مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٤) العدد (٥) 2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (4) No. (5) 2020

التّحويل الإسقاطي والتّشوه في فضاء ريمان

د.عائدة صائمة*

أ.دمحسن شيحة **

د.عصام ديبان***

رنا محمد****

(تاريخ الإيداع ٢/٧/٢٠٢٠. قُبِل للنشر في ٢١/ ١٠ /٢٠٢٠)

□ ملخّص □

ملخّص البحث:

نورد تعريف التّحويل الإسقاطي في فضاء ريمان،ثم ندرس التّحويل الإسقاطي (السطح الكروي S^n) و التّطبيق الجيوديزي للسّطح الدّوراني والسّطوح الدّورانية البسيطة التي تعرّف تشوّه جيوديزي أملس. ثم ندرس التّطبيقات الجيوديزية الشّاملة لمجّسمات القطع النّاقص.

الكلمات المفتاحية: تحويل إسقاطي– تشوّه جيوديزي.

---

*أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم _ جامعة طرطوس _ طرطوس _ سوريا

**أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم _ جامعة البعث _ حمص _ سوريا

*** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم _ جامعة البعث _ حمص _ سوريا

****طالبة ماجستير –قسم الرياضيات–جامعة طرطوس–طرطوس–سوريا

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٤) العدد (٥) 2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (4) No. (5) 2020

Projective Transformatin And Deformation Of a Riemannian Space

Dr.A'aeda Sa'ema*
PDr.Mohsen Sheha**
Dr. Esam Deban***
Rana Mohammad****

(Received 2 /7 /2020. Accepted 21/ 10 /2020)

□**ABSTRACT** □

We show definition of a projective transformation of a Riemannian Space V_n , then we study a projective transformation of n- Sphere (S^n) and geodesic mapping of a Surface revolution and Simple Surfaces of a revolution which define a smooth geodesic deformation.Then we study a global geodesic mapping of ellipsoids.

KeyWords: ProjectiveTransformations – Geodesic Deformation.

*Dr in Math Department _ Facutly of Sciences_ Tartous University _Tartous _ Syria
** Pro in Math Department _ Facutly of Sciences_ Al Baath University _Homs _ Syria
*** Dr in Math Department _ Facutly of Sciences_ Al Baath University _Homs _ Syria
****Higher Student (Master) _ in MathDepartment _ Tartous University _Tartous _ Syria

هدف البحث:

يهدف هذا البحث إلى:

1) دراسة التّحويل الإسقاطي لسطح الكرة.

2) تحديد السّطوح الدّورانيّة البسيطة التي تعرّف تشوّهاً جيوديزياً أملساً.

3) دراسة التّطبيقات الجيوديزية الشّاملة لمجسّمات القطع النّاقص.

مقدّمة البحث:

تمّت دراسة التّحويلات الإسقاطية من قبل العديد من الباحثين [15,6,4,22,21] ، كما وتمّت دراسة التّحويلات الإسقاطية غير المبتذلة.

نتابع في هذا البحث دراسة التّحويل الإسقاطي لسطح الكرة ودراسة التّطبيقات الجيوديزية الشّاملة لمجسّمات القطع النّاقص.

كما تمّت دراسة التشوّه الجيوديزي من قبل العديد من الباحثين. [1,2,3]

نتابع في هذا البحث دراسة تحديد السّطوح الدّورانية التي تعرّف تشوّهاً جيوديزياً أملساً.

كما تمّت دراسة التّطبيقات الجيوديزية من قبل العديد من الباحثين[7,20,11]

وباستخدام طرائق قياس (المترك) وغيرها تحدّد فضاءات ريمان التي تطبّق جيوديزيّاً بشكل شامل.

طرائق ومنهجية البحث:

اعتمدنا في دراسة هذا البحث منهجية علمية بحثية تفتح مجال لدراسة فرع جديد خاص من فروع الرياضيات، وقد استخدمنا التنسورات وتطبيقاتها في الفضاءات الريمانية.

1 . التّحويل الإسقاطي و التّشويه للسّطوح:

يدعى تحويل فضاء ريمان V_{n} الذي ينقل الخطوط الجيوديزيّة إلى خطوط جيوديزيّة تحويلاً إسقاطيّاً. ويدعى التّحويل الإسقاطي الذي ليس أفيّني تحويلاً إسقاطيّاً غير مبتذل.

