مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (3) العدد (4)2019
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series Vol. (3) No.(4) 2019

تحويل بيسل– فورييه ثنائي الأبعاد واستخدامه في حساب اللامتناهات في الصغر

د. وديع علي*
د. نبيل علي **
ديما يونس ***

(تاريخ الإيداع 10/17 /2019. قُبِل للنشر في 22 / 12 /2019)

□ ملخّص□

من المعلوم أن النظرية التكاملية لبيسل–فورييه غير محققة في حساب التفاضل والتكامل تحت أي شرط من الشروط، وباستخدام تكامل فورييه العكسي ثنائي الأبعاد، لذلك قمنا بتطبيق تابع متناظر قطبيا f(p) ، والذي يحولنا من الصيغة القطبية إلى الصيغة الديكارتية، اعتمادا على شكل تابع أسي للزاويةazimuth وذلك من خلال تطبيق بيسل، سنجد أن النظرية التكاملية لبيسل– فورييه محققة فقط في حساب اللامتناهات في الصغر وذلك من أجل بعض النقاط الشاذة التي تجعل التكامل لا يساوي الصفر.

الكلمات المفتاحية : التمثيل التكاملي، تحويل فورييه، تحويل فورييه العكسي، تحويل بيسل فورييه، اللامتناهيات في الصغر، دوال بيسل.

* استاذ بقسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
**استاذ مساعد بقسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.
***طالبة دراسات عليا (ماجستير)– بقسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (3) العدد (4)2019
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series Vol. (3) No.(4) 2019

The 2-d dimensions fourier-Bessel and using at infinitesimal calculus

Dr. WADIAA ALI*
Dr. NABIL ALI**
Dima Younes***

(Received 17/10 /2019. Accepted 22/ 12 /2019)

□ ABSTRACT □

It is clear the -dimensional Fourier-Bessel Integral Theorem does not hold in the Calculus of Limits under any conditions by using the2-d dimensional invers Fourier integral،we applicator the polar Symmetric Function, $f(p)$ which transformer from the polar form to the Cartesian form as exponential function Of the angle azimuth, that is through application the Bessel functions ,and as the 2d-dimensional Fourier-Bessel Integral does not hold in the Calculus of Limits, we will see, the 2 -dimensional Fourier-Bessel Integral Theorem hold at infinitesimal calculus for some the singular points and which at it the integral does not equal the zero.

key words: the integral representation, Fourier transform the inverse Fourier transform the Bessel-Fourier transform, the infinitesimal, Bessel functions.

* Department of Mathematics, Professor Faculty of Science, University of Tishreen .
**Department of Mathematics, Assistant Professor Faculty of Science, University of Tartous .
***Postgraduate student(MA) Faculty of Science, University of Tartous .

1. مقدمة

يظهر تحويل بيسل–فورييه في دراسة انتشار الحرارة وفي دراسة معادلة الموجة وغيرها من المسائل في الرياضيات التطبيقية، وهذا التحويل وتطبيقاته له مكانة مهمة في فروع التحليل الرياضي. إن النظرية التكاملية لبيسل–فورييه [1−4]تضمن أن تحويل بيسل–فورييه ثنائي الأبعاد وتحويله العكسي عمليتان معرفتان جيدا، لذلك فإن التابع العكسي يساعد التابع الأصلي أن يضمن التحويل، ذلك يكون

$$f(p) = 2\pi \int_0^\infty (2\pi \int_0^\infty f(\sigma) J_0(2\pi pt)\sigma d\sigma)\, J_0(2\pi pt) t dt \quad (1)$$

وبما أن تكامل بيسل–فورييه ثنائي الأبعاد والنظرية التكاملية لبيسل– فورييه لا تتحقق في حساب التفاضل والتكامل

عندما $\sigma = p$ نقطة غير شاذة ،عندئذ التكامل السابق. يسعى للصفر والنظرية التكاملية تصبح غير محققة[2]. إن النظرية التكاملية لدوال بيسل–فورييه ثنائي الأبعاد تتحقق فقط في حساب اللامتناهيات في الصغر أي من أجل أي. تابع فوق حقيقي[7−6−5] .

