صحيحاً كيفياً من التربيع فإن الحقل التربيعي $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ يُعرف بأنه المجموعة:

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) = \{a + b\sqrt{\Delta}; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

وتعرف حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة $\mathcal{O}_k$ في الحقل K بأنها المجموعة :

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{\Delta}] = \{a + b\sqrt{\Delta}; a, b \in \mathbb{Z}\}$$

إذا كان $\Delta \not\equiv 1(mod\ 4)$، وتعطى المجموعة بالشكل:

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right] = \left\{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{\Delta}; a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b(mod\ 2)\right\}$$

إذا كان $\Delta \equiv 1(mod 4)$.

- إذا كان $\alpha = a + b\sqrt{\Delta} \in \mathcal{O}_k$، فإن العدد $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{\Delta}$ يُسمى مرافق العدد α، كما يُسمى المقدار $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a^2 - \Delta b^2$ نظيم العدد α، ومن أجل أي عددين $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ يكون:

- $N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1)N(\alpha_2)$.
- $N\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{N(\alpha_1)}{N(\alpha_2)}$.

- يُسمى العنصر $\alpha \in \mathcal{O}_K$ عنصر الواحدة في $\mathcal{O}_K$ إذا كان $N(\alpha) = \pm 1$، وبالتالي فإن عناصر الواحدة في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ هي ± 1 حيث:

$$\mathbb{Z}[2i] = a + b2i; a, b \in \mathbb{Z}$$

وحيث $\mathbb{Z}[2i]$ حلقة جزئية من الحلقة $\mathbb{Z}[i]$، علاوة على ما سبق لدينا المبرهنات والنتائج الاتية:

مبرهنة (1) [15]: إذا كان $\mathcal{O}_K$ ساحة صحيحة وكان $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ حيث $(\alpha, \beta) = 1$ و $\alpha\beta = \gamma^2$ فإنه يوجد δ, η بحيث $\alpha = \varepsilon\eta^2$ $\beta = \varepsilon'\delta^2$ $\gamma = \eta\delta$ حيث $\varepsilon, \varepsilon'$ عناصر واحدة في $\mathcal{O}_K$.

مبرهنة (2) زو(Thue) [17]: ليكن α, β عددين صحيحين بحيث $\beta > 0$ و $\gcd(\alpha, \beta) = 1$ ، وليكن m عدداً صحيحاً يحقق $m < \sqrt{\beta}$ ، عندئذٍ يوجد $x, y \in]0, m[$ بحيث أن:

$$\alpha y = \pm x(mod\ \beta).$$

مبرهنة (3) [15]: إذا كان p عدداً أولياً فردياً و $p \equiv 1(mod4)$ فإن p يكتب بشكل وحيد على الصورة $p = b^2 + 4a^2$ حيث $a, b \in \mathbb{Z}$.

النتائج و المناقشة

إن النتائج والحقائق التي ذكرناها، بالإضافة إلى بعض الأفكار الجديدة التي أضفناها إلى هذه النتائج سمحت لنا بدراسة تمثيل العددين ±1 بالصيغة الثنائية الصحيحة $f(x,y)=\mathrm{a}x^2+2bxy-4ay^2$ والحصول على نتائج جديدة ومهمة في هذا المجال نعرضها فيما يأتي:

تمهيدية (1): إذا كان Δ عدداً صحيحاً كيفياً من التربيع، وكان (u_0,v_0) تمثيلاً أولياً للعدد -4 بالصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة $F(X,Y)=X^2-\Delta Y^2$ ، فإنّ Δ عدد فردي و $\Delta\equiv 5(mod 8)$.

البرهان: لدينا فرضاً (u_0,v_0) تمثيل أولي للعدد -4 بالصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة $F(X,Y)=X^2-\Delta Y^2$ عندئذٍ $f(u_0,v_0)=-4$ وبالتالي:

$$u_0^2-\Delta v_0^2=-4(*)$$

نفرض جدلاً أنّ u_0^2 عدد زوجي وعليه فإن u_0 عددٌ زوجيٌ وبالتالي لدينا الحالتان الآتيتان :

i. إذا كان $u_0\equiv 0(mod\ 4)$ عندئذٍ $u_0^2\equiv 0(mod\ 16)$ ومنه نجد من العلاقة $(*)$ أنّ:

$$-4=u_0^2-\Delta v_0^2\equiv -\Delta v_0^2(mod\ 16)$$

وبالتالي $\Delta v_0^2\equiv 4(mod\ 16)$.

