مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (3) العدد (2) 2019
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- Engineering Sciences Series Vol. (3) No. (2) 2019

التحكم ببندول مقلوب مكوّن من أربع قطع باستخدام المتحكم OMPC

بلال عبد الكريم شيحا
عصام محمود اسعد

(تاريخ الإيداع 30 / 10 / 2018 . قُبل للنشر 23 / 5 / 2019)

الملخص

تقدم هذه الدراسة عرضاً تفصيلياً لبناء نموذج رياضي خطي لبندول مقلوب، مكون من أربع قطع، محمول على عربة، ويسير على مستوٍ غير مائل؛ وذلك من خلال استنتاج معادلات الطاقة الحركية، والطاقة الكامنة لمختلف أجزاء البندول، والاعتماد على طريقة لاغرانج؛ لإيجاد معادلات الحالة لأجزاء البندول، وذلك باستخدام بيئة SolidWorks ومجموعة التعليمات المتاحة في Symbolic Toolbox الخاص ببيئة MATLAB. بعد ذلك قمنا ببناء متحكم باستخدام خوارزمية LQR لضبط زاوية أجزاء البندول على الوضعية الشاقولية للأعلى، ثم استعرضنا بناء متحكم باستخدام خوارزمية OMPC، التي تتفوق على أداء متحكم LQR في المرحلة التي تسبق الوصول إلى حالة الاستقرار. بعدها تم عرض أداء المتحكمَين المصمّمَين مع النموذج الرياضي المصمّم، وتحديد المواضع التي قدمت فيها خوارزمية OMPC تحسيناً ملحوظاً على أداء متحكم LQR.

كلمات مفتاحية: نموذج رياضي، طاقة حركية، طاقة كامنة، بندول مقلوب، طريقة لاغرانج، متحكم، LQR، OMPC.

*أستاذ مساعد – قسم هندسة الحاسبات والتحكم الآلي – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
**طالب دراسات عليا (دكتوراه) – قسم هندسة الحاسبات والتحكم الآلي – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (3) العدد (2) 2019
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- Engineering Sciences Series Vol. (3) No. (2) 2019

Control a four-piece inverted pendulum using the OMPC controller

Bilal Chiha*
Isam Asaad**

(Received 30 / 10 / 2018 . Accepted 23 / 5 / 2019)

Abstract

This study demonstrates a detailed presentation for building a linear mathematical model of a four-part inverted pendulum carried on a cart moving on a not inclined surface. This is done by deducing kinetic and potential energy equations of all pendulum parts, and deploying the Lagrange method to find the state equations of the parts of the pendulum using SolidWorks environment and the instruction set available in the Symbolic Toolbox within MATLAB environment. Then we will build a controller using the LQR algorithm to adjust the pendulum parts angle to the upwards vertical position, and then display the construction of a controller using the OMPC algorithm, which will outperform the performance of the LQR controller in the phase preceding the stable state. After that, the performance of the designed controllers will be presented alongside the designed mathematical model, emphasizing areas where the OMPC algorithm significantly improves the performance of the LQR controller.

Keywords: Mathematical Model, Kinetic Energy, Potential Energy, Inverted Pendulum, Lagrange Method, Controller, LQR, OMPC.

*Assistant professor, Department of Computers and Automatic Control Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.
** Postgraduate student(PhD), Department of Computers and Automatic Control Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تُعدّ مسألة التحكم بالبندول المقلوب إحدى المسائل التقليدية في نظرية التحكم، وهي تتميز بكونها تتعامل مع نظام ذي أداء لا خطي وغير مستقر، الأمر الذي وجَه الكثير من طرق التحكم التي تعتمد على التغذية العكسية لتعمل على حل هذه المسألة من خلال التحكم بحركة الأجزاء المختلفة المكوَّنة للبندول المقلوب.

تُعدّ خوارزمية Linear Quadratic Regulator (LQR) واحدةً من خوارزميات إيجاد الحل الأمثل، ومن اللافت أنّ معظم الدراسات التي تحاول العمل على تحسين الأداء الذي تقدّمه هذه الخوارزمية تجد أنه من الصعب تقديم أداء يتفوّق بنحو كامل على ما تقدّمه خوارزمية LQR، ومن هنا سنقول إن الخوارزمية المدروسة في هذا البحث وهي Optimal Model Predictive Control (OMPC) ستحاول تحسين أداء خوارزمية LQR، ضمن المدة التي تسبق الوصول إلى حالة الاستقرار، بينما ستقدّم أداءً يوافق أداء خوارزمية LQR بعد بلوغ حالة الاستقرار.

عند البحث عن موضوع التحكم بالبندول المقلوب، نجد أن خوارزمية LQR من أكثر الخوارزميات استخداماً، وأن الباحثين يعملون على تحسين عمل هذه الخوارزمية بتطعيمها بأجزاء من خوارزميات أخرى، فعلى سبيل المثال نجد في [2,1] بناء نموذج رياضي خطي لبندول محمول على عربة مكوّن من قطعة واحدة وآخر مكوّن من قطعتين، باستخدام طريقة لاغرانج، واستخدام خوارزمية LQR لضبط توازن قطع البندول المدروس، ونرى دمجاً لمتحكم LQR مع متحكم Proportional Integral Derivative Controller (PID)، ومقارنةً مع أداء متحكم Fractional Order PID ومتحكم Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System (ANFIS) في [5,4,3] ، بينما نجد بناء نموذج رياضي خطي لبندول محمول على 5 قطع ومقارنة أداء متحكم LQR و متحكم LQG الذي هو عبارة عن متحكم LQR مع مرشح كالمان أو Linear Quadratic Estimator (LQE) في [6]، وأخيراً نشاهد بناء نماذج رياضية لبندول مقلوب محمول على قضيب دوار Rotary Inverted Pendulum مكون من قطعة واحدة باستخدام طريقتي نيوتن ولاغرانج، والتحكم بتوازن هذا البندول باستخدام خوارزمية LQR وخوارزمية Lyapunov وخوارزميات Genetic Algorithm PID (GA-PID) و Particle swarm optimization PID (PSO-PID) و Ant Colony Optimization Based PID (ACO-PID) في [10,9,8,7].

أهمية البحث وأهدافه:

تنبع أهمية البحث أساساً من كونه يوضح أداء متحكم OMPC، مستخدم للتحكم بالبندول المقلوب، حيث تُعدّ عملية التحكم بالبندول المقلوب واحدة من المسائل المعيارية لقياس أداء المتحكمات التي تم اختيارها من قِبل IFAC (International Federation of Automatic Control) في عام 1990، تتم فيها عملية التحكم من خلال تصغير قيمة الطاقة الحركية لأجزاء البندول التي تهتز حول حالة الاستقرار بالوضع الشاقولي [11].

يهدف البحث لبناء نموذج رياضي لبندول مقلوب، مكون من أربع قطع، وذلك بالاعتماد على بناء نموذج ميكانيكي للبندول المطلوب والحصول على بارامترات النموذج المطلوب بشكل كامل، ليتم بعد ذلك العمل على تقليص الزمن الذي تحتاجه خوارزمية LQR لبلوغ مرحلة الاستقرار عند التحكم بزوايا أجزاء البندول المقلوب، المدروس من خلال استخدام خوارزمية OMPC، التي تُعدّ من خوارزميات التحكم التنبؤي، والتي تقوم بإضافة مجموعة محدودة من القيم إلى أمر التحكم في المرحلة التي تسبق الوصول إلى مرحلة الاستقرار.