$$f(p) = 2\pi \int_0^\infty (2\pi \int_0^\infty f(\sigma) J_0(2\pi \sigma t)\sigma d\sigma)\, J_0(2\pi pt) t dt \quad (2)$$

2. أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى إيجاد تحويل بيسل– فورييه باستخدام تابع دلتا المتناظر قطبياً، واستخدام دوال بيسل وتحويل فورييه ثنائي الأبعاد، ودراسة خصائصه وتعريف النظرية التكاملية لدوال بيسل– فورييه، ونجاحها في حساب اللامتناهيات في الصغر وفشلها في حساب التفاضل والتكامل.

3. طرائق البحث ومواده:

تعتمد هذه الدراسة على بعض المفاهيم والتعريفات المعتمدة في مجال التحليل الرياضي وقداستخدمنا أيضاً في دراستنا هذه تحويل فورييه ثنائي الأبعاد وتحويله العكسي ودوال بيسل وعرفنا تابع دلتا المتناظر قطبيا وعلاقته بتحويل بيسل– فورييه، والبحث ذو صلة وثيقة في الرياضيات التطبيقية والمسائل الفيزيائية.

4. مفاهيم أساسية:

1.4 تحويل فورييه:

لإيجاد تحويل فورييه اعتمدنا على الخواص الآتية:

$$1)\quad F\{\Delta(x)\} = 1$$

هو تحويل فورييه العكسي للتابع $\Delta(x)$ حيث أن

$$)\qquad \Delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx}\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ix}\,dx, v = 2\pi u$$

$$3)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx}\,dv\,\Big|_{x=0} = \frac{1}{dx}$$

$$4)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx}\,dv\,\Big|_{x\neq 0} = 0$$

استخدمنا هذه الخواص عند دراستنا تحويل فورييه ثنائي الأبعاد وتحويله العكسي ودوال بيسل [9].

نتيجة:1

إن تكامل فورييه غير محقق في حساب التفاضل والتكامل تحت أي شرط من الشروط.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon)\,e^{-iux}d\varepsilon)\,e^{-iux}dx \quad (3)$$

نتيجة:2

إن تكامل فورييه في حساب اللامتناهيات في الصغر يحقق:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\quad e^{iax}dx \qquad \text{يتقارب إلى}\quad F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(a)\quad e^{-iax}da \qquad \text{يتقارب إلى}\, f(x)$$

2.4. تحويل فورييه ثنائي البعد:

$$F\{f(x,y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,e^{-iw_x x - iw_y y}d\varepsilon)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,e^{-2\pi i(t_x\,x + t_y\,y)}\,dxdy$$

$$, w_x = 2\,\pi t_x, w_y = \ 2\,\pi\,t_y$$

3.4. تحويل فورييه العكسي ثنائي البعد:

$$F^{-1}\{F(w_x, w_y)\} = \frac{1}{(2\,\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w_x, w_y)\,e^{i(w_x x + w_y y}d\varepsilon)\,dw_x dw_y$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(2\pi t_x, 2\pi t_y)\,e^{2\pi i(t_x\,x + t_y\,y)}\,dt_x dt_y dt_y$$

$$, w_x = 2\,\pi t_x, w_y = \ 2\,\pi\,t_y$$

وبالمكاملة:

$$\int_0^{2\pi} e^{2\pi itp\cos\alpha}d\alpha = \left(1+\frac{2\pi itp\cos\alpha}{1}+\frac{2\pi itp\cos\alpha^2}{2!}+\frac{2\pi itp\cos\alpha^3}{3!}+\cdots\right)d\alpha$$

التكاملات ذات القوى الفردية تسعى إلى الصفر ويكون لدينا

$$\int_0^{2\pi} e^{2\pi itp\cos\alpha}d\alpha = 2\pi-\frac{(2\pi tp)^2}{2^2}.2\pi+\frac{(2\pi tp)^4}{2^2 4^2}.2\pi-\frac{(2\pi tp)^6}{2^2 4^2 6^2}.2\pi+\cdots$$
$$= 2\pi J_0(2\pi tp)$$