لقد درست المسألة الأساسيّة في نظريّة التّحويل الإسقاطي في الأعمال [6,15,4,20,21].

أُسسّت العديد من فضاءات ريمان التي خطوطها الجيوديزيّة غير مبتذلة و تحويلاتها الإسقاطية غير مبتذلة [1,2,3].

كما نعلم أنّه لا يوجد أمثلة على التّحويلات الإسقاطيّة غير المبتذلة لفضاءات ريمان.

سنبني مثالاً لتحويل إسقاطي غير مبتذل لسطح كروي من البعد ***n***.

1.1 . التّحويل الإسقاطي لكرة بـ *n* بعد:

ليكن $\mathrm{n} \geq 2$ ، $\mathrm{S_n} \in \mathrm{E_{n+1}}$ كرة بـ n − بعد نصف قطرها $R > 0$ (التي نقول عنها فضاء ريمان بـ *n*− بعد و تقّوس ثابت)

$$\mathrm{S_n}: {x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_{n+1}}^2 = \mathrm{R}^2$$

حيث $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ الإحداثيّات الدّيكارتية المتعامدة في الفضاء الإقليدي $E_{\mathrm{n+1}}$ لنأخذ التّمثيل الوسيطي التّالي للكرة $\mathrm{S_n}$:

$$x_{n+1} = R\sin w$$

حيث $w \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ يمثل عامل خط العرض و u_i الإحداثيّات الكروية على كرة الواحدة الأساسيّة .

$$S^{n-1} = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid {u_1}^2 + {u_2}^2 + \dots + {u_n}^2 = 1\} \qquad (2)$$

تدعى المنحنيات على S_n الموافقة لـ $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ثابتة خطوط الطّول، وتدعى النّقاط الموافقة للإحداثيات $(0,0,\dots,0,-R), (0,0,\dots,R)$ أقطاب السّطح الكروي S_n ، ويدعى تقاطع السّطح الكروي مع الخط $x^{n+1} = 0$ خط الإستواء.

واضح أنّ الخطوط الجيوديزية في S_n هي الدّوائر العظمى في S_n (إنّ القسم الرّئيس الذي يقطع الكرة بمستويين يمرّان من نقطة الأصل (المركز) $(0,0,\dots,0)$ مركز الكرة).

يعرّف التّحويل بوسيط واحد

$$\pi_t : S_n \to S_n$$

كما يلي:

١. النّقاط M_t , M مطابقة لبعضها البعض والواقعة على خطّ طول واحد.

٢. خطوط العرض w_t من M_t ناتجة من خطوط العرض w من M وفقاً للصّيغة

$$\cot w_t = e^t \cot w \quad , \quad w \neq 0 \qquad (3)$$
$$w_t = 0 \quad , \quad w = 0$$

$t \epsilon R$ وسيط التّحويل π_t

$$w_t = \begin{cases} arctg\,(e^t \cot w) - \pi & ; w \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ 0 & ; w = 0 \\ arctg\,(e^t \cot w) & ; w \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

بملاحظة أنّ $\pi_t : S_n \to S_n$ يحافظ على ثبات نقاط خطّ الاستواء والأقطاب نتحقق أنّه تحويل مستمر لـ S_n.

حيث المعامل t هو معامل طبيعي وهو واحد من مجموعة معاملات التّحويل الإسقاطي π_t

(تأخذ القيمة $b\,\pi_0 = id$ ، $\pi_t \circ \pi_\tau = \pi_{t+\tau}$)

مبرهنة (1):

التّحويل π_t هو تحويل إسقاطي غير مبتذل.

الإثبات:

يكفي إثبات أنّ π_t ينقل الجزء الرئيس في S_n (أي دائرة عظمى) إلى جزء رئيس.

1. من الواضح أنّ القسم الرّئيس لـ S_n محتوى في خط الإستواء يبقى ثابتاً من قبل التّحويل π_t.

2. الجزء الذي يمرّ بالأقطاب هي أقواس خطوط الطّول وهي أيضاً تبقى ثابتة استناداً إلى خاصّية التّحويل π_t.