مواد البحث:

1-1) طريقة لاغرانج The Lagrangian Method:

توفر طريقة لاغرانج منهجية واضحة لصياغة معادلات الحركة لمكونات النظم الميكانيكية ذات درجات الحرية المتعدّدة [12]، حيث تستخدم طريقة لاغرانج الطاقة الكامنة Potential Energy والطاقة الحركية Kinetic Energy لحل معادلات الحركة، يتم التعبير عن معامل لاغرانج Lagrangian باستخدام المعادلة الآتية [12]:

$$L = T - U \qquad (1-3)$$

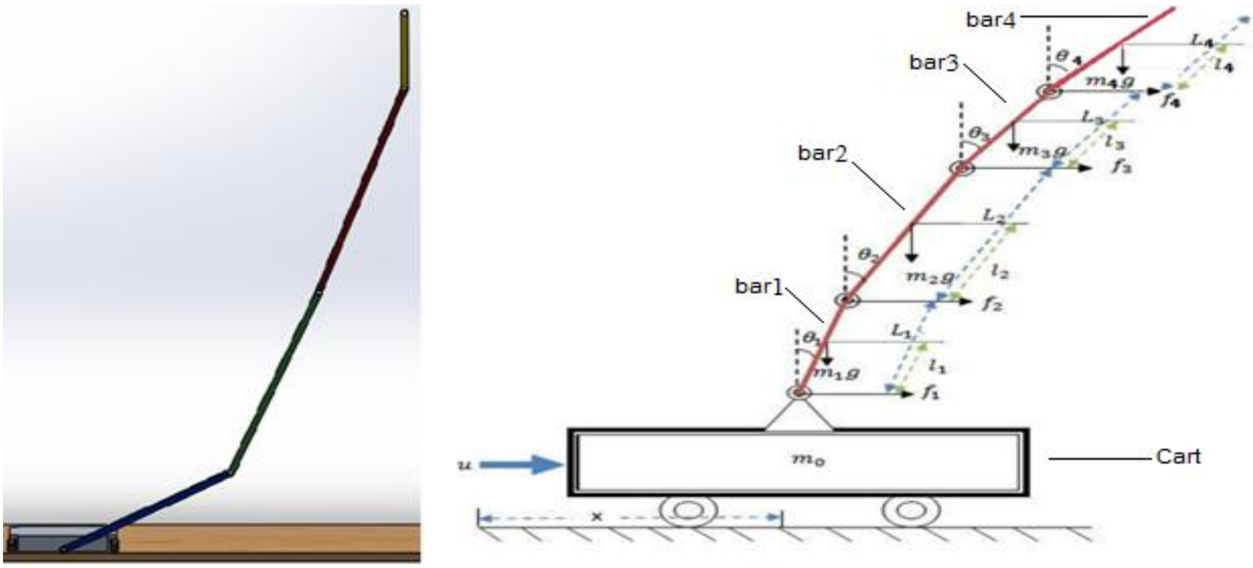
حيث يعبّر T عن الطاقة الحركية الكلية للنظام، بينما يعبّر U عن الطاقة الكامنة الكلية للنظام، وبعد حساب معامل لاغرانج يتم إيجاد معادلة كل متغير ضمن نظام ذي n درجة حرية ،موجود ضمن جملة إحداثيات عامة Generalized Coordinates وفق معادلة لاغرانج (تسمى في بعض المراجع Euler–Lagrange equation) الآتية [12]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = Q_i \qquad (2-3)$$

حيث Q_i القوة المطبقة ضمن درجة الحرية q_i والتي ستوافق متغيراً من متغيرات نموذج فضاء الحالة الذي سنحصل عليه في النهاية، و i=1..n [12].

2-1) بناء النموذج الرياضي للبندول المقلوب المكون من أربع قطع المحمول على عربة:

سيتم العمل في هذه الدراسة على بناء نموذج رياضي لبندول مقلوب مكون من أربع قطع ومحمول على عربة تتحرك على مستوٍ غير مائل not inclined كما هو موضح في الشكل (1–3)، وذلك باستخدام طريقة لاغرانج والبارامترات الموضحة في الشكل (1–3–أ) والجدول (1–3) والجدول (2–3)، مع العلم أن تسارع الجاذبية الأرضية Gravitational acceleration المُستخدَم في النموذج المصمَّم هو $g=9.81m/sec^2=981cm/sec^2$، وأن القيم المذكورة في الجدول (1–3) محسوبة باستخدام برنامج Solid Works 2017، حيث تم تشكيل النموذج الميكانيكي الموضح في الشكل (1–3–ب)، واختيار مواصفات المواد المكوّنة لهذا النموذج، وهذا يساعد على التحرّر من الاستعانة بنماذج سابقة ويفتح المجال لبناء النماذج الميكانيكية المطلوبة والحصول على مواصفاتها بسهولة [13].



(ب) (أ)

الشكل (1-3): البندول المقلوب المدروس.

الجدول (1-3): البارامترات الموافقة لأجزاء البندول المقلوب المدروس:

اسم الجزء	الكتلة [Kg]	الاحتكاك للعربة [N-s/cm] [N-cm-s/deg] للقطع	الطول [cm]	مركز العطالة [cm]	عزم العطالة [kg*cm^2]
Cart	m0=1.0154	b0=0			
bar1	m1=0.0804	b1=0	L1=45	l1= 24.1269	I1=12.6876
bar2	m2=0.0897	b2=0	L2=50	l2= 24.2274	I2=17.5811
bar3	m3=0.0989	b3=0	L3=55	l3= 26.7643	I3=23.5954
bar4	m4=0.0341	b4=0	L4=20	l4= 9.2358	I4=0.9847

الجدول (2-3): إحداثيات وزوايا أجزاء البندول المقلوب المدروس:

اسم الجزء	الزاوية [deg]	الإحداثيات على المحور X [cm]	الإحداثيات على المحور Y [cm]	القوة المؤثرة [N]
Cart		x	0	u
bar1	θ_1	x+l1*sin(θ_1)	l1*cos(θ_1)	f1
bar2	θ_2	x+L1*sin(θ_1)+l2*sin(θ_2)	L1*cos(θ_1)+l2*cos(θ_2)	f2
bar3	θ_3	x+L1*sin(θ_1)+L2*sin (θ_2)+l3*sin(θ_3)	L1*cos(θ_1)+L2*cos(θ_2)+l 3*cos(θ_3)	f3
bar4	θ_4	x+L1*sin(θ_1)+L2*sin (θ_2)+L3*sin(θ_3)+l4*sin(θ_4)	L1*cos(θ_1)+L2*cos(θ_2)+ L3*cos(θ_3)+l4*cos(θ_4)	f4

مع العلم أن القوة u مطبّقة من قِبل المتحكم، أما القوى f ستنتج عن تأثير حركة العربة على القطع الأربع.