وبشكل مشابه

$$\int_0^{2\pi} e^{2\pi it\sigma\cos\beta}d\beta = \left(1+\frac{2\pi it\sigma\cos\beta}{1}+\frac{(2\pi it\sigma\cos\beta)^2}{2!}+\frac{(2\pi it\sigma\cos\beta)^3}{3!}+\cdots\right)d\beta$$
$$= 2\pi-\frac{(2\pi t\sigma)^2}{2^2}.2\pi+\frac{(2\pi t\sigma)^4}{2^2 4^2}.2\pi-\frac{(2\pi t\sigma)^6}{2^2 4^2 6^2}.2\pi+\cdots = 2\pi J_0(2\pi tp)$$
$$\Delta(x-\varepsilon)\,\Delta(y-\eta) = (2\pi)^2\int_0^\infty J_0(2\pi tp)J_0(2\pi tp)t\,dt$$

إن تحويل بيسل –فورييه للتابع $\frac{\Delta(p-\sigma)}{\sigma}$

يحقق هذا التحويل الخاصتين:

$$1)F_{Bessel}\left\{\frac{\Delta(p-\sigma)}{\sigma}\right\} = 2\pi\sum_0^\infty \Delta(p-\sigma)\,J_0\,(\mathrm{v}\sigma)d\sigma$$
$$2)F_{Bessel}\left\{\frac{\Delta(p-\sigma)}{\sigma}\right\} = 2\pi J_0\,(\mathrm{v}\sigma)$$

لبرهان ذلك لدينا:

$$F_{Bessel}\left\{\frac{\Delta(p-\sigma)}{\sigma}\right\} = 2\pi\int_0^\infty \Delta(p-\sigma)\,J_0\,(\mathrm{v}\sigma)d\sigma$$
$$= 2\pi J_0\,(\mathrm{v}\sigma)\,\Big|_{\sigma=p} = 2\pi J_0\,(\mathrm{vp})$$

تكامل بيسل–فورييه للتابع $\frac{\Delta(p-\sigma)}{\sigma}$

بما أن تابع دلتا القطبي هو التحويل العكسي لـ:

$$\hat{\mathrm{F}}_{Bessel}(v) = 2\pi J_0\,(\mathrm{vp})$$

بالتالي تكامل بيسل–فورييه للتابع $\frac{\Delta(p-\sigma)}{\sigma}$ يعطى بالشكل:

$$\frac{\Delta(p-\sigma)}{\sigma} = 2\pi\int_0^\infty J_0\,(\mathrm{vp})J_0\,(\mathrm{vp})v\,dv$$

تحويل بيسل–فورييه ثنائي الأبعاد لتابع متناظر قطبيا.

مبرهنة-1-

تحويل بيسل– فورييه ثنائي الأبعاد للتابع المتناظر قطبيا$f(p)$

وبمساعدة تابع بيسل بالنسبة إلى زاوية $azimuth$ [10]

يعطى بالعلاقة:

$$F_{Bessel}\{f(p)\} = 2\pi \int_0^\infty f(p).J_0(pv).pdp$$
$$= 2\pi \int_0^\infty f(p).J_0(2\pi pu).pdp\ , v = 2\pi u$$

البرهان:

تحويل بيسل فورييه ثنائي الأبعاد للتابع المتناظر قطبيا يعطى بالعلاقة:$f(x,y) = f(p)$

$$F_{Bessel}\{f(p)\} = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\infty f(p)e^{-it_x.x-it_y.y}dt_x dt_y$$

وباستبدال:

$$x = pcos\theta \qquad t_x = tcos\emptyset$$
$$y = psin\theta \qquad t_y = tsin\emptyset$$

$$= \int_0^\infty f(p)(\int_0^{2\pi} e^{-ivp(cos\theta cos\emptyset+sin\theta sin\emptyset}d\theta)pdp$$
$$= \int_0^\infty f(p)(\int_0^{2\pi} e^{-ivp\cos(\theta-\emptyset)}d\theta)pdp$$

