

## دراسة عددية لمعادلة نيويل – وايتهد – سيغل التفاضلية الجزئية بطريقة الفروق المنتهية الأسية

د. سامي انجرو \*

د. رامز كروم \*\*

نيروز هلال \*\*\*

(تاريخ الإيداع 2019/ 9/12. قُبل للنشر في 2019/ 12 / 22)

### □ ملخص □

يقدم هذا البحث طريقة عددية تكرارية لإيجاد حلول تقريبية لمعادلة نيويل – وايتهد – سيغل التفاضلية الجزئية. تعتمد هذه الطريقة على استبدال مشتقات المعادلة التفاضلية بتقريبات مناسبة نحصل عليها من تعريف المشتق، وبالتالي تُحوّل المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية إلى جملة من المعادلات الجبرية غير الخطية، يتم حلها بالاعتماد على طريقة نيوتن التكرارية. جرى اختبار دقة الحل العددي وتوافقه مع الحل الدقيق من خلال تطبيق الطريقة على مسألتين مختلفتين ومقارنة النتائج التي توصلنا إليها مع نتائج بعض الطرائق الأخرى، وكذلك من خلال دراسة تواؤم واستقرار الطريقة المقترحة. **الكلمات المفتاحية:** المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، معادلة نيويل – وايتهد – سيغل، الفروق المنتهية الأسية، كرانك-نيكلسون، تواؤم، استقرار.

\*أستاذ مساعد- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

\*\*أستاذ مساعد- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

\*\*\*طالبة دراسات عليا (ماجستير)- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

## Numerical Study of Newell-Whitehead-Segel Partial Differential Equation by Exponential Finite Difference Method Numerical Study of Newell-Whitehead-Segel Partial Differential Equation by Exponential Finite Difference Method

Dr. Sami Injrou \*  
Dr. Ramez Karoum \*\*  
Nayrouz Hilal\*\*\*

(Received 12/9 /2019. Accepted 22/ 12 /2019)

### □ ABSTRACT □

This work presents a numerical iterative method for computing approximate solutions of Newell-Whitehead-Segel partial differential equation replacing the derivatives of the numerical solutions by suitable approximations which can be derived from the definition of the derivative, so the partial differential equation transfers to a system of nonlinear algebraic equations, that can be solved by Newton iterative method. The accuracy of the numerical solution and its consistency with the exact solution is tested by solving two different problems and comparing the results with other numerical results, also by studying the consistency and stability of the proposed method.

**Keywords:** Nonlinear partial differential equations, Newell-Whitehead-Segel equation, exponential finite difference, Crank-Nicolson, consistency, stability.

---

\*Assistant Professor , Department of Mathematics , Faculty of Sciences , Tishreen University , Lattakia , Syria.

\*\* Assistant Professor , Department of Mathematics , Faculty of Sciences , Tishreen University , Lattakia , Syria.

\*\*\* Postgraduate student (Master), Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

## مقدمة

تأتي أهمية المعادلات التفاضلية الجزئية من كونها تشكل نماذج رياضية للعديد من المسائل المتعلقة بالصوت والحرارة والكهرباء الساكنة وتدفق الموائع المرنة وغيرها، ومنها معادلة نيویل-رايتهيد-سيغل، إذ يرمز لها اختصاراً بـ (NWS)، وهي تصف السلوك الديناميكي بالقرب من نقطة التفرد للحمل الحراري لـ Rayleigh-Benard لسائل مزيج من سائلين. فضلاً عن ذلك، تم تطبيق هذه المعادلة على العديد من المسائل في أنظمة متنوعة، نذكر منها، على سبيل المثال لا الحصر، مسألة عدم استقرار فارادي، والبصريّات غير الخطية، والتفاعلات الكيميائية، وبعض النظم البيولوجية.

ظهرت في البداية معادلة نيویل-رايتهيد على يد الباحثين: Newell و Whitehead في العام 1969

[10] بالشكل:

$$u_t(x, t) - \zeta u_{xx}(x, t) = \delta u(x, t) - \varepsilon u^3(x, t), \quad (1)$$

ثم أجرى Segel تعديلاً على المعادلة (1) في العام نفسه في [13]، وأصبحت بالشكل الآتي:

$$u_t(x, t) = \zeta u_{xx}(x, t) + \delta u(x, t) - \varepsilon u^q(x, t), \quad (2)$$

حيث  $x \in R, t \geq 0$ ، قد تمثل  $u$  توزيعاً غير خطي لدرجة الحرارة في سلك رفيع ولانهائي الطول، أو تعبر عن سرعة جريان السائل في أنبوب لانهائي الطول ذي قطر صغير؛ حيث  $\delta$  و  $\varepsilon$  و  $\zeta$  ثوابت حقيقية مع  $\zeta > 0$  و  $q$  عدد صحيح موجب.