سنستخدم قيم الجدول (2–3) لصياغة معادلات الطاقة الحركية والطاقة الكامنة لأجزاء البندول المدروس، وسنستخدم تسميات تتوافق مع محتوى الجدول، فمثلاً سنعبّر عن موقع العربة على المحور X بالتعبير $Cart_x$، بينما سنعبّر عن موقع القطعة رقم n على المحور Y بالتعبير $barn_Y$ وهكذا.

تتحرك العربة فقط على المحور X، لذلك نعبّر عن طاقتها الحركية وفق المعادلة الآتية:

$$KE_{cart} = \frac{1}{2}(m_0\dot{x}^2) \tag{3–3}$$

بينما تتحرك كل قطعة على كل من المحورين X و Y، لذلك يتم حساب السرعة للقطعة رقم n (لدينا أربع قطع) وفق مايلي:

$$V_n = \dot{barn}_X + \dot{barn}_Y \tag{4–3}$$

ويتم التعبير عن الطاقة الحركية لكل قطعة وفق المعادلة الآتية:

$$KE_{barn} = \frac{1}{2}(m_n V_n^2) + \frac{1}{2}(I\theta_n^2) \tag{5–3}$$

نظراً لكون العربة تتحرك على مستوٍ غير مائل، ستكون قيمة الطاقة الكامنة لها:

$$KP_{cart} = 0 \tag{6–3}$$

بينما تعطى قيمة الطاقة الكامنة لكل قطعة كما في المعادلة الآتية:

$$KP_{barn} = m_n * g * barn_Y \tag{7–3}$$

والآن أصبح بإمكاننا إيجاد معامل لاغرانج من خلال إيجاد الطاقة الحركية الكلّيّة والطاقة الكامنة الكلّيّة للبندول المدروس كما يلي:

$$T = KE = KE_{cart} + \sum_{1}^{n} KE_{barn} \tag{8–3}$$

$$U = KP = KP_{cart} + \sum_{1}^{n} KP_{barn} \tag{9–3}$$

وأصبح بإمكاننا التعويض في المعادلة (1–3) وإيجاد معامل لاغرانج L، وبعدها يمكن استخدام المعادلة (2–3) لإيجاد النموذج الرياضي اللاخطي للبندول المقلوب المدروس كما يلي [1]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = F - b_0\dot{x} \tag{10–3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = -b_1\dot{\theta}_1 \tag{11–3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) = -b_2\dot{\theta}_2 \tag{12–3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_3}\right) = -b_3\dot{\theta}_3 \tag{13–3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_4}\right) = -b_4\dot{\theta}_4 \tag{14–3}$$

تشكل مجموعة المعادلات (3−10) حتى (3−14) النموذج الرياضي اللاخطي للبندول المقلوب المدروس، ولأجل الحصول على نموذج فضاء الحالة يجب تقريب هذا النموذج إلى الشكل الخطي باستخدام التقريبات حول وضعية قطع شاقولية ونحو الأعلى باستخدام ما يلي [1,12]:

$$\mathrm{Sin}(\theta_n) = \theta_n,\ \mathrm{Cos}(\theta_n) = 1,\ \dot{\theta}_n^2 = 0$$

وباعتبار المصفوفة $qq=[\theta_1,d\theta_1,\theta_2,d\theta_2,\theta_3,d\theta_3,\theta_4,d\theta_4]$ تعبّر عن الحالات المرتبطة بزوايا القطع الأربعة، سنحصل على مجموعة الحدود التي تظهر ضمن المصفوفة qqq=qq'*qq ونجعل قيمها مساوية للصفر.

بعد تعويض التقريبات المذكورة في النموذج اللاخطي، وتعويض قيم الجدول (3−1)، نقوم بإعادة ترتيب المعادلات الناتجة لنحصل على المعادلتين (3−15) و(3−16) اللتين تشكلان نموذج فضاء الحالة الخطي للنظام المدروس بدلالة مصفوفة متغيرات الحالة $X'=[x,dx,\theta_1,d\theta_1,\theta_2,d\theta_2,\theta_3,d\theta_3,\theta_4,d\theta_4]$ كمايلي:

$$\dot{X} = A\,X + B\,u \qquad (15-3)$$

$$Y = C\,X + D\,u \qquad (16-3)$$

تم تنفيذ خطوات إيجاد النموذج الرياضي الخطي المذكور باستخدام MATLAB Symbolic Toolbox، وتمّ الحصول على محتوى المصفوفات A,B,C,D بشكل رموز، ثم قمنا بتعويض قيم الثوابت من الجدول (3−1)، وعلى سبيل المثال نذكر محتوى عنصر مصفوفة الرموز الموافقة للعنصر الواقع عند السطر الثاني والعمود الثالث من المصفوفة A كالآتي:

A(2,3)= l2*l3*l4*L1^2*m0*m2 + l1*l3*l4*L2^2*m0*m3 + l2*l3*l4*L1^2*m0*m3 + l2*l3*l4*L1^2*m1*m2 + l1*l2*l4*L3^2*m0*m4 + l1*l3*l4*L2^2*m0*m4 +l1*l3*l4*L2^2*m1*m3 + l2*l3*l4*L1^2*m0*m4 + l2*l3*l4*L1^2*m1*m3 + l1*l2*l4*L3^2*m1*m4 + l1*l3*l4*L2^2*m1*m4 + l1*l3*l4*L2^2*m2*m3 + l2*l3*l4*L1^2*m1*m4 + l1*l2*l4*L3^2*m2*m4 + l1*l3*l4*L2^2*m2*m4 + l1*l2*l4*L3^2*m3*m4 + l2*l3*l4*l1^2*m0*m1 + l1*l3*l4*l2^2*m0*m2 + l1*l2*l4*l3^2*m0*m3 + l1*l3*l4*l2^2*m1*m2 + l2*l3*l4*l1^2*m1*m2 + l1*l2*l3*l4^2*m0*m4 + l1*l2*l4*l3^2*m1*m3 + l2*l3*l4*l1^2*m1*m3 + l1*l2*l3*l4^2*m1*m4 + l1*l2*l4*l3^2*m2*m3 + l1*l3*l4*l2^2*m2*m3 + l2*l3*l4*l1^2*m1*m4

وبعد التعويض نحصل على المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.1367 & 0 & -0.5257 & 0 & 0.0765 & 0 & -0.0071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.123 & 0 & 0.8955 & 0 & -0.1302 & 0 & 0.012 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2139 & 0 & -1.6508 & 0 & 0.5679 & 0 & -0.0525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3443 & 0 & 1.1076 & 0 & -0.9538 & 0 & 0.1683 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4565 & 0 & -1.4686 & 0 & 2.4153 & 0 & -1.3737 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B'=[0 \quad 0.9656 \quad 0 \quad -0.0268 \quad 0 \quad 0.0061 \quad 0 \quad -0.0018 \quad 0 \quad 0.0023]$$

$$C=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$D=[0]$$

3-1) بناء متحكم LQR:

ليكن لدينا نظام خطي موصوف بالزمن المتقطع Discrete Time بالشكل الآتي:

$$X_{k+1} = AX_k + Bu_k \qquad (17-3)$$

له تابع كلفة Performance Index لأجل عدد عينات لانهائي يعطى كالآتي:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1}^T Q x_{k+1} + u_k^T R u_k \qquad (18-3)$$