يصبح التكامل بالشكلبوضع$\alpha = \theta - \emptyset$

$$= \int_0^\infty f(p)(\int_{-\emptyset}^{2\pi-\emptyset} e^{-ivp\cos\alpha}d\alpha)pdp$$

2π دوري بدور $e^{-ivp\cos\alpha}$تابع وبما أن:

$$= \int_0^\infty f(p)(\int_0^{2\pi} e^{-ivp\cos\alpha}d\alpha)pdp$$

وبالمكاملة

$$\int_0^{2\pi} e^{-ivp\cos\alpha}d\alpha = \int_0^{2\pi}(1 - \frac{ivp\ cos\ \alpha}{1} + \frac{(ivp\ cos\ \alpha)^2}{2!} - \frac{(ivp\ cos\ \alpha)^3}{3!} + \cdots)d\alpha$$
$$= 2\pi - \frac{(vp)^2}{2^2}.2\pi + \frac{(vp)^4}{2^2 4^2}.2\pi - \frac{(vp)^6}{2^2 4^2 6^2}.2\pi + \cdots = 2\pi J_0(pv)$$

لذلك

$$F_{Bessel}\{f(p)\} = 2\pi \int_0^\infty f(p).J_0(pv).pdp$$
$$= 2\pi \int_0^\infty f(p).J_0(2\pi pu).pdp\ , v = 2\pi u$$

نتيجة3:

تحويل بيسل –فورييه العكسي ثنائي الأبعاد يعطى بالعلاقة:

$$f^{-1}{}_{Bessel}\{f(v)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v).J_0(pv).vdv,\ \ v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y}$$

$$2\pi \int_0^\infty f(2\pi t).J_0(2\pi pt).tdt \,, v = 2\pi t$$

البرهان:

تحويل بيسل –فورييه العكسي ثنائي الأبعاد للتابع المتناظر

قطبيا. $f(v_x, v_y) = f(v)$ [11,10]

$$f^{-1}{}_{Bessel}\{f(v)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty f(v) e^{-iv_x.x - iv_y.y} dv_x dv_y$$

وباستبدال:

$$x = p\,cos\theta \qquad v_x = v\,cos\emptyset$$
$$y = p\,sin\theta \qquad v_y = v\,sin\emptyset$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ivp(cos\theta\,cos\emptyset + sin\theta\,sin\emptyset} d\emptyset) vdv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ivp(\cos(\emptyset-\theta)} d\emptyset) vdv$$

بوضع $\alpha = \emptyset - \theta$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ivp\cos\alpha} d\alpha) vdv$$

وبالمكاملة:

$$\int_0^{2\pi} e^{ivp\cos\alpha} d\alpha = \int_0^{2\pi} (1 + \frac{ivp\,cos\,\alpha}{1} + \frac{(ivp\,cos\,\alpha)^2}{2!} - \frac{(ivp\,cos\,\alpha)^3}{3!} + \cdots) d\alpha$$

$$= 2\pi - \frac{(vp)^2}{2^2}.2\pi + \frac{(vp)^4}{2^2 4^2}.2\pi - \frac{(vp)^6}{2^2 4^2 6^2}.2\pi + \cdots = 2\pi J_0(pv)$$

لذلك

$$f^{-1}{}_{Bessel}\{f(v)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v).J_0(pv).vdv$$

$$= 2\pi \int_0^\infty f(2\pi t).J_0(2\pi pt).tdt \,, v = 2\pi t$$

4.4. النظرية التكاملية لبيسل– فورييه:

النظرية التكاملية لبيسل– فورييه تضمن أن تحويل بيسل–فورييه ثنائي الأبعاد وتحويله العكسي عمليتان معرفتان جيدا، لذلك التابع العكسي يساعد التابع الأصلي أن يضمن التحويل أي أن :

$$f(p) = 2\pi \int_0^\infty (2\pi \int_0^\infty f(\sigma) J_0(2\pi pt)\sigma d\sigma)\, J_0(2\pi pt) tdt$$

لكن في حساب التفاضل والتكامل ،هذا التكامل شاذ ،والنظرية التكاملية لبيسل –فورييه غير محققة في حساب التفاضل والتكامل تحت أي شرط من الشروط [8].