ولأن التمثيل أولي نجد أن v_0 عدد فردي، ولذلك يكون لدينا الحالتان الآتيتان:

a) إذا كان $v_0^2\equiv 1(mod\ 16)$ عندئذٍ من العلاقة $\Delta v_0^2\equiv 4(mod\ 16)$ نجد أنّ $\Delta\equiv 4(mod 16)$.

b) إذا كان $v_0^2\equiv 9(mod\ 16)$ عندئذٍ من العلاقة $\Delta v_0^2\equiv 4(mod\ 16)$ نجد أنّ $9\Delta\equiv 4(mod 16)$.

وهذا التطابق الخطي سنجد أن له حلاً وحيداً $\Delta\equiv 4(mod 16)$.

من الحالتين (a) و (b) نجد أنه إذا كان $u_0\equiv 0(mod\ 4)$ فإن $\Delta\equiv 4(mod\ 16)$ لذلك يكون $4|\Delta$، وهذا يناقض الفرض أن Δ كيفي من التربيع .

ii. إذا كان $u_0\equiv 2(mod\ 4)$ عندئذٍ $u_0^2\equiv 4(mod\ 16)$ ومنه نجد من العلاقة $(*)$ أنّ:

$$-4\equiv u_0^2-\Delta v_0^2\equiv 4-\Delta v_0^2(mod\ 16)$$

وبالتالي $\Delta v_0^2\equiv 8(mod\ 16)$.

لدينا v_0 عدد فردي، ولذلك يكون لدينا الحالتان الآتيتان:

a) إذا كان $v_0^2\equiv 1(mod\ 16)$ عندئذٍ من العلاقة $\Delta v_0^2\equiv 8(mod\ 16)$ نجد أنّ $\Delta\equiv 8(mod 16)$.

b) إذا كان $v_0^2\equiv 9(mod\ 16)$ عندئذٍ من العلاقة $\Delta v_0^2\equiv 8(mod\ 16)$ نجد أنّ $9\Delta\equiv 8(mod 16)$. وهذا التطابق الخطي سنجد له حلاً وحيداً $\Delta\equiv 8(mod 16)$.

من الحالتين (a) و (b) نجد أنه إذا كان u عدداً زوجياً و $u_0\equiv 2(mod\ 4)$ فإن $8|\Delta$، وهذا يناقض الفرض أن Δ كيفياً من التربيع .

تبين المناقشة السابقة أن الفرض الجدلي Δ عدد زوجي إذا كان (u_0,v_0) تمثيلا أولياً للعدد -4 بالصيغة التربيعية $F(X,Y)=X^2-\Delta Y^2$ غير ممكن لذلك فإن Δ عدد فردي .

علاوة على ذلك نجد من العلاقة $(*)$ ومن كون(u_0, v_0) تمثيلاً أولياً لـ -4 $u_0^2 - \Delta v_0^2 = -4$ و Δ عدداً فردياً فإنه لا يمكن أن يكون أي من العددين u_0 و v_0 زوجياً، لذلك يكون كل منهما عدداً فردياً وبالتالي فإن $u_0^2 \equiv v_0^2 \equiv 1(mod\ 8)$ ومنه نجد أن :

$$-4 = u_0^2 - \Delta v_0^2 \equiv 1 - \Delta(mod\ 8)$$

وعليه فإن $\Delta \equiv 5(mod\ 8)$.

تمهيدية (2): لتكن الصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة (I) حيث أن a, b عددان صحيحان وليكن $\Delta = b^2 + 4a^2$ مميزها، عندئذٍ إذا كان العدد -4 لا يمثل بالصيغة التربيعية $F(X,Y) = X^2 - \Delta Y^2$ فإن أي من العددين ± 1 لا يمثل بالصيغة (I) .