يكون قانون التحكم الأمثل الذي يعطي أصغر قيمة لتابع الكلفة (3-18) وذلك لأجل setpoint=0 كالآتي [14]:

$$u_k = -Kx_k \qquad (19-3)$$

حيث يتم إيجاد المصفوفة K كالتالي [15,14]:

$$K = (R + B^T P B)^{-1} P^T S A \qquad (20-3)$$

والمصفوفة P هي مصفوفة وحيدة Semi Definite تحقق حل معادلة ريكاتي الجبرية في الزمن المتقطع discrete time algebraic Riccati equation (DARE) التي تُعطى كمايلي [15,14]:

$$A^T P A - P - (A^T P B)(R + B^T P B)^{-1}(B^T P A) + Q = 0 \qquad (21-3)$$

بالنسبة إلى المصفوفة Q، تم اختيارها كمصفوفة قطرية أبعادها nxn حيث n عدد متغيرات الحالة، وتم اختيار كل عنصر بحسب أهمية متغير الحالة الموافق له [15]، وفي النظام المدروس تُعدّ المسافة التي ستسيرها العربة وسرعة العربة المتغيرين الأهم، لذلك تم إعطاء العنصرين Q_{1x1} وQ_{2x2} أعلى قيمة، وتم اختيار باقي عناصر المصفوفة Q كالآتي:

Q=

10000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	7500	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	750	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	250	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	250	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	100	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	100	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	50	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	50	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	20

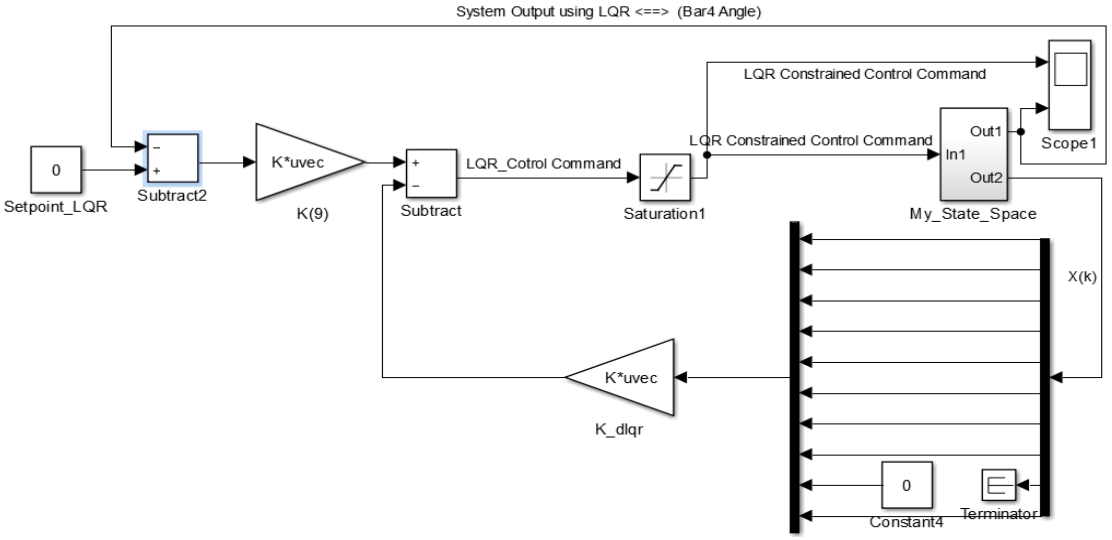
وللحصول على أمر تحكم (u) ذي قيمة صغيرة، نختار قيمة كبيرة للوزن R، ولذلك قمنا باختيار R=100.

تم استخدام MATLAB Simulink لبناء النموذج الموضح في الشكل (2−3) الذي تظهر فيه طريقة ربط المتحكم LQR مع النموذج الرياضي المُنفَّذ وطريقة استخدام البلوك Saturation لتحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لقيمة الدخل u (±u_limit)، ويظهر في الشكل (3−3) نموذج فضاء الحالة المبني يدوياً والذي تم استخدامه في هذا البحث، كما تم الاستعانة بالتعليمة الموجودة في برنامج MATLAB لتنفيذ خطوات إيجاد مصفوفة الربح K كالآتي:

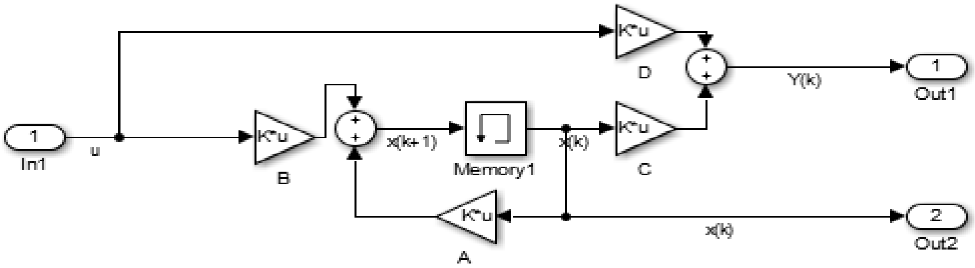
```
[K_dlqr,P_dlqr] = dlqr(A,B,Q,R);
```

وحصلنا على مصفوفة K الآتية (المصفوفة K مكونة من سطر واحد وعشرة أعمدة):

K=[0 2.43E−18 9.22E+1 −1.67E−9 −1.38E+2 4.34E−9 7.84E+1 ….
…. −4.09E−9 −2.03E+1 1.41E−9]



الشكل (2−3): طريقة ربط المتحكم LQR مع النموذج الرياضي المُنفَّذ.



الشكل (3-3): نموذج فضاء الحالة الموافق للبلوك My_State_Space المُستخدَم في الشكل (3-2).

(4-1) بناء متحكم OMPC [17]:

لدينا نظام خطي موصوف بالمعادلة (3-17) وله تابع الكلفة الموصوف بالمعادلة (3-18)، تعمل خوارزمية LQR على إيجاد مجموعة قيم أوامر التحكم التي تعطي أصغر قيمة لتابع الكلفة لأداء النظام المدروس بالاعتماد على المصفوفة K التي تم إيجادها سابقاً، وهنا يمكن القول: ما الفائدة من استخدام التحكم التنبؤي طالما أننا استطعنا الحصول على هذه القيم؟، والجواب هو أن التحكم التنبؤي يعطي أداءً يتفوق على الأداء الذي نحصل عليه باستخدام خوارزمية LQR عند الحاجة لمراعاة القيود، وهو تماماً ما سنعرضه في أثناء مناقشة النتائج [17].