نتيجة4:

النظرية التكاملية لبيسل– فورييه تفشل في حساب التفاضل والتكامل.

البرهان:

$$f(p) = 2\pi \int_0^{\infty} (2\pi \int_0^{\infty} f(\sigma) J_0(2\pi pt)\sigma d\sigma)\, J_0(2\pi pt)tdt$$

$$f(p) = \int_0^{\infty} f(\sigma)((2\pi)^2 \int_0^{\infty} J_0(2\pi pt)\, J_0(2\pi pt)tdt)\sigma d\sigma$$

يمكن أن نبين ذلك في النقطة $\sigma = p$ أن التكامل:

$$(2\pi)^2 \int_0^{\infty} J_0(2\pi pt) J_0(2\pi pt)tdt = \int_0^{\infty} J_0(v\sigma)^2 v dv$$

غير منتهٍ.

البرهان:

تحقق المعادلة التفاضلية لبيسل $\mathrm{u(v)} = J_0(v\sigma)$

$$(vu^{\backslash})^{\backslash} + \sigma^2 vu = 0 \ (*)$$

وبضرب المعادلة(*)ب$2vu^{\backslash}$

$$2vu^{\backslash}(vu^{\backslash})^{\backslash} + 2\sigma^2 v^2 uu^{\backslash} = 0$$

$$\frac{d}{dv}(vu^{\backslash})^2 + 2\sigma^2 v^2 uu^{\backslash} = 0$$

$$\frac{d}{dv}\{v^2(u^{\backslash})^2 + \sigma^2 v^2 u^2\} - 2\sigma^2 vu2 = 0$$

بالمكاملة:

$$2\sigma^2 \int_0^{\infty} vu2dv = \{v^2(u^{\backslash})^2 + \sigma^2 v^2 u^2\}_0^{\infty}$$

$$v^2(u^{\backslash})^2 = \sigma^2 v^2 [J_0^{\backslash}(v\sigma)]^2$$

بالقسمة على $2\sigma^2$:

$$\int_0^{\infty} [J_0(v\sigma)]^2\, vdv = \frac{1}{2} v^2 \{\left[J_0^{\backslash}(v\sigma)\right]^2 + [J_0(v\sigma)]^2\}_0^{\infty}$$

فإنه من أجل v كبيرة يكون :

$$\left[J_0^{\backslash}(v\sigma)\right]^2 \sim \frac{2}{\pi v\sigma} sin^2(v\sigma - \frac{\pi}{4})$$

$$[J_0(v\sigma)]^2 \sim \frac{2}{\pi v\sigma} cos^2(v\sigma - \frac{\pi}{4})$$

فإنه من أجل v كبيرة يكون :

$$\frac{1}{2} v^2 \{\left[J_0^{\backslash}(v\sigma)\right]^2 + [J_0(v\sigma)]^2\} \sim \frac{1}{\pi\sigma} v$$

لذلك من أجل $\sigma = p$

$$\int_0^{\infty} J_0(v\sigma) J_0(vp) vdv = \lim_{v\to\infty}\left(\frac{1}{\pi\sigma}.v\right) = \infty$$

وبما أن تكامل بيسل–فورييه ثنائي الأبعاد والنظرية التكاملية لبيسل– فورييه لا تتحقق في حساب التفاضل والتكامل ،عندئذ التكامل السابق عندما $\sigma = p$ (نقطة غير شاذة)يسعى للصفر والنظرية التكاملية تصبح غير محققة.

مبرهنة 1

شروط حساب التفاضل والتكامل غير كافية للنظرية التكاملية لبيسل– فورييه ثنائي الأبعاد.

البرهان:

[11,10]يتم ذكر شروط حساب التفاضل والتكامل التالية في

1- تقارب التكامل. $\int_0^{\infty} |f(p)| \sqrt{p}\, dp$

2- وجود النهاية:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\infty} f(p)(\int_0^{\lambda} J_0(v\sigma)J_0(vp)vdv)pdp$$

من الواضح من الشرط الأول أن الشرط الثاني غير محقق أبداً لذلك فإن شروط حساب التفاضل والتكامل غير كافية للنظرية التكاملية لبيسل –فورييه ثنائي الأبعاد.