البرهان: لدينا فرضاً أن العدد -4 لا يمثل بالصيغة التربيعية $F(X,Y) = X^2 - \Delta Y^2$، ولنفرض جدلاً أن أحد العددين ± 1 يمثل بالصيغة (I) عندئذٍ يوجد (x_0, y_0) بحيث أن $f(x_0, y_0) = \pm 1$ وبالتالي فإن :

$$ax_0^2 + 2bx_0y_0 - 4ay_0^2 = \pm 1.$$

كما يكون كل من العددين $\gamma = b + 2ai$ و $\delta = (x_0 + 2y_0 i)^2$ عنصراً في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ حيث :

$$\mathbb{Z}[2i] = \{x + 2yi; x, y \in \mathbb{Z}\}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\gamma\delta &= (b + 2ai)(x_0 + 2y_0 i)^2 \\
&= (b + 2ai)(x_0^2 + 4x_0y_0 i - 4y_0^2) \\
&= (bx_0^2 - 8ax_0y_0 - 4by_0^2)(ax_0^2 + 2bx_0y_0 - 4ay_0^2)(2i).
\end{aligned}$$

ليكن $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ بحيث أن :

$$\varepsilon(ax_0^2 + 2bx_0y_0 - 4ay_0^2) = 1$$

ولنعرف العددين الآتيين :

$$u = \varepsilon(bx_0^2 - 8ax_0y_0 - 4by_0^2),$$
$$v = x_0^2 + 4y_0^2$$

عندئذٍ:

$$\begin{aligned}
u + 2i &= \varepsilon(bx_0^2 - 8ax_0y_0 - 4by_0^2) + \varepsilon(ax_0^2 + 2bx_0y_0 - 4ay_0^2)(2i) \\
&= \varepsilon\gamma\delta
\end{aligned}$$

ومنه بأخذ نظيم الطرفين نجد أن:

$$N(u + 2i) = N(\varepsilon\gamma\delta) = N(\varepsilon)N(\gamma)N(\delta)$$
$$u^2 + 4 = \varepsilon^2(b^2 + 4a^2)(x_0^2 + 4y_0^2)^2$$

ومنه:

$$u^2 + 4 = \Delta v^2$$

وبالتالي نجد أن $u^2 - \Delta v^2 = -4$ وأنّ (u, v) تمثيلاً للعدد -4 بالصيغة (II) وهذا تناقض مع الفرض.

إذاً الفرض الجدلي أن أحد العددين ± 1 يمثل بالصيغة (I) إذا كان -4 لا يمثل بالصيغة (II) غير ممكن، ولذلك فإن كل من العددين ± 1 لا يمثل بهذه الصيغة (I) إذا كان العدد -4 لا يمثل بالصيغة (II) .

ينتج من التمهيديتين (1) و(2) النتيجة الآتية :

نتيجة (1): إذا كان a و b عددين فرديين أولين فيما بينهما، وكان $\Delta = b^2 + 4a^2$ مميز الصيغة (I) عندئذٍ إذا كان أحد العددين ± 1 يمثل بالصيغة (I) فإن $\Delta \equiv 5(mod\ 8)$.

تمهيدية (3): إذا كان Δ عدداً صحيحاً موجباً كيفياً من التربيع وكان (u,v) تمثيلاً أولياً للعدد -4 بالصيغة التربيعية $F(X,Y)=X^2-\Delta Y^2$ فإنه يكون لدينا الآتي :

1. العددان u و v فرديان .
2. العددان $u+2i$ و $u-2i$ أوليان فيما بينهما في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$، أي أن $\gcd(u+2i,u-2i)=1$.

البرهان :

1. بما أن (u,v) تمثيل أولي للعدد -4 بالصيغة التربيعية $F(x,y)=X^2-\Delta Y^2$ لذلك يكون

$$u^2-\Delta v^2=-4(*)$$

حيث Δ عددٌ فردي وذلك بحسب التمهيدية (1)، وبما أن الطرف الأيمن من العلاقة السابقة $(*)$ يقبل القسمة على العدد 4، و u,v أوليان فيما بينهما لذلك من غير الممكن أن يكون العددان زوجيين. إذاً كل من u و v عدد فردي .