قدم العديد من الباحثين حلولاً دقيقة لبعض مسائل القيم الابتدائية لمعادلة (NWS) بطرائق مختلفة؛ ففي عام 2011 في البحث [11] أوجد Nourazar وآخرون حلولاً تحليلية باستخدام طريقة الاضطراب الهوموتوبي، ثم في عام 2015 قام Jassim بحلها مستخدماً طريقة تحويل لابلاس مع طريقة الاضطراب الهوموتوبي في البحث [8]، وفي عام 2016 استخدم SOORI طريقة التكرار المتغير لحلها في [14]، ثم استخدم Prakash و Kumar طريقة التكرار المتغير لـ He في [12]. وبسبب مصادفة هذه المعادلة مع وجود شروط حدية ابتدائية، كان لا بدّ من اللجوء إلى التحليل العددي لإيجاد حلول تقريبية، إذ قام Macías-Díaz و Ruiz-Ramírez في العام 2011 بإيجاد حلّ تقريبي لها باستخدام طريقة المحافظة على التناظر غير القياسي (non-standard symmetry-preserving method) في [9]، وكذلك قدمت Zahra و آخرون في [16] في العام 2014 حلاً تقريبياً للمعادلة، مع شروط ابتدائية وحدية بطريقة شرائح B التكعيبية، كما قدم Edeki و Akinlabi في العام 2017 في [2] حلاً تقريبياً للمعادلة مع شروط ابتدائية، باستخدام طريقة التحويل التكراري المضطرب.

إن طريقة الفروق المنتهية إحدى أهم الطرائق العددية المستخدمة في إيجاد حلول تقريبية لمسائل قيم حدية ابتدائية، فقد استخدم Bahadir في البحث [3] طريقة الفروق المنتهية الأسية عام 2005 وأوجد حلولاً تقريبية لمعادلة KDV، كما قامت Inan وآخرون في عام 2015 في [7] بتطبيق طريقة الفروق المنتهية الأسية الضمنية لحل معادلة Burgers-Huxley المعممة، وفي عام 2017 قام Celikten وآخرون بحل معادلة Burger المعدلة بأربع طرائق مختلفة للفروق المنتهية الأسية الصريحة في البحث [5]، وفي البحث [1] استخدم انجرو وآخرون طريقتي الفروق المنتهية الضمنية والفروق المنتهية الضمنية كلياً وأوجدوا حلولاً تقريبية لمعادلة (NWS) التفاضلية الجزئية عام 2019.

## أهمية البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول عددية تقريبية لمعادلة نيوبل-وايتهد-سيغل (NWS) مع شروط ابتدائية- حدية من نوع ديرخلية، أي المسألة ذات الشكل:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \zeta u_{xx}(x, t) + \delta u(x, t) - \varepsilon u^q(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(a, t) &= g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t), \end{aligned}$$

باستخدام طريقة الفروق المنتهية الأسية بصيغة كرانك-نيكلسون، وتأتي أهمية هذا البحث من أنه يمكن الباحث من إيجاد حلول تقريبية لبعض المسائل التي يصعب حلها تحليلياً.

## طرائق البحث ومواده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية، وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية والتحليل العددي، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وبرنامج Scilab للحسابات الرياضية.

## النتائج والمناقشة:

تعتمد طريقة الفروق المنتهية على تحويل منطقة التعريف  $\mathfrak{R} = \{(x, t); a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$  إلى شبكة من العقد  $(x_i, t_j)$ ، وذلك بتقطيعها تقطيعاً منتظماً، نحصل على هذه العقد كالاتي:

$$n = \frac{b-a}{\Delta x} \quad \text{و} \quad m = \frac{T-0}{\Delta t}.$$

فيكون:  $x_i = i\Delta x ; 0 \leq i \leq n$  و  $t_j = j\Delta t ; 0 \leq j \leq m$ .

ثم استبدال مشتقات المعادلة التفاضلية الجزئية بتقريبات مناسبة، نحصل عليها من تعريف المشتق، ومن ثم نحصل على جملة من المعادلات الجبرية، وبحلها بإحدى الطرائق المناسبة، نحصل على قيم تقريبية لحل المعادلة التفاضلية الجزئية عند هذه العقد [6].