مبرهنة 2:

تحويل بيسل– فورييه ثنائي الأبعاد للتابع المتناظر قطبيا $f(p)$

وبمساعدة تابع بيسل بالنسبة إلى زاوية $azimuth$

يعطى بالعلاقة:

$$F_{Bessel}\{f(p)\} = 2\pi\int_0^{\infty} f(p).J_0(pv).pdp$$
$$= 2\pi\int_0^{\infty} f(p).J_0(2\pi pu).pdp\ , v = 2\pi u$$

البرهان:

تحويل بيسل فورييه ثنائي الأبعاد للتابع المتناظر قطبيا $f(x,y) = f(p)$ يعطى بالعلاقة

$$F_{Bessel}\{f(p)\} = 2\pi\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(p)e^{-it_x x-it_y y}dt_x dt_y$$

وباستبدال:

$$x = p\ cos\theta \qquad t_x = t\ cos\emptyset$$
$$y = p\ sin\theta \qquad t_y = t\ sin\emptyset$$

$$= \int_0^{\infty} f(p)(\int_0^{2\pi} e^{-ivp(cos\theta\ cos\emptyset+sin\theta\ sin\emptyset}d\theta)pdp$$
$$= \int_0^{\infty} f(p)(\int_0^{2\pi} e^{-ivp\cos(\theta-\emptyset)}d\theta)pdp$$

يصبح التكامل بالشكلبوضع $\alpha = \theta - \emptyset$

$$= \int_0^\infty f(p)(\int_{-\emptyset}^{2\pi-\emptyset} e^{-ivp\cos\alpha} d\alpha)pdp$$

وبما أن $e^{-ivp\cos\alpha}$ تابع دوري بدور 2π فإن التكامل السابق يصبح

$$= \int_0^\infty f(p)(\int_0^{2\pi} e^{-ivp\cos\alpha} d\alpha)pdp$$

وبالمكاملة

$$\int_0^{2\pi} e^{-ivp\cos\alpha} d\alpha = \int_0^{2\pi} (1 - \frac{ivp\ cos\alpha}{1} + \frac{(ivp\ cos\alpha)^2}{2!} - \frac{(ivp\ cos\alpha)^3}{3!} + \cdots)d\alpha$$

$$= 2\pi - \frac{(vp)^2}{2^2}.2\pi + \frac{(vp)^4}{2^2 4^2}.2\pi - \frac{(vp)^6}{2^2 4^2 6^2}.2\pi + \cdots = 2\pi J_0(pv)$$

لذلك

$$F_{Bessel}\{f(p)\} = 2\pi \int_0^\infty f(p).J_0(pv).pdp$$

$$= 2\pi \int_0^\infty f(p).J_0(2\pi pu).pdp\ , v = 2\pi u$$

نتيجة5:

تحويل بيسل –فورييه العكسي ثنائي الأبعاد يعطى بالعلاقة:

$$f^{-1}{}_{Bessel}\{f(v)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v).J_0(pv).vdv,\ \ v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y}$$

$$2\pi \int_0^\infty f(2\pi t).J_0(2\pi pt).tdt\ , v = 2\pi t$$

البرهان:

تحويل بيسل –فورييه العكسي ثنائي الأبعاد للتابع المتناظر قطبياً

$$f(v_x, v_y) = f(v)$$

$$f^{-1}{}_{Bessel}\{f(v)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty f(v)e^{-iv_x.x - iv_y.y} dv_x dv_y$$

وباستبدال:

$$x = p\ cos\theta \qquad v_x = v\ cos\emptyset$$
$$y = p\ sin\theta \qquad v_y = v\ sin\emptyset$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ivp(cos\,\theta\,cos\,\emptyset + sin\,\theta\,sin\,\emptyset} d\emptyset)vdv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ivp(\cos(\emptyset-\theta)} d\emptyset)vdv$$