3. بدون فقدان العموميّة يمكننا أن نعتبر أنّ نقطة تقاطع سطح الكرة مع مستويين ϱ يحتويان المحور ox^1 (فصلهما المشترك ox^1):

$$x^a = k^a x^{n+1} \quad , \quad a \in \{2, \dots, n\}$$

حيث $k^a \equiv 0$ ثابت.

يمكن بسهولة التّحقق من أنّ الدّائرة $S = \varrho \cap S_n$ تنقل بواسطة التّحويل π_t إلى دائرة $S_t \subset \varrho_t$ حيث ϱ_t مستويين معطيين وفق

$$x^a = e^t k^a x^{n+1} \quad , \quad a \in \{2, \dots, n\}$$

في الحقيقة لتكن: $M(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S_n$ نقطة مطابقة للنّقطة $M_t \in S_n$; $M_t(x_t^1, \dots, x_t^{n+1})$ عندئذٍ يكون التّطابق في الإحداثيّات لهاتين النّقطتين متزامناً.

نرمّز w, w_t لخطوط العرض من M و M_t وبحسب العلاقات (1) نحصل على:

$$x^i = Ru^i \cos w \quad , \quad x^{n+1} = R \sin w$$
$$x_t^i = Ru^i \cos w_t \quad , \quad x_t^{n+1} = R \sin w_t$$

تكون النّقطة M غير واقعة على خط الإستواء على الدّائرة $S = \varrho \cap S_n$ إذا وفقط إذا كان

$$k^a = u^a \, ctg\, w \qquad (w \neq 0)$$

بالاستناد إلى (3) يمكننا كتابة المساواة الأخيرة بالشّكل $e^t k^a = u^a \cot w_t$ وهذا يدلّ أنّ $M_t \in \varrho_t$، لذلك $M_t \in \varrho_t \cap S_n = S_t$.

بقي أن نأخذ الحالة عندما $M \in S = \varrho \cap S_n$ بالوقت نفسه واقعة على خط الإستواء، وحيث تكون النّقاط على خط الإستواء ثابتة وفق π_t فنحصل بالنّتيجة على $M = M_t$.

يمكننا بسهولة أن نتأكّد أنّ هذه الشّروط محققة فقط من أجل النقاط القطبية، أي النّقاط ذات الإحداثيّات $(\pm R, 0, 0, \dots, 0)$، عندئذٍ النّقاط $M \equiv M_t$ على كامل المستويين ϱ_t. وعندئذٍ من أجل $t \neq 0$ ، π_t لا يحافظ على التّمثيل الوسيطي الطّبيعي وهو ليس أفيّنيّاً. ومن هنا هو تحويل إسقاطي غير مبتذل.

بعبارة أخرى تطبيق الدّوائر العظمى لـ S_n . (يمثل الجزء الرئيس لسطح الكرة بـ n− بعد)ينقلها إلى دوائر عظمى.

بملاحظة أنّه تمّ بناء π_t وفقاً لتحويلٍ إمّا ايزومتري أو توافقي أو أفيّني و أيضاً تطبيق جيوديزي غير مبتذل.

بسهولة يظهر أن حقل المتّجهات الأساسي $\xi(\xi^h(x))$ لمجموعة التّحويلات الإسقاطيّة π_t على سطح الكرة S_n هي

$$\xi = R^2 \cos 2w \quad , \quad w \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

هذا و أنّ:

$$\xi^h(x) = g^{hi}(x) \nabla_i \xi$$

في الأقطاب، بالإضافة لخطّ الإستواء يأخذ المتّجه $\xi^h(x)$ القيمة صفر، بينما تكون أيّة نقطة أخرى على سطح الكرة S_n على استقامة واحدة مع شعاع المماس لخط الطّول .

ولّد هذا الحقل المتّجهي مجموعة تحويلات إسقاطيّة بمعامل واحد لامتناه في الصّغر

إنّ التّطبيق:

$$\bar{\pi}_t : S_n \to S_n$$

معرّف وفق الشّرطين الآتيين:

1 . النّقاط $\bar{M}_t, M$ الموافقة كل منها مع الأخرى على خط الطّول نفسه.