### طريقة الفروق المنتهية الأسية بصيغة كرانك-نيكلسون (CN-EFD) :

سنوجد الحل التقريبي للمعادلة (2) بطريقة الفروق المنتهية الأسية بصيغة كرانك-نيكلسون، إذ يمكن كتابة

المعادلة (2) بالشكل:

$$(3) \quad \frac{\partial F(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F(u)}{\partial u} \left[ k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - bu^q \right]$$

وبفرض  $F(u) = \ln u$ ، عندئذ تصبح (3) بالشكل:

$$(4) \quad \frac{\partial \ln u}{\partial t} = \frac{1}{u} \left[ k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - bu^q \right]$$

تصبح المعادلة باستخدام الصيغة الأسية لكرانك-نيكلسون:

$$u_i^j \exp \left\{ r \left( \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{u_i^j} + \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{u_i^j} \right) + \frac{a\Delta t}{2} \frac{u_i^{j+1} + u_i^j}{u_i^j} - \frac{b\Delta t}{2} \frac{(u_i^{j+1})^q + (u_i^j)^q}{u_i^j} \right\} = u_i^{j+1} \quad (5)$$

حيث  $r = \frac{k\Delta t}{2(\Delta x)^2}$  و  $0 \leq j \leq m-1$  و  $1 \leq i \leq n-1$ .

تمت القسمة على العقدة  $u_i^j$  بالاعتماد على البحث [4].  
تمثل العلاقة (5) جملة من المعادلات الجبرية غير خطية، لذلك سنوجد حلها بالاعتماد على طريقة نيوتن التكرارية، التي نلخصها بالخطوات الآتية:

أولاً: نكتب الجملة (5) بالشكل الآتي:

$$G(u) = 0 \quad (6)$$

حيث  $u = [u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, \dots, u_{n-1}^{j+1}]^T$  و  $G = [g_1, g_2, \dots, g_{n-1}]^T$ .  
ثانياً: نفترض أن الشرط الابتدائي للمسألة المدروسة هو قيمة ابتدائية للحل التقريبي.

ثالثاً: من أجل  $k = 0, 1, 2, \dots$  وحتى يتحقق التقارب، نحسب المقدار  $u^{(k+1)}$  من علاقة نيوتن

التكرارية:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - J(u^{(k)})^{-1} G(u^{(k)}) \quad (7)$$

حيث  $J(u^{(k)})$  هي مصفوفة جاكوبي للدالة  $G(u)$  عند  $u = u^{(k)}$ .

ولإيجاد الحل  $u^{(k+1)}$  عند كل خطوة زمنية، نعتمد على الحل في الخطوة الزمنية السابقة. يتوقف تكرار

نيوتن (7) عندما يتحقق الشرط  $\|G(u^{(\epsilon)})\|_{\infty} \leq 10^{-5}$ ؛ إذ يتحقق التقارب عادةً من أجل  $\epsilon = 2$  أو

$\epsilon = 3$ .

$G =$

$$\begin{bmatrix} u_1^{j+1} - u_1^j \exp \left\{ \frac{1}{u_1^j} \left[ r(u_0^j - 2u_1^j + u_2^j + u_0^{j+1} - 2u_1^{j+1} + u_2^{j+1}) + \frac{a\Delta t}{2}(u_1^j + u_1^{j+1}) - \frac{b\Delta t}{2}((u_1^j)^q + (u_1^{j+1})^q) \right] \right\} \\ u_2^{j+1} - u_2^j \exp \left\{ \frac{1}{u_2^j} \left[ r(u_1^j - 2u_2^j + u_3^j + u_1^{j+1} - 2u_2^{j+1} + u_3^{j+1}) + \frac{a\Delta t}{2}(u_2^j + u_2^{j+1}) - \frac{b\Delta t}{2}((u_2^j)^q + (u_2^{j+1})^q) \right] \right\} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{j+1} - u_{n-2}^j \exp \left\{ \frac{1}{u_{n-2}^j} \left[ r(u_{n-3}^j - 2u_{n-2}^j + u_{n-1}^j + u_{n-3}^{j+1} - 2u_{n-2}^{j+1} + u_{n-1}^{j+1}) + \frac{a\Delta t}{2}(u_{n-2}^j + u_{n-2}^{j+1}) - \frac{b\Delta t}{2}((u_{n-2}^j)^q + (u_{n-2}^{j+1})^q) \right] \right\} \\ u_{n-1}^{j+1} - u_{n-1}^j \exp \left\{ \frac{1}{u_{n-1}^j} \left[ r(u_{n-2}^j - 2u_{n-1}^j + u_n^j + u_{n-2}^{j+1} - 2u_{n-1}^{j+1} + u_n^{j+1}) + \frac{a\Delta t}{2}(u_{n-1}^j + u_{n-1}^{j+1}) - \frac{b\Delta t}{2}((u_{n-1}^j)^q + (u_{n-1}^{j+1})^q) \right] \right\} \end{bmatrix}$$

$$J(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1^{j+1}} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2^{j+1}} & \frac{\partial g_1}{\partial u_3^{j+1}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_{m-1}^{j+1}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1^{j+1}} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2^{j+1}} & \frac{\partial g_2}{\partial u_3^{j+1}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_{m-1}^{j+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{m-1}}{\partial u_1^{j+1}} & \frac{\partial g_{m-1}}{\partial u_2^{j+1}} & \frac{\partial g_{m-1}}{\partial u_3^{j+1}} & \dots & \frac{\partial g_{m-1}}{\partial u_{m-1}^{j+1}} \end{pmatrix}$$