بوضع $\alpha = \emptyset - \theta$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ivp\cos\alpha} d\alpha)vdv$$

وبالمكاملة:

$$\int_0^{2\pi} e^{ivp\cos\alpha} d\alpha = \int_0^{2\pi} (1 + \frac{ivp\ cos\alpha}{1} + \frac{(ivp\ cos\alpha)^2}{2!} - \frac{(ivp\ cos\alpha)^3}{3!} + \cdots) d\alpha$$
$$= 2\pi - \frac{(vp)^2}{2^2}.2\pi + \frac{(vp)^4}{2^2 4^2}.2\pi - \frac{(vp)^6}{2^2 4^2 6^2}.2\pi + \cdots = 2\pi J_0(pv)$$

لذلك

$$f^{-1}{}_{Bessel}\{f(v)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v).J_0(pv).vdv$$
$$= 2\pi \int_0^\infty f(2\pi t).J_0(2\pi pt).tdt\ , v = 2\pi t$$

النظرية التكاملية لبيسل− فورييه:

النظرية التكاملية لبيسل− فورييه تضمن أن تحويل بيسل−فورييه ثنائي الأبعاد وتحويله العكسي عمليتان معرفتان جيدا، لذلك فإن التابع العكسي يساعد التابع الأصلي أن يضمن التحويل، ذلك يكون

$$f(p) = 2\pi \int_0^\infty (2\pi \int_0^\infty f(\sigma) J_0(2\pi pt)\sigma d\sigma)\, J_0(2\pi pt)tdt$$

لكن في حساب التفاضل والتكامل ،هذا التكامل شاذ ،والنظرية التكاملية لبيسل −فورييه غير محققة في حساب التفاضل والتكامل تحت أي شرط من الشروط

مبرهنة 3

شروط حساب التفاضل والتكامل غير كافية للنظرية التكاملية لبيسل− فورييه ثنائي الأبعاد.

البرهان:

يتم ذكر شروط حساب التفاضل والتكامل التالية في[12].

1− تقارب التكامل $\int_0^\infty |f(p)|\sqrt{p}\, dp$.

2− وجود النهاية:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty f(p)(\int_0^\lambda J_0(v\sigma)J_0(vp)vdv)pdp$$

من الواضح من الشرط الأول أن الشرط الثاني غير محقق لذلك شروط حساب $f(p)$ لا توجد شروط على التفاضل والتكامل غير كافية للنظرية التكاملية لبيسل −فورييه ثنائي الأبعاد.

النظرية التكاملية لدوال بيسل−فورييه ثنائي الأبعاد تتحقق فقط في حساب اللامتناهيات في الصغر أي من أجل أي. تابع(hyper real)

$$f(p) = 2\pi \int_0^\infty (2\pi \int_0^\infty f(\sigma) J_0(2\pi\sigma t)\sigma d\sigma)\, J_0(2\pi pt)tdt$$
$$f(p) = \int_0^\infty f(\sigma)((2\pi)^2 \int_0^\infty J_0(2\pi\sigma t)\, J_0(2\pi pt)tdt)\sigma d\sigma$$

البرهان: في حساب اللامتناهات يكون

$$f(x,y) = f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon,\eta)\Delta(x-\varepsilon)\Delta(y-\eta)d\varepsilon d\eta$$

$$\Delta(x-\varepsilon)\Delta(y-\eta) = (2\pi)^2\int_0^{\infty} J_0(2\pi tp)J_0(2\pi t\sigma)tdt$$

$$f(p) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(\varepsilon,\eta)((2\pi)^2)\int_0^{\infty} J_0(2\pi t\sigma)J_0(2\pi tp)tdt)\ d\varepsilon d\eta$$

بالمكاملة بالنسبة لـ σ

$$f(p) = \int_0^{\infty} f(\sigma)((2\pi)^2\int_0^{\infty} J_0(2\pi\sigma t)\, J_0(2\pi pt)tdt)\sigma d\sigma$$

بإعادة ترتيب التجميع:

$$f(p) = 2\pi\int_0^{\infty}(2\pi)\int_0^{\infty} f(\sigma)J_0(2\pi\sigma t)\ \sigma d\sigma)J_0(2\pi pt)tdt)$$

لذلك فإن النظرية التكاملية لبيسل –فورييه ثنائي الأبعاد محققة فقط في حساب اللامتناهيات.