2. نفرض أن $\gcd(u+2i,u-2i)=\alpha$ عندئذٍ $\alpha|u+2i$ و $\alpha|(u+2i)-(u-2i)=4i$ ومنه نجد أن :

$$N(\alpha)|N(u+2i)=u^2+4$$

و

$$N(\alpha)|N(4i)=-16$$

ومنه نجد أن:

$$N(\alpha)|\gcd(-16,u^2+4).$$

ولكن u^2+4 عدد فردي لأن u عدد فردي حسب (1)، لذلك يكون $\gcd(-16,u^2+4)=1$ إذاً $N(\alpha)|1$ ومنه يكون $\alpha=1$ لأن عناصر الواحدة في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ هي ±1. إذاً $u+2i$ و $u-2i$ أوليان فيما بينهما في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$.

مبرهنة (4): إذا كان a و b عددين فرديين أوليين فيما بينهما بحيث أنّ $\Delta=b^2+4a^2$ مميز الصيغة (I) عدد كيفي من التربيع وأن (u,v) تمثيل أولي للعدد -4 بالصيغة (II)، عندئذٍ الشرط اللازم والكافي لكي يكون أحد العددين ±1 يمثل بالصيغة (I) هو أن يكون :

$$b+2ai=\begin{cases}\gcd(u+2i,\Delta)\,,\\ \gcd(u-2i,\Delta)\,.\end{cases}(**)$$

البرهان: نفرض أولاً أنَّ (u,v) تمثيل أولي للعدد -4 بالصيغة (II) وأن الشرط $(**)$ محقق عندئذٍ نجد أن $f(u,v)=-4$ وبالتالي :

$$u^2-\Delta v^2=-4(*)$$

كما نجد من $(**)$ في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ أن $b+2ai$ يقسم $u+2i$ أو يقسم $u-2i$، فإذا كان $b+2ai$ يقسم $u+2i$ فإن $b-2ai$ يقسم $u-2i$ ومنه نجد أنّ $\frac{u+2i}{b+2ai}$ و $\frac{u-2i}{b-2ai}$ عنصران في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ وأوليان فيما بينهما وذلك حسب (2) من التمهيدية (3) .

بالإضافة إلى ذلك من العلاقة $(*)$ نجد في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ أن :

$$\left(\frac{u+2i}{b+2ai}\right)\left(\frac{u-2i}{b-2ai}\right)=v^2$$

وحسب المبرهنة (1) فإنه يوجد $\alpha \in \mathbb{Z}[2i]$ حيث $\alpha = x+2yi$ و$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ بحيث أن:

$$\frac{u+2i}{b+2ai}=\varepsilon(x+2yi)^2$$

ومنه نجد أنّ:

$$\begin{aligned} u+2i &= \varepsilon(x+2yi)^2(b+2ai) \\ &= \varepsilon(x^2+4xyi-4y^2)(b+2ai) \\ &= \varepsilon(bx^2-8axy-4by^2)+(ax^2+2bxy-4ay^2)(2i). \end{aligned}$$

وبمطابقة المعاملات نجد أنه يوجد $x,y \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون :

$$ax^2+2bxy-4ay^2=\pm 1.$$

لبرهان العكس: نفرض أن (x_0,y_0) تمثيل أولي لإحدى العددين ± 1 بالصيغة التربيعية الثنائية (I)، عندئذٍ $f(x_0,y_0)=\pm 1$ ومنه حسب التمهيدية (2) نجد أنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث:

$$u=\varepsilon(bx_0^2-8ax_0y_0-4by_0^2);\varepsilon=\pm 1$$
$$v=x_0^2+4y_0^2$$

وبما أنه في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ العدد $u+2i$ يكتب بالشكل الآتي :

$$u+2i=\varepsilon(b+2ai)(x_0+2y_0i)^2(1)$$

وبحساب النظيم نجد أن:

$$N(u+2i)=N(\varepsilon)N(b+2ai)N(x_0+2y_0i)^2$$
$$u^2+4=\Delta v^2$$

ومنه يكون (u,v) تمثيلاً أولياً للعدد -4 بالصيغة التربيعية (II) حيث u و v عددان فرديان وΔ عددٌ فردي كيفي من التربيع .