2 . خطوط العرض $\overline{w}_t$ من $\overline{M}_t$ مرتبطة مع خطوط العرض w من M وفق القاعدة:

$$\overline{w}_t = w_t \,.\, t^{1/2} \sin 2w$$

t: هو عامل لا متناه في الصّغر لـ $\overline{\pi}_t$.

1.2 . السّطح الدّوراني:

نبيّن في هذه الفقرة أنّ السّطح الدّوراني المتراصّ* ذو n . بعد $S_n \subseteq E_{n+1}$ يُطبّق جيوديزيّاً بشكل عام، إضافة إلى ذلك، من أجل سطوح دورانيّة خاصّة، والمتماثلة استمراريّاً* مع سطح الكرة S_n ، يمكننا إنشاء تطبيقات جيوديزية مشوّهة (جيوديزيّة بين بعضها البعض).

ليكن S_n سطحاً دورانيّاً من الصّف C^n في الفضاء الإقليدي E_{n+1} المتماثل استمراريّاً مع سطح الكرة n. بعد والتي تعطى معادلتها في نظام إحداثي مستمرّ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ بالصّيغة:

(*): راجع المرجع [24]

$$x^t = r(w)u^t \quad , \quad t = 1,2, \ldots, n \qquad (4)$$

$$x^{n+1} = Z(w)$$

حيث u^i الإحداثيات على الكرة الواحديّة الأساسيّة S^{n-1} من نمط أفقي، حيث w_1, w_2 قيم ثابتة و

$$r(w) \in C^n[w_1, w_2]$$

تابع يحقق الخواصّ الآتية:

$$r(w) > 0 \quad , \qquad |\, r'(w) \,| \leq 1 \quad , \quad w \in (w_1, w_2)$$
$$r(w_1) = r(w_2) \quad , \quad \| r'(w_1) \| = \| r'(w_2) \| = 1$$
$$Z(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{w_1}^{w} e(\tau)\sqrt{1 - r^2(\tau)}\, d\tau$$

إنّ التّابع $e(\tau) = \pm 1$ مستمر قطعيّاً على $[w_1, w_2]$ ومستمر في هذه النّقاط τ التي تحقّق $\| r'(\tau) \| \neq 1$ حيث $Z(w)$ متزايد، بالإضافة إلى أنّ التّابع $e(\tau)$ يحقّق بعض الشّروط الطّبيعيّة حول نقاط النّهاية w_1, w_2 تدعى النّقاط على S_n الموافقة للوسطاء $w = w_1$ أو $w = w_2$ بشكل خاصّ أقطاباً. و تدعى المنحنيات على S_n حيث $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ ثوابت خطوط الطّول حيث أنّها خطوط جيوديزيّة.

يدعى السّطح الدّوراني S_n بسيطاً إذا أعطي وفق الصّيغة **(4)** والتّابع $Z(w)$ متزايد (و الذي يتحقّق إذا وفقط إذا $e(t) = 1$)

يقال عن S_n بشكل واضح إنّه سطح دوراني بسيط إذا تحقّق الشّرط**(4)**

$r'(w) \neq 1$ لكل $w \in (w_1, w_2)$ وأقطابها ليست نقاطاً حرّة.

من أجل السّطح S_n المعطى بالتّابع $r(w)$ بمعامل واحد من عائلة السّطوح $\bar{S}_n^a$ يمكن أن يعرّف بـ :

$$x^i = \bar{r}(w)u^i \quad , \quad x^{n+1} = \bar{Z}(w) \qquad (5)$$

حيث:

$$\bar{r}(w) = {r(w)}\Big/{\sqrt{1 + ar^2(w)}}$$

$$\bar{Z}(w) = \int_{w_1}^{w} \bar{e}(\tau) \sqrt{\frac{1 - r'^2(\tau) + ar^2(\tau)}{\left(1 + ar^2(\tau)\right)^3}}\, d\tau \qquad ; \quad a = const$$

حيث: $1 + \mathrm{ar}^2(\mathrm{w}) > 0 \quad , \quad 1 - \mathrm{r}'^2(\mathrm{w}) + \mathrm{ar}^2(\mathrm{w}) \geq 0$

لكل $w \in [w_1, w_2]$.