لاختبار دقة النتائج، سنتم مقارنتها مع الحل الدقيق للمسائل المدروسة بحساب الخطأ وفق النظيم  $L_{\infty}$

والنظيم  $L_2$  المعرفين على الترتيب بالعلاقين الآتيتين:

$$error_{L_{\infty}} = \|u - \bar{U}\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq N} |u_i - \bar{U}_i|, \quad (8)$$

$$error_{L_2} = \|u - \bar{U}\|_2 = \left( \Delta x \sum_{i=0}^N |u_i - \bar{U}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

حيث  $u$  هو الحل الدقيق و  $\bar{U}$  هو الحل التقريبي للمسألة.

## تقدير خطأ الاقتران ودراسة التوافق:

سيتم نشر التابع الأسى بسلسلة تايلور، ثم اقتطاع السلسلة والاكتفاء بالحدين الأول والثاني، فتصبح العلاقة

(5) بالشكل:

$$u_i^{j+1} = u_i^j \left[ 1 + r \left( \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{u_i^j} + \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{u_i^j} \right) + \frac{a\Delta t u_i^{j+1} + u_i^j}{2 u_i^j} - \frac{b\Delta t (u_i^{j+1})^q + (u_i^j)^q}{2 u_i^j} \right] \quad (10)$$

ولكن:

$$u_{i+1}^j = u_i^j + \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j} + \dots$$

$$u_{i-1}^j = u_i^j - \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j} + \dots$$

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right)_{i,j} + \dots$$

$$u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} + \Delta x \Delta t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \Delta t \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)_{i,j} + \Delta x \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2 (\Delta t)^2}{4} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \Delta t \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \right)_{i,j} + \Delta x \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \right)_{i,j} + \dots$$

$$u_{i-1}^{j+1} = u_i^j - \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} - \Delta x \Delta t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)_{i,j} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \Delta t \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)_{i,j} - \Delta x \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2 (\Delta t)^2}{4} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right)_{i,j} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \Delta t \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \right)_{i,j} - \Delta x \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \right)_{i,j} + \dots$$

عندئذٍ، بتعويض العلاقات السابقة في العلاقة (10) نجد:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} + O(\Delta t^2) = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} + O(\Delta x^2) + a(u_i^j + O(\Delta t)) - b((u_i^j)^q + O(\Delta t)) \quad (11)$$

وبالتالي عندما  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$  فإن العلاقة (11) تسعى إلى معادلة نيويل-وايتهيد-سيغل وهذا يبين  
توافق العلاقة (5) مع معادلة (NWS).

كذلك فإن العلاقة (11) تبين أن خطأ الاقتطاع من الرتبة  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ .  
دراسة الاستقرار:

ستجري دراسة الاستقرار بالاعتماد على طريقة Von-Neumann [15]، ولذلك نحتاج لكتابة  
العلاقة (10) بالشكل الخطي، باعتبار:

$$(u_i^j)^{q-1} = \alpha = \text{ثابت}, (u_i^{j+1})^{q-1} = \gamma = \text{ثابت}$$

فيصبح الشكل الخطي للعلاقة (10):

$$ru_{i-1}^j + \left(1 - 2r + \frac{a\Delta t}{2} - \frac{ab\Delta t}{2}\right)u_i^j + ru_{i+1}^j + ru_{i-1}^{j+1} + \left(-1 - 2r + \frac{a\Delta t}{2} - \frac{\gamma b\Delta t}{2}\right)u_i^{j+1} + ru_{i+1}^{j+1} = 0 \quad (12)$$

بتعويض  $u_i^j = \xi^j e^{I\beta i\Delta x}$ ;  $I^2 = -1$  في (12) نجد:

$$\xi^{j+1} = g\xi^j; g = \frac{1 + \frac{a\Delta t}{2} - \frac{ab\Delta t}{2} - 4r \sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}}{1 - \frac{a\Delta t}{2} + \frac{\gamma b\Delta t}{2} + 4r \sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}} \quad (13)$$

حيث  $\beta$  هو العدد الموجي،  $\xi$  هو الحل المتعلق بالزمن.

شرط الاستقرار هو  $|g| \leq 1$ .

الاختبارات العددية ومناقشة الاستقرار:

سيتم اختبار الطريقة المقترحة على مسألتين نموذجيتين لهما حل تحليلي، ومقارنة النتائج مع [1]، كذلك  
سنورد شكلاً توضيحياً للحل الدقيق مع الحل التقريبي، وشكلاً آخر يمثل سطحاً للحل العددي لكل مسألة، وذلك  
باستخدام برنامج Scilab للحسابات الرياضية.