لنكتب العدد $\Delta = b^2+4a^2$ في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ بالشكل :

$$\Delta=(b+2ai)(b-2ai)(2)$$

فنجد من (1) و(2) في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ أنّ :

$$\gcd(u+2i,\Delta)=(b+2ai)\cdot\gcd((x_0+2y_0i)^2,b-2ai).$$

علاوة على ذلك نجد في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ أن :

$$\gcd((x_0+2y_0i)^2,b-2ai)=1$$

وذلك لأنه إذا فرضنا أن :

$$\alpha=\gcd((x_0+2y_0i)^2,b-2ai)$$

نجد أنّ $\alpha | x_0+2y_0i$ في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ وبالتالي يكون $x_0+2y_0i\equiv 0(mod\ \alpha)$ ومنه :

$$x_0\equiv -2y_0i(mod\ \alpha).$$

وبالتعويض في عبارة u نجد أن :

$$\begin{aligned} u &\equiv \varepsilon(b(-2y_0i)^2-8a(-2y_0i)y_0-4by_0^2)(mod\ \alpha) \\ &\equiv -8\varepsilon y_0^2(b-2ai)(mod\ \alpha) \\ &\equiv 0(mod\ \alpha). \end{aligned}$$

من جهة ثانية من عبارة v نجد أن:

$$\begin{aligned} v &= x_0^2+4y_0^2=(x_0+2y_0)(x_0-2y_0i) \\ &\equiv 0(mod\ \alpha). \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $\alpha | \gcd(u,v)=1$ إذاً $\alpha=1$، وبالتالي $\gcd(u+2i,\Delta)=b+2ai$.

مبرهنة (5): إذا كان a,b عددان فرديان أوليان فيما بينهما و $\Delta= b^2+4a^2$ عدداً أولياً، عندئذٍ يكون أحد العددين ±1 يمثل بالصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة (I) إذا وفقط إذا كان $N(\varepsilon_\Delta)=-1$ حيث ε_Δ عنصر الواحدة الأساسية في الحلقة $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right]$.

البرهان: أولاً نفرض أن (x_0,y_0) تمثيلاً أولياً لأحد العددين ±1بالصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة (I) عندئذٍ :

$$ax_0^2+2bx_0y_0-4ay_0^2=\pm1.$$

ولنعرف العددين:

$$X_1=\pm(-bx_0^2+8ax_0y_0+4by_0^2),$$
$$Y_1=x_0^2+4y_0^2$$

فنجد أن كل من X_1,Y_1 عددين فرديين وذلك لأن كل من x_0 و b عدداً فردياً وبالتالي $\varepsilon=\frac{X_1+Y_1\sqrt{\Delta}}{2}$ عنصراً في الحلقة $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right]$ لأن $\Delta\equiv5(mod\ 8)$كما نجد من المطابقة:

$$(-bx_0^2+8ax_0y_0+4by_0^2)^2+4(ax_0^2+2bx_0y_0-4ay_0^2)^2$$
$$=(b^2+4a^2)(x_0^2+4y_0^2)^2$$

أنّ $X_1{}^2-\Delta Y_1{}^2=-4$ وبالتالي فإن $\frac{X_1^2-\Delta Y_1^2}{4}=-1$ ومنه نجد أن العدد $\varepsilon=\frac{X_1+Y_1\sqrt{\Delta}}{2}$عنصر الواحدة في الحلقة $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right]$ وذلك لأنّ :

$$N(\varepsilon)=N\left(\frac{X_1+Y_1\sqrt{\Delta}}{2}\right)=\left(\frac{X_1+Y_1\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(\frac{X_1-Y_1\sqrt{\Delta}}{2}\right)=\frac{X_1^2-\Delta Y_1^2}{4}=-1$$