من خوارزمية LQR، يمكن القول إنه إذا كان لدينا نظام موصوف بالمعادلة (3-17) يكون قانون التحكم الأمثل وفق المعادلة (3-19)، فإذا عوضنا المعادلة (3-19) ضمن المعادلة (3-17) سنحصل على الآتي:

$$x_{k+1} = [A - BK]x_k = \Phi x_k \qquad (22-3)$$

وبطريقة مشابهة يمكن الحصول على شعاع القيم التي يتم التنبؤ بها لأجل متغيرات حالة النظام، وكذلك أوامر التحكم التي توافق أصغر قيمة لتابع الكلفة كالآتي:

$$\underset{\rightarrow}{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi x_k \\ \Phi^2 x_k \\ \vdots \\ \Phi^n x_k \\ \vdots \end{bmatrix} = P_x x_k; \quad \underset{\rightarrow}{u}_k = \begin{bmatrix} -Kx_k \\ -K\Phi x_k \\ \vdots \\ -K\Phi^{n-1} x_k \\ \vdots \end{bmatrix} = P_u x_k; \qquad (23-3)$$

حيث $\underset{\rightarrow}{x}_{k+1}$ شعاع القيم المستقبلية لمتغيرات حالة النظام ابتداءً من العينة k+1، و $\underset{\rightarrow}{u}_k$ شعاع القيم المستقبلية لأمر التحكم ابتداءً من العينة k، ومن هذه المعادلة نلاحظ أنه لا توجد أية مرونة في القيم المستقبلية، حيث إن المصفوفتَين P_u و P_x ثابتتَان ومعروفتَان، وهنا يأتي دور التحكم التنبؤي في تحسين اختيار أمر التحكم وبالتالي تحسين الأداء الذي نحصل عليه باستخدام خوارزمية LQR.

تقوم خوارزمية التحكم التنبؤي بتحسين الأداء من خلال إضافة تعديلات على قيمة أمر التحكم، الذي تقدمه خوارزمية LQR، حيث يمكن اعتبار هذه التعديلات درجة حرية Degree of freedom تساعد على الحصول على أمر تحكم معدّل ضمن أول n_c خطوة كما في المعادلة الآتية:

$$\begin{aligned} &\{x_{k+1} = \Phi x_k + Bc_k; \quad u_k = -Kx_k + c_k\} \quad &;k \le n_c \\ &\{x_{k+1} = \Phi x_k; \quad u_k = -Kx_k\} \quad &;k > n_c \end{aligned} \qquad (24-3)$$

باختصار، يمكن القول إن المعادلة (3–24) تصف عمل خوارزمية Optimal Model Predictive Control (OMPC)، حيث إنها تعتمد على إيجاد المصفوفة K التي تمنحنا إياها خوارزمية LQR، ثمّ تقوم بإضافة قيم c_k لأجل أول n_c عينة، حيث يتم اختيار القيم c_k من خلال إيجاد الحل الأمثل الذي يعطي أصغر قيمة لتابع الكلفة الموضح في المعادلة (3–18) بالنسبة إلى القيم c_k، وليصبح تابع الكلفة المُستخدَم بالشكل الآتي:

$$\min_{\underset{\rightarrow}{c}_k} \quad J = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1}^T Q x_{k+1} + u_k^T R u_k = \alpha(x) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^T S c_k \qquad (25\text{–}3)$$

يمكن كنوع من ترتيب المصفوفات، دمج المعادلات المعبّرة عن الوضعين (المعادلة (3–24)) لنحصل على نمط واحد موسع كما يلي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \underset{\rightarrow}{c}_{k+1} \end{bmatrix}}_{Z_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & I & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\Psi} \begin{bmatrix} x_k \\ \underset{\rightarrow}{c}_k \end{bmatrix}; Z_{k+1} = \Psi Z_k \qquad (26\text{–}3)$$

$$u_k = [-K, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}] \begin{bmatrix} x_k \\ \underset{\rightarrow}{c}_k \end{bmatrix}; u_k = -K_z Z_k \qquad (27\text{–}3)$$

مع العلم أنه يمكن استعادة كل من x_k و $\underset{\rightarrow}{c}_k$ و u_k وفق ما يلي [17]:

$$x_k = [I, 0] \begin{bmatrix} x_k \\ \underset{\rightarrow}{c}_k \end{bmatrix} = \Gamma Z_k \qquad (28\text{–}3)$$

$$\underset{\rightarrow}{c}_k = [0, I] \begin{bmatrix} x_k \\ \underset{\rightarrow}{c}_k \end{bmatrix} = \Gamma_c Z_k \qquad (29\text{–}3)$$

$$u_k = -K_z Z_k \qquad (30\text{–}3)$$

والآن سنقوم بكتابة المعادلة (3–25) بدلالة الشعاع $\underset{\rightarrow}{c}_k$ حيث:

$$\underset{\rightarrow}{c}_k = \begin{bmatrix} c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_{k+n_c-1} \end{bmatrix}; c_{k+n_c+i} = 0, i \geq 0 \qquad (31\text{–}3)$$

لذلك سنعوض المعادلات (3–28) و(3–29) و(3–30) ضمن المعادلة (3–25) وسنحصل على ما يلي:

$$\min_{\underset{\rightarrow}{c}_k} \quad J = \sum_{k=0}^{\infty} Z_{k+1}^T \Gamma^T Q \Gamma Z_{k+1} + Z_k^T K_z^T R K_z Z_k \qquad (32\text{–}3)$$

وبتعويض z_{k+1} من المعادلة (3–26) و u_k من المعادلة (3–27) ضمن المعادلة (3–32) سنحصل على مايلي:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k^T (\Psi^T \Gamma^T Q \Gamma \Psi + K_z^T R K_z) Z_k \quad (33-3)$$

ومن المعادلة (26–3) نستطيع القول إن [17]:

$$Z_{k+n} = \Psi^n Z_k \quad (34-3)$$

وبالتالي نستطيع إعادة كتابة المعادلة (33–3) بدلالة الحالة الابتدائية Z_0 كالآتي:

$$J = Z_o^T \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\Psi^k)^T (\Psi^T \Gamma^T Q \Gamma \Psi + K_z^T R K_z) \Psi^k \right\} Z_0 \quad (35-3)$$

ونلاحظ هنا أن هذه المعادلة تشبه معادلة ليابونوف الآتية:

$$A^T S A = \sum_{i=1}^{\infty} (A^i)^T Q A^i = S - Q \quad (36-3)$$

التي يمكن استخدامها لإيجاد مجموع سلسلة متقاربة convergent عدد عناصرها لانهائي، ليصبح شكل المعادلة (35–3) بالترتيب الآتي [17]:

$$J = \underbrace{Z_o^T \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\Psi^k)^T \underbrace{(\Psi^T \Gamma^T Q \Gamma \Psi + K_z^T R K_z)}_{W} \Psi^k \right\}}_{S} Z_0 \quad (37-3)$$

والآن نستطيع صياغة معادلة ليابونوف كالآتي:

$$\Psi^T S \Psi = S - W \quad (38-3)$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى المتغير S (باستخدام التابع $dlyap(\Psi, W)$ المتاح في بيئة MATLAB) سنحصل على قيمة S، والآن أصبح بإمكاننا صياغة تابع الكلفة بدلالة الشعاع $\underset{\rightarrow}{c}_k$ (المعادلة (25–3)) كما يلي:

$$J = \begin{bmatrix} x_k \\ \underset{\rightarrow}{c}_k \end{bmatrix}^T S \begin{bmatrix} x_k \\ \underset{\rightarrow}{c}_k \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_x & S_{xc} \\ S_{xc}^T & S_c \end{bmatrix} \quad (39-3)$$

$$J = x_k^T S_x x_k + 2 x_k^T S_{xc} \underset{\rightarrow}{c}_k + \underset{\rightarrow}{c}_k^T S_c \underset{\rightarrow}{c}_k$$