مثال (1): [1]

$$u_t - u_{xx} - u + u^4 = 0, (x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$$

$$u(x, 0) = \left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{-\frac{2}{3}},$$

$$u(0, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{21t}{20}\right)\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$u(1, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(-\frac{3}{2\sqrt{10}}\left(1 - \frac{7t}{\sqrt{10}}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$. u(x, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(-\frac{3}{2\sqrt{10}}\left(x - \frac{7t}{\sqrt{10}}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

لدراسة استقرار المسألة السابقة نعوض  $\varepsilon = 1, \delta = 1, q = 3$ ، وبفرض أن  $\alpha = \gamma = 1$  تصبح

العلاقة (13) بالشكل:

$$g = \frac{1 - 4r \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}}{1 + 4r \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}}$$

نجد أن  $|g| \leq 1$  دوماً، فالطريقة مستقرة دون شروط.

يبين الجدولان (1) و (2) مقارنة نتائج الطريقة المقترحة مع النتائج الواردة في [1]، وذلك من أجل  $T = 10$  و  $\Delta x = 0.1$  و  $\Delta x = 0.05$  (على الترتيب).

يوضح الشكل (1) الحلّ الدقيق مع الحلول العددية من أجل  $\Delta t = 0.001$  و  $\Delta x = 0.05$  بطريقة (CN-EFD).

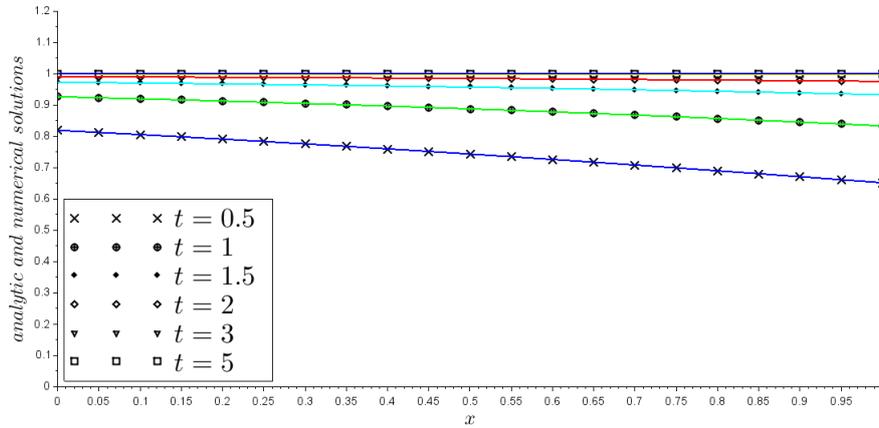
كما يوضح الشكل (2) الحل العددي من أجل  $\Delta t = 0.005$  و  $\Delta x = 0.1$  بطريقة (CN-EFD).

الجدول(1): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (CN-EFD) وطرائق [1] من أجل  $\Delta x = 0.1$ .

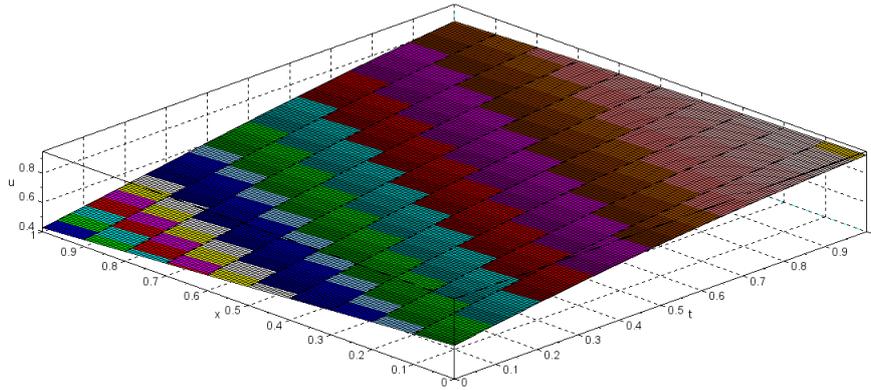
$\Delta t$	Method	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
		$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$
$\Delta t=10^{-2}$	IFD	E-42.166	1.586E-4	E-71	1E-7	3.836E-12	2.823E-12
	FIFD	2.7245E-3	2.1159E-3	9.9E-6	7.3E-6	2.846E-10	2.114E-10
	CN-EFD	2.6423E-3	1.9706E-3	9.2E-6	6.8E-6	E-102.594	E-101.912
$\Delta t=10^{-3}$	IFD	E-52.44	.79E-51	1.174E-8	E-948.6	3.120E-13	2.299E-13
	FIFD	4E-2.692	42.073E-	.1E-69	E-66.7	E-102.520	E-101.844
	CN-EFD	4E-2.615	4E-1.939	9.1E-6	6E-66.	E-102.496	1.824E-10
$\Delta t=10^{-4}$	IFD	5.1E-6	E-63.8	9.095E-10	6.69E-10	3.431E-14	.443E-142
	FIFD	52.53E-	1.80E-5	E-69.0	E-66.6	E-102.488	E-101.818
	CN-EFD	5E-2.49	1.75E-5	E-69.0	E-66.6	E-102.486	1.816E-10

الجدول(2): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (CN-EFD) وطرائق [1] من أجل  $\Delta x = 0.05$ .