وبالتالي فإن $N(\varepsilon_\Delta)=-1$ حيث $N(\varepsilon)=\left(N(å_\Delta)\right)^n$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

لبرهان العكس: نفرض أنّ $N(\varepsilon_\Delta)=-1$حيث $\varepsilon=\frac{X_0+Y_0\sqrt{\Delta}}{2}$ عندئذٍ نجد أن :

$$X_\Delta^2-\Delta Y_\Delta^2=-4(*)$$

وبالتالي فإن $\gcd(X_\Delta,\Delta)=1$ لأن Δ عدد فردي والطرف الأيمن يقبل القسمة على العدد 4 ومنه حسب المبرهنة (2) فإنه يوجد عددان صحيحان موجبان a_1 و b_1 حيث $a_1<\sqrt{\Delta}$ و $b_1<\sqrt{\Delta}$ و $a_1X_\Delta\equiv\pm b_1(mod\ \Delta)$ وبالتالي $a_1^2X_\Delta^2\equiv b_1^2(mod\ \Delta)$ من المعادلة $(*)$ نجد أنّ :

$$b_1^2+4a_1^2\equiv a_1^2X_\Delta^2+4a_1^2(mod\ \Delta)$$
$$\equiv-4a_1^2+4a_1^2(mod\ \Delta)$$
$$\equiv0(mod\ \Delta).$$

إذاً:

$$b_1^2+4a_1^2\equiv0(mod\ \Delta)(**)$$

ومنه $\Delta|b_1^2+4a_1^2$ ، ولكن $0<b_1^2+4a_1^2<5\Delta$ وبالتالي $b_1^2+4a_1^2\in\{\Delta,2\Delta,3\Delta,4\Delta\}$.

إنّ $b_1^2+4a_1^2\neq2\Delta,4\Delta$ وذلك لأنّ b_1 و Δ عددان فرديان و $a_1^2X_\Delta^2\equiv b_1^2(mod\ \Delta)$ و $a_1<\sqrt{\Delta}$.

كذلك $b_1^2+4a_1^2\neq3\Delta$ لأنه إذا كان $b_1^2+4a_1^2=3\Delta$ نجد أن :

$$1\equiv b_1^2+4a_1^2=3\Delta\equiv3(mod\ 4)$$

ومنه $1\equiv3(mod\ 4)$ وهذا غير ممكن .

إذاً $b_1^2+4a_1^2=\Delta$ ومنه حسب المبرهنة (3) نجد أن $b_1^2+4a_1^2=b^2+4a^2$ وبالتالي $a=a_1$ و $b=b_1$ ومنه يكون $aX_\Delta\pm b\equiv0(mod\ \Delta)$.

في حال $aX_\Delta + b \equiv 0(mod\ \Delta)$ وبالتالي $b \equiv -aX_\Delta(mod\ \Delta)$ وحسب $(*)$ $X_\Delta^2 \equiv -4(mod\ \Delta)$ وبالتالي فإن $bX_\Delta = -aX_\Delta^2(mod\ \Delta)$ وعليه فإن $bX_\Delta \equiv 4a(mod\ \Delta)$، إذاً $\Delta|aX_\Delta + b$ و $\Delta|bX_\Delta - 4a$ بالإضافة إلى ذلك نجد في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ أن :

$$\Delta = (b + 2ai)(b - 2ai)$$

وبالتالي يكون:

$$\frac{X_\Delta - 2i}{b + 2ai} = \left(\frac{bX_\Delta - 4a}{\Delta}\right) - 2\left(\frac{b + aX_\Delta}{\Delta}\right)i$$

عنصراً في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ ومنه نجد أن $b + 2ai|X_\Delta - 2i$.