لإيجاد قيمة الشعاع $\underset{\rightarrow}{c}_k$ من المعادلة (39–3) يجب حل المعادلة الآتية:

$$\frac{dJ}{d\underset{\rightarrow}{c}_k} = 2 S_c \underset{\rightarrow}{c}_k + 2 S_{xc}^T x_k = 0 \quad (40-3)$$

وبذلك تكون قيمة الشعاع $\underset{\rightarrow}{c}_k$ المطلوبة:

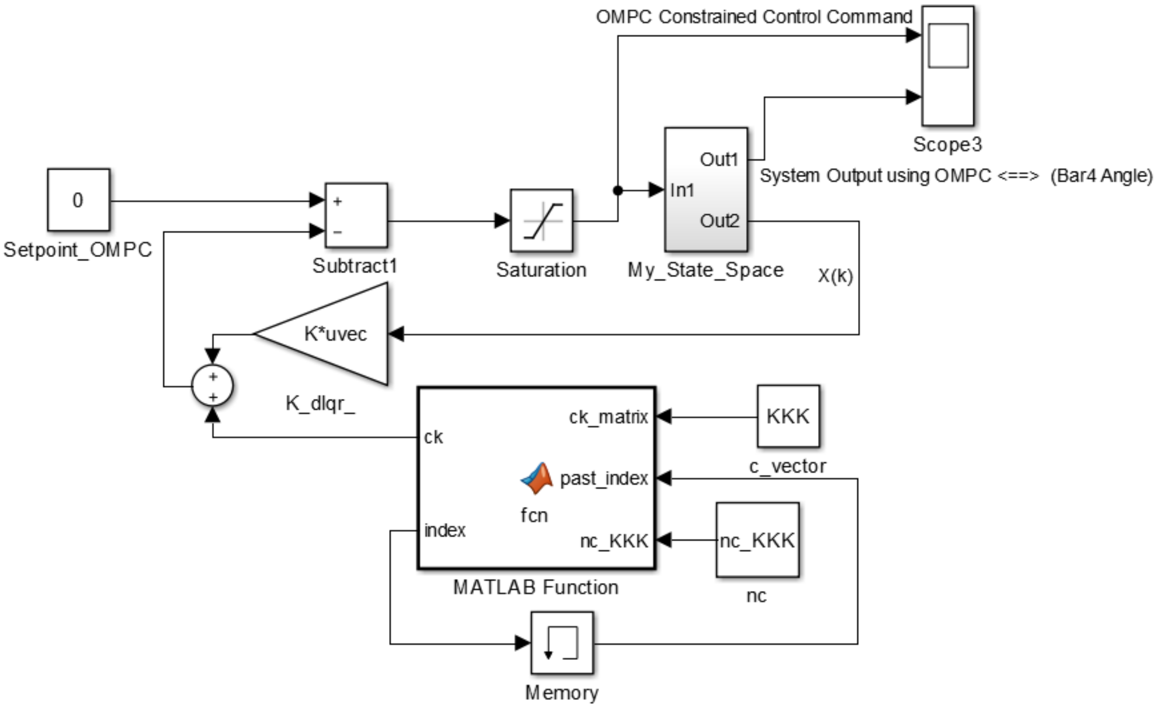
$$\underset{\rightarrow}{c}_k = -[S_c]^{-1} S_{xc}^T x_k \quad (41-3)$$

ملاحظة1: يمكن زيادة قيم عناصر الشعاع $\underset{\rightarrow}{c}_k$ من خلال إعطاء وزن c_cost أصغر من الواحد للمصفوفة Ψ عند حل معادلة ليابونوف (المعادلة (38–3)) حيث يتم الحل بدلالة Ψ والوزن c_cost باستخدام التابع $dlyap(c\_cost * \Psi, W)$، وهذا يوافق تصغير أثر زيادة قيم عناصر الشعاع $\underset{\rightarrow}{c}_k$ على المجموع الكلي لتابع الكلفة.

ملاحظة2: إن استخدام قيم c_cost أكبر من الواحد يوافق تكبير أثر زيادة قيم عناصر الشعاع $\underset{\rightarrow}{c}_k$ على المجموع الكلي لتابع الكلفة، وبالتالي الحصول على قيم أصغر لعناصر الشعاع $\underset{\rightarrow}{c}_k$ تكون ذات تأثير مهمل في تحسين الأداء.

تم استخدام MATLAB Simulink لبناء النموذج الموضح في الشكل (4-3) الذي يظهر فيه طريقة ربط متحكم OMPC مع النموذج الرياضي المُنفَّذ، كما يوضح المقطع البرمجي الذي يليه محتوى التابع المُستخدم ضمن الشكل (4-3)، وهو باختصار يعطي قيم الشعاع $\underline{c}_k$ التي سيتم إضافتها إلى أمر التحكم طالما أن رقم العينة أصغر أو يساوي n_c، وسيعطي القيمة صفر عندما يكون رقم العينة أكبر من n_c.

```
function [ck,index] = fcn(ck_matrix,past_index,nc_KKK)
if (past_index<=nc_KKK)
index=past_index+1;
ck=ck_matrix(past_index);
else
ck=0;
index=100000;%A value larger than nc_KKK
end
```



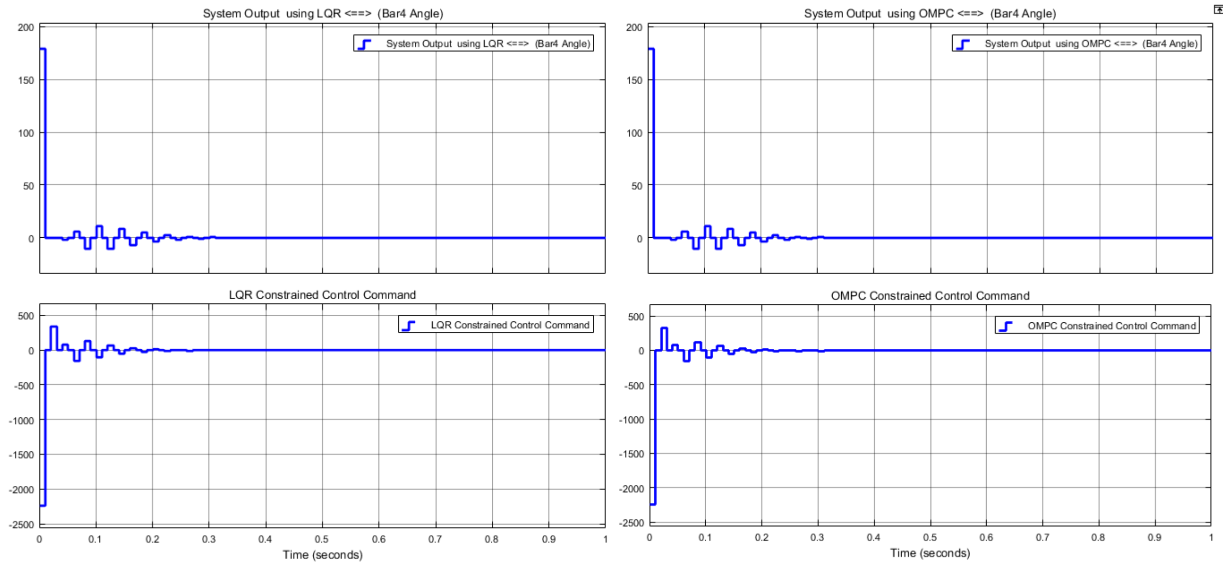
الشكل (4-3): ربط متحكم OMPC مع النموذج الرياضي المُنفَّذ