$\Delta t$	Method	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
		$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$
$\Delta t=10^{-2}$	IFD	E-42.145	1.571E-4	E-71	1E-7	.917E-123	E-122.863
	FIFD	3E-2.7738	32.1758E-	E-67.6	.7E-65	E-102.863	2.115E-10
	CN-EFD	E-21.8255	1.2921E-2	E-68.0	9E-6.5	E-102.606	E-101.912
$\Delta t=10^{-3}$	IFD	E-52.21	E-51.62	1.358E-8	9.923E-9	3.714E-13	E-132.705
	FIFD	4E-2.754	4.148E-2	.2E-69	E-66.7	E-102.529	E-101.843
	CN-EFD	E-42.713	E-42.016	.1E-69	6E-66.	2.505E-10	1.824E-10
$\Delta t=10^{-4}$	IFD	E-62.9	E-62.1	8.323E-10	6.08E-10	4.086E-14	2.440E-14
	FIFD	5E-2.72	5E-2.02	E-69.1	E-66.6	E-102.498	E-101.817
	CN-EFD	5E-2.69	5E-1.97	.1E-69	6E-66.	2.494E-10	1.815E-10



الشكل (1): يُظهر الحلّ الدقيق والحلول العددية للمثال (1) بطريقة (CN-EFD)



الشكل (2): يُظهر الحلّ العددي للمثال (1) بطريقة (CN-EFD)

مثال (2): [1]

$$u_t - u_{xx} - u + u^3 = 0, (x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}},$$

$$u(0, t) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3t}{2}}}, \quad u(1, t) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3t}{2}}},$$

$$. u(x, t) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3t}{2}}}$$

ولدينا الحلّ الدقيق

ندرس استقرار المسألة بشكل مشابه لدراسة استقرار المسألة (1) فنجد أن  $|g| \leq 1$  دوماً، والطريقة مستقرة دون شروط.

يبين الجدولان (3) و(4) مقارنة نتائج الطريقة المقترحة مع النتائج الواردة في [1]، وذلك من أجل  $T = 10$  و  $\Delta x = 0.1$  و  $\Delta x = 0.05$  (على الترتيب).

يوضح الشكل (3) الحلّ الدقيق مع الحلول العددية من أجل  $\Delta t = 0.001$  و  $\Delta x = 0.05$  بطريقة (CN-EFD).

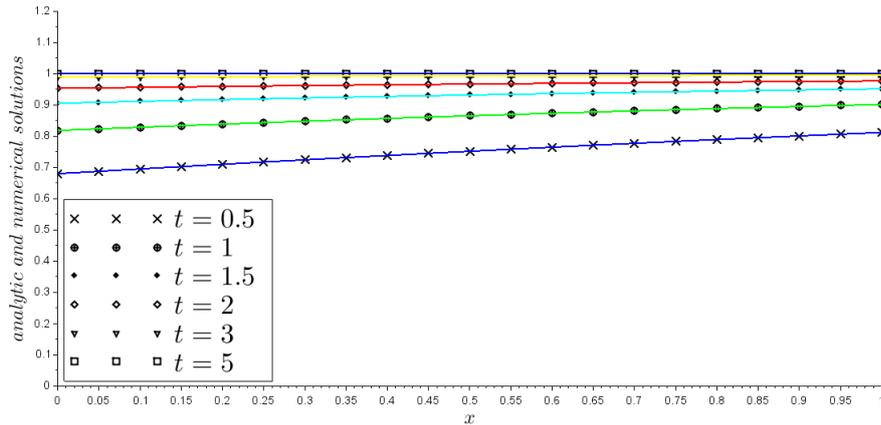
كما يوضح الشكل (4) الحلّ العددي من أجل  $\Delta t = 0.005$  و  $\Delta x = 0.1$  بطريقة (CN-EFD).

الجدول(3): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (CN-EFD) وطرائق [1] من أجل  $\Delta x = 0.1$ .