كذلك سنبين أن $b + 2ai = \gcd(X_\Delta - 2i, \Delta)$، نفرض أن $\alpha = \gcd(X_\Delta - 2i, \Delta)$ عندئذٍ $\alpha|\Delta$ و $\alpha|X_\Delta - 2i$ ومنه نجد أن $X_\Delta \equiv 2i(mod\ \alpha)$ و $b + aX_\Delta \equiv 0(mod\ \alpha)$ لأن $b + aX_\Delta \equiv 0(mod\ \Delta)$ وحسب خواص التطابق يكون $2ai + b \equiv 0(mod\ \alpha)$ لذلك يكون $\alpha|b + 2ai$، وبالتالي مما سبق:

$$\gcd(X_\Delta - 2i, \Delta) = 2ai + b$$

ومنه حسب المبرهنة (4) فإن أحد العددين ± 1 يمثل بالصيغة (I) .

وفي حال $aX_\Delta - b \equiv 0(mod\ \Delta)$ وبالتالي $b \equiv aX_\Delta(mod\ \Delta)$ وحسب $(*)$ $X_\Delta^2 \equiv -4(mod\ \Delta)$ وبالتالي فإن $bX_\Delta = aX_\Delta^2(mod\ \Delta)$ وعليه فإن $bX_\Delta \equiv -4a(mod\ \Delta)$ ، إذاً $\Delta|aX_\Delta - b$ و $\Delta|bX_\Delta + 4a$ بالإضافة إلى ذلك نجد في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ أن:

$$\Delta = (b + 2ai)(b - 2ai)$$

وبالتالي يكون :

$$\frac{X_\Delta + 2i}{b + 2ai} = \left(\frac{bX_\Delta + 4a}{\Delta}\right) - 2\left(\frac{aX_\Delta - b}{\Delta}\right)i$$

عنصراً في الحلقة $\mathbb{Z}[2i]$ ومنه نجد أن $b + 2ai|X_\Delta + 2i$.

كذلك سنبين أن $b + 2ai = \gcd(X_\Delta + 2i, \Delta)$، نفرض أن $\alpha = \gcd(X_\Delta + 2i, \Delta)$ عندئذٍ $\alpha|\Delta$ و $\alpha|X_\Delta + 2i$ ومنه نجد أن $X_\Delta \equiv -2i(mod\ \alpha)$ و $aX_\Delta - b \equiv 0(mod\ \alpha)$ لأن $aX_\Delta - b \equiv 0(mod\ \Delta)$ وحسب خواص التطابق يكون $2ai + b \equiv 0(mod\ \alpha)$ وعندئذٍ $\alpha|b + 2ai$، وبالتالي مما سبق :

$$\gcd(X_\Delta + 2i, \Delta) = 2ai + b$$

ومنه حسب المبرهنة (4) فإن أحد العددين ± 1 يمثل بالصيغة (I) وبذلك يتم المطلوب .

مثال (1): إذا كان $a = 3$ و $b = 5$ نجد أن $\Delta = 5^2 + 4 \cdot 3^2 = 61 \equiv 5(mod\ 8)$ عدد أولي وبالتالي:

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{61}\right] = \left\{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{61}; a, b \in \mathbb{Z}; a \equiv b(mod 2)\right\}$$

حيث $\varepsilon_\Delta = \frac{39}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{61}$، ومنه :

$$N(\varepsilon_\Delta) = \frac{39^2}{4} - \frac{61 \cdot 5^2}{4} = -1$$

لذلك حسب المبرهنة (5) فإن أحد العددين ± 1 يمثل بالصيغة $f(x, y) = 3x^2 + 10xy - 12y^2$.

نلاحظ أن $f(1,1) = 1$ ، ومنه العدد 1 يُمثل بالصيغة $f(x, y)$ والزوج $(1,1)$ تمثيل للعدد 1 .