النتائج والمناقشة:

قمنا بعرض النتائج من خلال تنفيذ مجموعة متتالية من التجارب تم تلخيص نتائجها ضمن الجدول (4-1)، حيث عملنا على توضيح أثر تغيير كل من الوزن c_cost وعدد العينات التي حدث التحسين ضمنها n_c والحد الأعظمي المسموح لقيم الدخل ±u_limit، و قمنا بعرض الخرج وأوامر التحكم وقيم الشعاع $\underline{c}_k$ التي نحصل عليها في كل تجربة، مع العلم أن زمن أخذ العينات المُستخدَم T_s=0.01sec وأن الحالة الابتدائية المُستخدَمة هي حالة سكون للعربة وزاوية جميع القطع تساوي 180° أي أن القطع في الوضعية الشاقولية للأسفل.

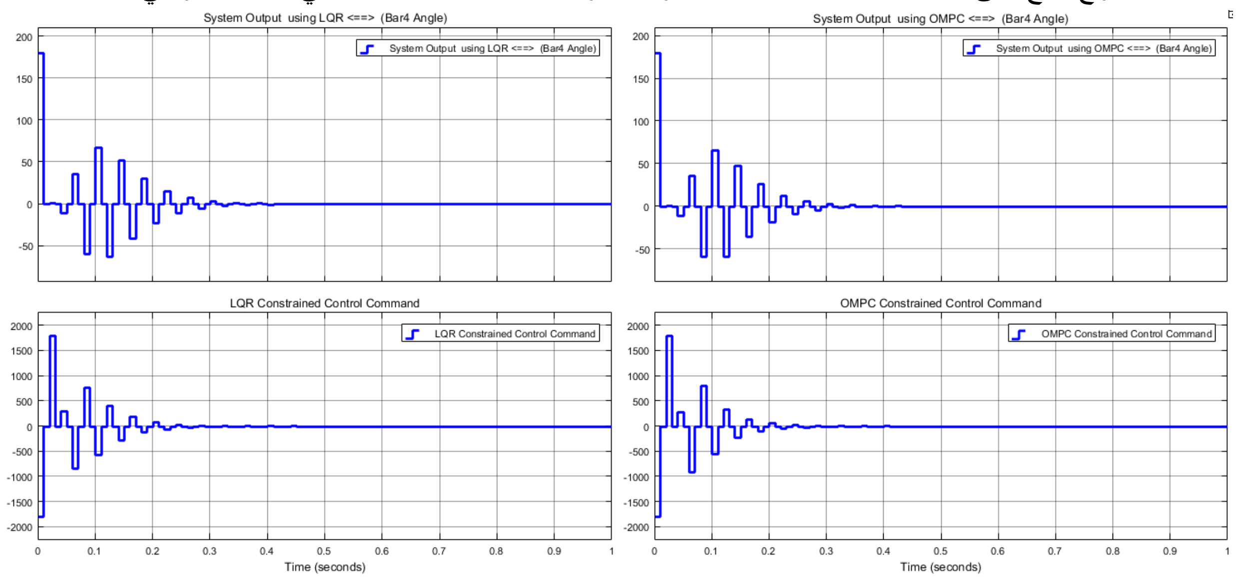
الجدول (1−4): ملخص التجارب:

رقم التجربة	c_cost	n_c	u_limit	رقم الشكل الموافق	ملاحظات
1	1	8	5000±	(1−4)	OMPC لا يقدّم تحسيناً يُذكر
	$\underline{c}_k=$ [0 6.02E−17 −0.00378 7.29E−10 …. …. 0.006951 −1.26E−09 −0.00549 0]				
2	1	8	±1800	(1−4)	OMPC لا يقدّم تحسيناً يُذكر
	$\underline{c}_k$ 0 6.02E−17 −0.00378 7.29E−10 …. .. 0.006951 -1.26E−09 −0.00549 0]				
3	1	10	±1800	(1−4)	OMPC لا يقدّم تحسيناً يُذكر
	$\underline{c}_k$ 0 6.02E−17 -0.0037 .29E−10 .0069 …. .. -1.26E−09 -0.0054 .43E−10 .0016 −2.46E−10]				
4	1	6	±1800	(1−4)	OMPC لا يقدّم تحسيناً يُذكر
	$\underline{c}_k$ 0 .02E−17 -0.0037 .29E−10 .00695 −1.26E−09]				
5	0.9		±1800	(2−4)	OMPC يقدّم تحسيناً
	$\underline{c}_k$ 0 .02E−17 -10.865 .19E−10 2.2647 −1.24E−09]				
6	0.5	6	±1800	(3−4)	أفضل تحسين يقدمه OMPC
	$\underline{c}_k$ 0 .02E−17 -80.0701 .85E−10 24.95 −1.20E−09]				
7	0.4	6	±1800	(3−4)	لا يوجد تعديل يُذكر
	$\underline{c}_k$ 0 6.02E−17 -88.098 .21E−10 35.91 −1.25E−09]				
8	0.4	8	±1800	(3−4)	لا يوجد تعديل يُذكر
	$\underline{c}_k$ 0 .02E−17 -88.941 7.27E−10 37.075 …. …. -1.26E−09 -78.204 8.41E−10]				
9	0.4	5	±1800	(3−4)	لا يوجد تعديل يُذكر
	$\underline{c}_k=$ [0 6.02E−17 −88.098 7.46E−10 135.9128]				



الشكل (1−4): أوامر التحكم والخرج الموافقين للتجارب 1،2،3،4.

نلاحظ في الأشكال (4−1) (4−2) (4−3) قدرة المتحكمين LQR و OMPC على موازنة أجزاء البندول المقلوب المكون من أربع قطع على الوضعية الشاقولية ابتداءً من زاوية قدرها 180°، لكن الاختلاف في الأداء ظهر في