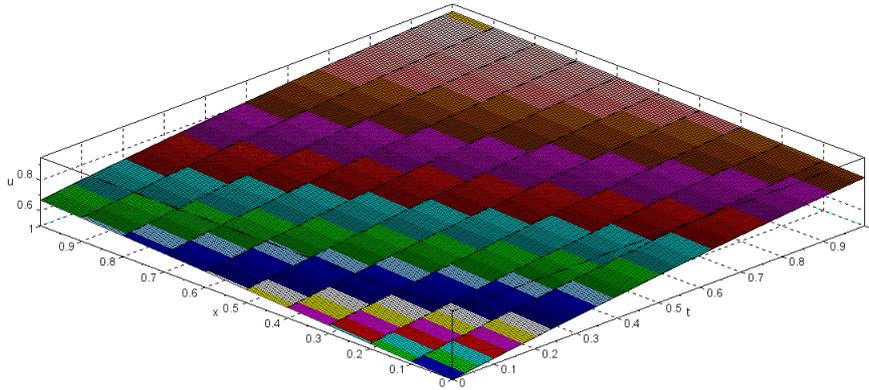
$\Delta t$	Method	t = 1		t = 5		t = 10	
		$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$
$\Delta t=10^{-2}$	IFD	1.348E-4	9.87E-5	9E-7	E-76	4.812E-10	3.528E-10
	FIFD	9E-32.188	E-31.7735	8.0E-6	6.1E-6	5.104E-8	E-83.787
	CN-EFD	E-32.1365	1.6789E-3	7.8E-6	5.8E-6	E-84.738	3.488E-8
$\Delta t=10^{-3}$	IFD	1.45E-5	E-51.06	7.756E-8	5.687E-8	4.296E-11	E-113.150
	FIFD	E-42.171	E-41.750	E-58.30	6.07E-5	E-84.600	E-83.363
	CN-EFD	E-42.123	1.664E-4	E-58.24	6.02E-5	E-84.565	3.334E-8
$\Delta t=10^{-4}$	IFD	2.5E-6	E-61.8	9.216E-10	6.757E-10	5.245E-13	E-133.874
	FIFD	E-52.10	E-51.62	E-58.22	6.00E-5	E-84.551	E-83.321
	CN-EFD	E-52.08	1.59E-5	E-58.21	5.99E-5	E-84.547	3.318E-8

الجدول(4): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (CN-EFD) وطرائق [1] من أجل  $\Delta x = 0.05$ .

$\Delta t$	Method	t = 1		t = 5		t = 10	
		$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$
$\Delta t=10^{-2}$	IFD	1.340E-4	9.81E-5	9E-7	E-76	E-104.866	E-103.560
	FIFD	E-32.2197	E-31.8222	E-68.2	6.3E-6	E-85.115	E-83.788
	CN-EFD	2E-1.6249	2E-1.1496	1E-68.	5.9E-6	E-84.744	3.488E-8
$\Delta t=10^{-3}$	IFD	E-51.37	E-51.00	.503E-88	.221E-86	E-114.713	E-113.448
	FIFD	E-42.208	E-41.805	E-58.30	6.06E-5	E-84.602	3.361E-8
	CN-EFD	E-42.182	1.719E-4	E-58.24	6.01E-5	E-84.566	3.332E-8
$\Delta t=10^{-4}$	IFD	1.6E-6	E-61.2	6.324E-9	.627E-94	E-123.442	2.519E-12
	FIFD	E-52.19	E-51.73	E-58.22	6.00E-5	E-84.551	E-83.320
	CN-EFD	E-52.17	1.70E-5	E-58.22	E-55.99	E-84.548	3.317E-8



الشكل (3): يُظهر الحلّ الدقيق والحلول العددية للمثال (2) بطريقة (CN-EFD)



الشكل (4): يُظهر الحلّ العددي للمثال (2) بطريقة (CN-EFD)

نستنتج من الجداول (1)-(4) أنّ نتائج الطريقة المقترحة ذات دقة عالية، وأنّه تزداد هذه الدقة بتصغير خطوة الزمن  $\Delta t$ ؛ كما نلاحظ من الشكلين (1) و(3) أنّ الحلول التقريبية العددية تتقارب بسرعة إلى الحلّ الدقيق.

#### دقة الطريقة ومعدّل التقارب:

سيتمّ تقدير دقة الطريقة باستخدام العلاقة [1]:

$$E = \left[ \frac{\sum_{i=0}^N |u_i - \bar{U}_i|^2}{\sum_{i=0}^N |\bar{U}_i|^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

حيث  $u$  هو الحلّ الدقيق و  $\bar{U}$  هو الحلّ التقريبي للمسألة.

ومن ثمّ يُحسب معدّل التقارب من العلاقة [1]:

$$rate = \log_2 \left( \frac{E^{\Delta x}}{\frac{\Delta x}{E^{\frac{\Delta x}{2}}}} \right), \quad (15)$$

حيث  $E^{\frac{\Delta x}{2}}$  و  $E^{\Delta x}$  معرفان بالعلاقة (14)، و  $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ ؛ أي أنّ  $\Delta x$  هو طول خطوة الموضع.

يبين الجدول (5) معدّل التقارب للمثال (1) باستخدام طريقة (CN-EFD) من أجل  $\Delta t = 4$  و  $T = 4$

$10^{-4}$ ؛ حيث  $\Delta x$  متغيرة مع قيم  $N$ .