يحقّق التّابع الأملس القطعيّ $\bar{e}(\tau) = \pm 1$ المستمر لكل τ العلاقة الآتية:

$$1 - \mathrm{r}'^2(\tau) + \mathrm{ar}^2(\tau) \neq 0$$

وهنا يجب إيجاد مجال تزايد التّابع $\bar{Z}(w)$

لنرمز

$$\mathrm{a}_1 = \inf\left\{\frac{1}{\mathrm{r}^2(\mathrm{w})}; w \in (w_1, w_2)\right\}$$

$$\mathrm{a}_2 = \inf\left\{\frac{1 - \mathrm{r}'^2(w)}{\mathrm{r}^2(\mathrm{w})}; w \in (w_1, w_2)\right\}$$

$$a_{min} := \sim min\{a_1, a_2\}$$

يمكن أن تبنى السّطوح $\bar{S}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}$ لكل $a > a_{min}$.

بشكل خاصّ $\bar{S}_{\mathrm{n}}^{0} \equiv \mathrm{S}_{\mathrm{n}}$ إذا كان $\bar{e}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}(\mathrm{t})$ وبوضوح تبنى $\bar{S}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}$ فوق السّطوح الدّورانيّة المتماثلة استمراريّاً مع السّطح الكروي بـ n. بعد.

مبرهنة(2):

يعرّف السّطح S_{n} الدّوراني تطبيقاً جيوديزيّاً شاملاً غير مبتذل على السّطح $\bar{S}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}$ ، $\mathrm{a} \neq 0$.

الإثبات:

لنتحقّق من أنّ التّطبيق

$$f\colon \mathrm{S}_{\mathrm{n}} \rightarrow \bar{S}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}} \qquad\qquad (a \neq 0)$$

الذي ينقل كل نقطة $M \in \mathrm{S}_{\mathrm{n}}$ ذات الإحداثيّات $(w, u^1, u^2, \dots, u^n)$ إلى نقطة $\bar{M} \in \bar{S}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}$ بالإحداثيّات نفسها على السّطح الثّاني هو تطبيق جيوديزيّ شامل غير مبتذل.

من الواضح أنّ f من الصّف C^{s} إذا كان S_{n} من الصف C^{s} و f معرّف بشكل عام. خطوط الطّول على S_{n} ،بالإضافة إلى $\bar{S}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}$، هي خطوطاً جيوديزيّة و f تطبيق ينقل خطوط الطول في S_{n} إلى خطوط الطول في $\bar{S}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}$.

وعندما تمرّ كل الخطوط الجيوديزيّة من أقطاب السّطح الكروي S_{n} و $\bar{S}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}$ ،على التّرتيب فإنّ هذه الخطوط هي خطوط الطّول.

وبهذا نكون قد تحققّنا من أنّ الخطوط الجيوديزيّة المارّة بالأقطاب تنتقل إلى خطوط جيوديزيّة وفق التّطبيق f. لنثبت ذلك على بقيّة النّقاط وبطريقة مماثلة.

في كل النّقاط، باستثناء الأقطاب، يمكن حساب المسافة ds^2 على S_{n} و $d\bar{s}^2$ على $\bar{S}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}$ في النّظام الإحداثي $(w, u^1, u^2, \dots, u^n)$ مع $w \in (w_1, w_2)$ بـ:

$$ds^2 = dw^2 + r^2(\mathrm{w}) d\sigma^2 \qquad \mathbf{(6)}$$

$$d\bar{s}^2 = (1 + ar^2)^{-2} dw^2 + r^2\,(1 + ar^2)^{-1} d\sigma^2 \qquad (7)$$

حيث

$$d\sigma^2 = {du^1}^2 + {du^2}^2 + \cdots + {du^n}^2$$

صيغة المسافة على دائرة الواحدة S_{n-1}

إنّ الفضاءات التي تُعرّف عليها المسافة بالصّيغة (6) و(7)،على التّرتيب، متوافقة جيوديزيّاً بشكل غير مبتذل عندما $r(w) \equiv \cancel{const}$ و $a \neq 0$

ليس من الصّعب التأكّد من أنّ السّطوح $\bar{S}_n^a$ $(a > a_{min})$ بسيطة.