مثال (2): إذا كان $a = 11$ و $b = 5$ نجد أن $\Delta = 5^2 + 4 \cdot 11^2 = 509 \equiv 5(mod\ 8)$ عدد أولي وبالتالي :

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\sqrt{509}\right] = \left\{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{509}; a, b \in \mathbb{Z}; a \equiv b(mod2)\right\}$$

حيث $\varepsilon_\Delta = \frac{925}{2} + \frac{41}{2}\sqrt{509}$، ومنه :

$$N(\varepsilon_\Delta) = \frac{925^2}{4} - \frac{509 \cdot 41^2}{4} = -1$$

لذلك حسب المبرهنة (5) فإن أحد العددين ±1 يمثل بالصيغة $f(x, y) = 11x^2 + 10xy - 44y^2$. نلاحظ أن $f(-5,2) = -1$، ومنه العدد -1 يُمثل بالصيغة $f(x, y)$ والزوج $(-5,2)$ تمثيل للعدد -1 .

الاستنتاجات والتوصيات :

توصلنا في هذا العمل إلى إيجاد شرط لازم لتمثيل العدد -4 بالصيغة التربيعية $F(X, Y)$، وأنه إذا كان العدد -4 لا يمثل بالصيغة $F(X, Y)$ فإن أي من العددين ±1 لا يمثل بالصيغة التربيعية $f(x, y)$، وحددنا الشرط اللازم والكافي لتمثيل العددين ±1 بالصيغة التربيعية $f(x, y)$. ونوصي بالاستفادة من هذا العمل في دراسة تمثيل الأعداد بصيغ تربيعية ثنائية صحيحة أخرى .

المراجع :

[1] MUSKAT, J., 1984, *On simultaneous representation of primes by binary quadratic forms*. Journal of number theory, Vol. 19, pp. 263-282.

[2] HARDY, K.; WILLIAMS, K., 1986, *On the solvability of the Diophantine equation* . $dV^2 - 2eVW - dW^2 = 1$. Pacific journal of mathematics, Vol. 124, pp. 145-158

[3] HASENFRATZ, S.; PINK, R., 2008, *Representation of primes by binary quadratic forms*. Bachelor thesis in Mathematics, pp. 31.

[4] KAPLANSKY, I., 2003, *The forms $x^2 + 32y^2$ and $x^2 + 64y^2$*. Americam mathematical society. Vol. 131, No. 7, pp. 2299-2300.

[5] KESKIN, R.; KARAATLI, O.; SIAR, Z., 2012, *On the diophantine equation $x^2 - kxy + y^2 + 2^n$*. Miskolc Math., Vol. 13, pp. 375-388.

[6] KAPLAN, P.; WILLIAM, K., 2004, *On the number of representations of a positive integer by a binary quadratic form*. Acta arithmetic, Vol. 114, No. 1, pp. 87-98.

[7] NOORDSIJ, J., 2015, *Primes of the form $x^2 + ny^2$*. Mathematical institule – Ieiden University, 2015, pp. 44.

[8] ZAMAN, J., 2015, *Primes represented by positive definite binary quadratic forms*, Number theory. arXiv 1710.08914, pp. 1-28 .

[9] ELIA, M.; PINTORE, F., 2018, *On the Representation of Primes by Binary Quadratic Forms, and Elliptic Curves.* JP journal of Algebra, Number Theory and Applications, Vol. 40, No. 2, pp. 165-179.

[10] TEKCAN, A.; OZKOC, A., 2011, n-*universal quadratic forms ،quadratic ideals and elliptic curves over finite fields*. Math. Reports, VOL. 13, No. 2, pp. 205–216.

[11] SEGUIN, F., 2019, *Composition of binary quadratic forms,* Springer-Resonance. VOL. 24, No. 6, pp. 633-651.

[12] BUCHMANN, J.; VOLLMERS, U., 2007, *Binary quadratic forms and algorithmic approach.* Springer, pp. 318 .

[13] ERNST, K., 2012, *Quadratic form and elliptic curves.* Queen university, pp. 102 .

[14] KOCK, F., 2013, *Quadratic irrational, An introduction to classical number theory.* Taylor and France group, pp. 431.

[15] ROSEN, M.; IRELAND, K., 2013, *A classical introduction to modern number theory.* Springer science & Business media, pp. 344.

[16] SAMUEL, P., 1971, *Theorie algebrique des nombres.* Hermann – Paris, pp. 130 .

[17] MORDELL, L., 1969, *Diophantine equations,* Academic press – London and NewYork, pp. 311 .