الجدول (5)

$N$	معدّل التقارب	مرتبة التقارب
4	0.1133529	-
8	0.0507995	2.2313783
16	0.0239472	2.1213127
32	0.0116392	2.057461
64	0.0058489	1.989981

تُظهر نتائج الجدول (5) أنّ دقة الطريقة من المرتبة الثانية بالنسبة إلى الموضع، كذلك نجد أنّ الخطأ يسعى إلى الصفر كلما صَغُر  $\Delta x$ ؛ أي بزيادة عدد العقد  $(x_i, t_j)$ ، الأمر الذي يعني أنّ الطريقة المقترحة متوائمة (consistent).

### الاستنتاجات والتوصيات:

أظهرت الطريقة العددية التي قدمناها في هذا البحث مدى فعاليتها في إيجاد حلول تقريبية لمعادلة نيوبل- وايتهد-سيغل التفاضلية الجزئية، وذلك من خلال مقارنة النتائج مع النتائج الواردة في البحث [1]، بحساب الخطأ مقاساً بالنظيمين  $L_2$  و  $L_\infty$ ، ودراسة توائم واستقرار هذه الطريقة. لذلك نوصي باستخدام هذه الطريقة لحلّ مسائل من هذا النوع.

### المراجع:

- [1] انجرو، سامي؛ كروم، رامز؛ هلال، نيروز. 2019، حل عددي لمعادلة نيوبل - وايتهد - سيغل التفاضلية الجزئية بطريقة الفروق المنتهية، مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية، سورية، (41) - (2)، 105-118.
- [2]. AKINLABI, G, O. ;EDEKI, S, O. 2017, *Perturbation iteration transform method for the solution of Newell-Whitehead-Segel model equations. Journal of Mathematics and Statistics. United states.*
- [3]. BAHADIR, A, R. 2005, *Exponential finite-difference method applied to Korteweg-de Vries equation for small times, Elsevier. Applied Mathematics and Computation.*160,675–682.
- [4]. BHATTACHARYA, M, C. 1993, *Improved finite-difference solutions of the diffusion equation for heat conduction. England, Vol. 9, 713-720.*
- [5]. ÇELİK TEN, G. ; AKSAN, E, N. 2017, *Explicit Exponential Finite Difference Methods for the Numerical Solution of Modified Burgers' Equation, Eastern Anatolian Journal of Science. Turkey, 3, 45-50.*
- [6]. HOFFMAN, J, D. 2001, *Numerical Methods for Engineers and Scientists. 2<sup>nd</sup>, Ed, United States Of America, 823.*
- [7] INAN, B. ;BAHADIR, A, R. 2015, *Numerical solutions of the generalized Burgers-Huxley equation by implicit exponential finite difference method, JAMSI. Slovakia. 11, 57-67.*
- [8]. JASSIM, H, K. 2015, *Homotopy perturbation algorithm using Laplace transform for Newell-Whitehead-Segel equation. Int. J. Adv. Appl. Math. And Mech. India, Vol. 2, 8-12.*

- [9]. MACIAS-DIAZ, J, E. ;RUIZ-RAMIREZ, J. 2011, *A non-standard symmetry-preserving method to compute bounded solutions of a generalized Newell-Whitehead-Segel equation. ScienceDirect Applied Numerical Mathematics. Netherlands*, Vol. 61, 630-640.
- [10]. NEWELL, A, C. ;WHITEHEAD, J, A. 1969, *Finite bandwidth, finite amplitude convection. Journal of Fluid Mechanics. Great Britain*, Vol. 38, part 2, 279-303.
- [11]. NOURAZAR, S, S. ;SOORI, M. ;NAZARI-GOLSHAN, A. 2011, *On The Exact Solution of Newell-Whitehead-Segel Equation Using the Homotopy Perturbation Method. Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5(8), 1400-1411.
- [12]. PRAKASH, A. ;KUMAR, M. 2016, *He's variational iteration method for the solution of nonlinear Newell-Whitehead-Segel equation. Journal of Applied Analysis and Computation. United states*, Vol. 6, 738-748.
- [13]. SEGEL, L, A. 1969, *Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. Journal of Fluid Mechanics. Great Britain*, Vol. 38, part 1, 203-224.
- [14]. SOORI, M. 2016, *The variational iteration method for the Newell-Whitehead-Segel equation, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), Tehran, Iran.*
- [15]. TVEITO, A. ; WINTHER, R. 1998, *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach. 1<sup>st</sup>, Ed, Springer-Verlag New-York*, 402.
- [16]. ZAHRA, W, K. ;OUF, W, A. ;EL-AZAB, M, S. 2014, *Cubic B-spline collocation algorithm for the numerical solution of Newell-Whitehead-Segel type equations. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 2, 81-100.