يمكننا من أجل السّطح $\bar{S}_n^{a_{min}}$ غير البسيط بناء سطح بسيط وحيد $\bar{S}_n^{*a_{min}}$ و الذي يكون متقايساً مع السّطح المعطى $\bar{S}_n^{a_{min}}$.

يدعى تشويه السّطح جيوديزيّاً إذا حافظ على الجيوديزيّة.

مبرهنة (3):

تعرّف السّطوح الدّورانيّة البسيطة $S_n \in E_{n+1}$ المتماثلة استمراريّاً مع كرة واحديّة بـ n . بعد تشويهاً جيوديزيّاً أملساً شاملاً غير مبتذل.

الإثبات:

تنطلق فكرة الإثبات من حقيقة أنّ أسرة السّطوح $\bar{S}_n^a$ تتعيّن بتشويه أملس للسّطح $S_n \subset E_{n+1}$ ،و من ناحية أخرى فإنّ السّطح متوافقة جيوديزيّاً بشكل غير مبتذل وفقاً للمبرهنة (2). حيث aهي وسيط التّشويه. بشكل خاص $\bar{S}_n^a \equiv S_n$ ، إذا كان $a = 1$ ، يمكن بوضوح أن يمدّد التّشويه لـ S_n بتحويل لـ $\bar{S}_n^a$ في E_{n+1} ، وبتغيير بسيط في (4) يمكننا تعريف أي سطح دوراني، حيث يكون متوافقاً جيوديزيّاً مع عائلة السّطوح$\bar{S}_n^a$ من (5) .$(a > 0)$

يمكننا بإجراء تغييرات بسيطة في (4)، تحديد أي سطح من السطح الدّوراني S_n، والذي يقابل جيوديزيّاً عائلة من السّطوح $\bar{S}_n^a$ في (5) حيث $a > 0$. وهنا يكون S_n هوميومورفي مع n− طارة، وهو سطح غير بسيط، ويقابل السّطوح $\bar{S}_n^a$ غير المتماثلة استمرارياً مع n− طارة*. من هنا فإنّه لا يوجد تطبيق جيوديزي شامل للسطح S_n إلى $\bar{S}_n^a$. معنى ذلك يمكننا هنا، اثبات المبرهنة التّالية:

مبرهنة (4) :

يعرّف السّطح الدّوراني S_n، المتماثل استمراريّاً، مع الطارة ذات البعد n، تطبيقات جيوديزيّة شاملة غير مبتذلة.

لإثبات هذه المبرهنة نأخذ التّمهيديّة الآتية:

تمهيديّة (1) :

يعطى التّابع λ على S_n بالصّيغة

$$\lambda \equiv \int_0^w f(\tau)d\tau \qquad (8)$$

يعرّف صيغة −1 شاملة (متّجه مقابل) $\lambda^*(\lambda_i)$ على S_n يعطى بشكل محلّي بـ $\lambda_i = \partial_i \lambda_i$ والتّابع $e = f'(w)$ أيضاً عرّف بشكل شامل على S_n حيث أنّ التّالي يتحقّق على S_n بشكل شامل :

$$\nabla_X \nabla_Y \lambda^* = eg(X,Y)$$

(المركّبات $\nabla_i\lambda_j = eg_{ij}$ حيث g_{ij} مركّبات التّنسور المتري على S_n).
بملاحظة أنّ السّطوح S_n متماثلة استمرارياً مع الطّارة بـ n . بعد ،فإنّ التّابع λ ليس ثابتاً وليس سلّمياً على S_n.
بالإضافة لذلك الصّيغة .1 *λ ليست تامّة في العموم (ليست متّجه المماس بشكل عام).
إثبات المبرهنة (**4**):
لنبدأ بوصف دقيق للسّطوح الدّورانيّة المتماثلة استمرارياً مع الطّارة بـ n. بعد.
يمكن أن تعرّف S_n بالعلاقة (**4**) بشرط $r(w) > 0$

$$Z(w) \overset{\text{def}}{=} \int_0^w e(\tau)\sqrt{1 - r^{1^2}(\tau)}\ d\tau$$

بالاستناد إلى الصّيغة .1 λ^*

(*) راجع المرجع [24]