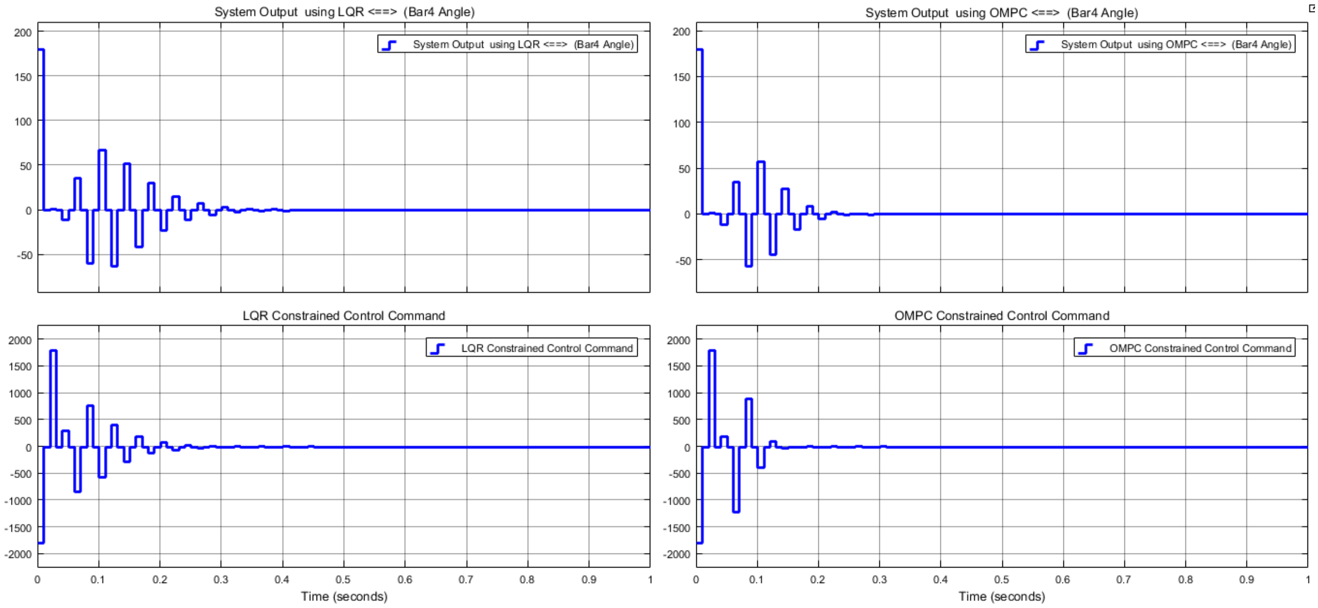


الشكل (2−4): أوامر التحكم والخرج الموافقين للتجربة 5.

مقدار الزمن اللازم لبلوغ حالة الاستقرار، حيث نشاهد في الشكل (4−1) تساوي هذا الزمن عند عدم وضع قيود على قيمة أمر التحكم أو إعطاء مجال كبير لقيمة أمر التحكم، وبعدها نرى في الشكل (4−2) قدرة متحكم OMPC على بلوغ حالة الاستقرار قبل متحكم LQR بفارق زمني بسيط، عند تطبيق قيد على قيمة أمر التحكم $-1800<u<1800$ ومعامل كلفة c_cost=0.9، وبعدها نلاحظ في الشكل (4−3) قدرة متحكم OMPC على بلوغ حالة الاستقرار بزمن أقل بمقدار 25% مما يحتاجه متحكم LQR عند تطبيق قيد على قيمة أمر التحكم $-1800<u<1800$ ومعامل كلفة $c\_cost \leq 0.5$.

الاستنتاجات والتوصيات:

1) إن كلا المتحكمين LQR و OMPC يستطيعان الحصول على قيم لأوامر التحكم، تؤدي للوصول إلى الوضعية الشاقولية لأجزاء البندول المقلوب المدروس ابتداءً من زاوية مقدارها 180°.



الشكل (3-4): أوامر التحكم والخرج الموافقين للتجارب 6،7،8،9.

2) اختصرت خوارزمية OMPC في التجربة رقم 6 (من الجدول (1-4)) زمن الوصول لحالة الاستقرار بمقدار يتجاوز 25% مقارنةً بخوارزمية LQR.

3) تقدم خوارزمية OMPC حلاً وسطياً يجمع بين التنبؤ ضمن مجال زمني محدود الذي توفره لنا خوارزمية التنبؤ العامة GPC، والأداء الأمثلي الذي توفره خوارزمية LQR في المنطقة التي تلي الوصول إلى حالة الاستقرار.

4) تقدّم خوارزمية OMPC تحسيناً على أداء خوارزمية LQR عند وجود قيود على قيم متغيرات النظام، وفي حالتنا ناقشنا وجود قيود على قيم أمر التحكم المقدَّم للنظام.

المراجع:

[1] Bandari, N., Hooshiar, A., Masoudrazban ,Javaddargahi ,Chun-Yi Su , "*Stabilization of Double Inverted Pendulum on Cart: LQR Approach*", International Journal of Management and Applied Science (IJMAS), pp. 149-153, Volume-5,Issue-2, 2017.

[2] Khalid, J., Nasir, A, Shami, U., Baig, A., "*Using Denoising Autoencoders to Predict Behavior of an Inverted Pendulum on a Cart System*", University of Engineering and Technology Taxila, Technical Journal, Taxila, 22.1 : 30-40, 2017.

[3] Prasad, L.B., Tyagi, B., Gupta, H.O., "*Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and with Disturbance Input*", International Journal of Automation and Computing, v.11 n.6, p.661-670, December 2014.

[4] Mishra, S.K., Chandra, D., "*Stabilization and Tracking Control of Inverted Pendulum Using Fractional Order PID Controllers*", Journal of Engineering, vol. 2014.

[5] Kharola, A., "*A PID based anfis and fuzzy control of inverted pendulum on inclined plane (IPIP)*", 9. 616-636, 2016.
[6] Kouchaki, Sina, "*Stabilization of an Inverted Pendulum with 2 Degrees of Freedom, using a Five Bar Linkage Mechanism*", M.S., Engineering Sciences (Mechanical Engineering) UC San Diego Thesis, UC San Diego Electronic Theses and Dissertations Series, 2017.
[7] Wen, J., Shi, Y., Lu, X., "*Stabilizing a Rotary Inverted Pendulum Based on Logarithmic Lyapunov Function*", Journal of Control Science and Engineering, vol. 2017, Article ID 4091302, 11 pages, 2017.
[8] Hassanzadeh, I., Mobayen, S., "*PSO-Based Controller Design for Rotary Inverted Pendulum System*", Journal of Applied Sciences, 8: 2907-2912, 2008.
[9] Hassanzadeh, I., Mobayen, S., "*Controller Design for Rotary Inverted Pendulum System Using Evolutionary Algorithms*", Mathematical Problems in Engineering, vol. 2011, Article ID 572424, 17 pages, 2011.
[10] Alt, B., Hartung, C., Svaricek, F., "*Robust fuzzy cascade control revised: Application to the rotary inverted pendulum*", 2011 19th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED), Corfu, pp. 1472-1477, 2011.
[11] KUMAR, R., SINGH, R.B., DAS, J., "*MODELING AND SIMULATION OF INVERTED PENDULUM SYSTEM USING MATLAB: OVERVIEW*", International Journal of Mechanical and Production Engineering, Volume- 1, Issue- 4, Oct-2013.
[12] Callafon, R.A., "*Lagrange's Method Application to the Vibration Analysis of a Flexible Structure*", La Jolla: University of California, San Diego, 2008.
[13] Shih, R., "*Learning SOLIDWORKS 2016*", SDC Publications, ISBN 158503990X, 9781585039906, 2015.
[14] "*Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists 2018*"", Vol I IMECS 2018, March 14-16, 2018, Hong Kong.
[15] Kwakernaak, Huibert, Sivan, Raphael, "*Linear Optimal Control Systems, First Edition*", Wiley-Interscience, ISBN 0-471-51110-2, 1972.
[16] Sontag, Eduardo, "*Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems, Second Edition*", Springer. ISBN 0-387-98489-5,1998.
[17] Rossiter, J.A., "*A First Course in Predictive Control, Second Edition*", CRC Press, 2018.