عندئذ تحويل بيسل–فورييه ثنائي الأبعاد للتابع $f(p)$ هو:

$$2\pi\int_0^{\infty} f(\sigma)\, J_0(2\pi\sigma t)\ \sigma d\sigma$$

يتقارب لتابع فوق حقيقي $f(2t\pi)$

لا نهائي مثل تابع دلتا

وتحويل بيسل –فورييه العكسي لـ $f(2t\pi)$ هو

$$2\pi\int_0^{\infty} f(2t\pi)\quad J_0(2\pi pt)\ tdt$$

يتقارب لتابع فوق حقيقي $f(p)$

هذا يعيد تأسيس وجود تحويل بيسل–فورييه في حساب اللامتناهيات في الصغر.

شروط وجود تحويل بيسل –فورييه:

إذا كان $f(p)$ تابع فوق حقيقي عندئذ:

$$2\pi\int_0^{\infty} f(\sigma)\, J_0(2\pi\sigma t)\ \sigma d\sigma \rightarrow \quad f(2\pi t)$$

$$2\pi\int_0^{\infty} f(2t\pi)\quad J_0(2\pi pt)\ tdt \rightarrow \quad f(p)$$

النتائج والتوصيات:

لا بد في نهاية هذا البحث أن نشير إلى بعض النتائج وبعض القضايا التي نوصي بها لمتابعة البحث من مختلف الحالات:

1- إن النظرية التكاملية لبيسل– فورييه تضمن أن تحويل بيسل–فورييه ثنائي الأبعاد وتحويله العكسي عمليتان معرفتان جيدا، لذلك التابع العكسي يساعد التابع الأصلي أن يضمن التحويل المناسب للوصول الى النتيجة المطلوبة.

2- إن النظرية التكاملية لبيسل –فورييه ثنائي الأبعاد محققة فقط في حساب اللامتناهات في الصغر، ومن الواضح بان التابع $f(p)$ لا توجد له شروط محققة للشرط الأول والثاني السابقين ، لذلك فإن شروط حساب التفاضل والتكامل غير كافية للنظرية التكاملية لبيسل –فورييه ثنائي الأبعاد.

المراجع

1. HOSKINS, R. F. 1990,*"Standard and Nonstandard Analysis*". Ellis Horwood.
2. APELBLAT, ALEXANDER. 1983," *Table of Definite and Infinite Integrals*". Elsevier.
3. DANNON H. Vic,2010,"*Well-Ordering of the Reals, Equality of all Infinities,and the Continuum Hypothesis*".in Gauge Institute Journal Vol.6 No 2.
4. DANNON. H. Vic. 2010 ,"*Infinitesimals*" in Gauge Institute Journal Vol.6 No 4.
5. DANNON .H.Vic.2011 "*Infinitesimal Calculus*" in Gauge Institute Journal Vol.7 No 4.
6. DANNON H. Vic.2009, "*Riemann's Zeta Function: the Riemann Hypothesis Origin, the Factorization Error, and the Count of the Primes"*. in Gauge Institute Journal of Math and Physics.
7. DANNON H. Vic.2012, "*The Delta Function and Fourier Transform*" in Gauge Institute Journal Vol.8 No 1.
8. MATHEWS, G.B., 1966."*A Treatise on Bessel Functions andtheir applications to Physics*". Dover .
9. HENLE; JAMES M.; and KLEINBERG. E. M., 1979, *"Infinitesimal Calculus*", MIT Press.
10. KEISLER H. Jerome.1986," *Elementary calculus, An Infinitesimal Approach"*, Second Edition, Prindle, Weber, and Schmidt, , pp. 905-912.
11. LAUGWITZ D.1999, "*Curt Schmieden's approach to infinitesimals-an eyeopener to the historiography of analysis*" Technische Universitat Darmstadt, Preprint Nr. 2053.