يمكننا أن نتحقق من أنّ الثّابت c موجود حيث

$$a_{ij} = cg_{ij} + \lambda_i\lambda_j$$

هي مركّبات الحقل التّنسوري لـ S_n غير التّافه (حيث $|a_{ij}| \neq 0$).
بالإضافة لذلك التّنسور يحقّق المعادلات الأساسيّة للتّطبيقات الجيوديزيّة

$$a_{ij,k} = A_i g_{jk} + A_j g_{ik} \quad , \quad A_i = \rho\lambda_i$$

بنتيجة هذه المعادلات يمكننا أن نعرّف تطبيقاً جيوديزياً شاملاً، وفي حالة $\rho \neq 0$ يكون التّطبيق غير مبتذل.

التّطبيقات الجيوديزيّة الشّاملة لمجسّمات القطع النّاقص الدّورانية:

سندرس في هذه الفقرة التّشويه الجيوديزي لمجسّمات القطوع النّاقصة الدّورانيّة [17].
نعرض عائلة التّطبيقات الجيوديزيّة، بوسيط واحد، التي تشوّه القطوع النّاقصة إلى سطوح دورانيّة، والتي هي بشكل عام من نمط مختلف.
نبني هنا سطوح دورانيّة تظهر من التّشوه الجيوديزي للقطوع النّاقصة الدّورانية، ونعرض أنّ هذه السّطوح لا يمكن أن تكون قطوع ناقصة دورانيّة.
بفرض السّطح الدّوراني S_2 في الفضاء الإقليدي E_2 معطى بالمعادلات:

$$x = r(w)\cos t \quad , \quad y = r(w)\sin t \quad , \quad Z = Z(w)$$
$$t \in [0,2\pi) \quad , \quad w \in [w_1, w_2]$$

يأخذ المترك الصّيغة:

$$ds^2 = a(w)dw^2 + b(w)dt^2 \qquad (\mathbf{9})$$

حيث $a(w)$ و $b(w)$ هي توابع مختلفة

$$a(w) = r'^2(w) + Z'^2(w)$$
$$b(w) = r^2(w)$$

كما هو معروف، إنّ السّطح S_2 ذو المسافة (**9**) هو تطبيق جيوديزي على السّطح $\bar{S}_2$مع المسافة

$$d\bar{s}^2 = \frac{p\,a(w)}{(1+qb(w))^2}dw^2 + \frac{pb(w)}{1+qb(w)}dt^2 \qquad (\mathbf{10})$$

حيث p, q وسيطان حقيقيّان، w, t الاحداثيّات المشتركة.

الآن لنفرض أنّ عائلة السّطوح الدّورانيّة $\bar{S}_n$ بوسيط واحد محدد:

$$Z = \bar{Z}(w) \quad , \quad y = \bar{r}(w)\sin t \quad , \quad x = \bar{r}(w)\cos t$$

نتجت من السّطح الأصلي S_2 من خلال التّحويلات:

$$\bar{r}(w) = \frac{r(w)}{\sqrt{1 + ar^2(w)}} \quad , \quad \bar{Z}(w) = \int_{w_1}^{w} \sqrt{\frac{1 + ar^2(\tau) - r'^2(\tau)}{\left(1 + ar^2(\tau)\right)^3}}\, d\tau \qquad (\mathbf{11})$$

حيث a وسيط

إنّ الإحداثي w هو الإحداثي السّابق نفسه لذلك فهو ليس معاملاً طول للمنحني $(\bar{r}, \bar{Z})$ ، حيث أنّ التّوابع $\bar{r}, \bar{Z}$ يجب أن تحقق شروط السّطوح الملساء عند الأقطاب $w = w_2 \quad , \quad w = w_1$،حيث $\bar{r} = 0$، بمعنى:

$$\frac{d\bar{r}}{dw} = \pm 1 \quad , \quad \frac{d\bar{z}}{dw} = 0$$

بهذا يتم الإثبات أنّها محققة من أجل r, Z.

تطبيقات مجسّمات القطع النّاقص الدّورانيّة:

في الفقرة السّابقة عرضنا تطبيقات جيوديزيّة بين السّطوح الملساء الدّورانيّة، التي هي متماثلة استمرارياً مع السّطح الكروي S_n .

الآن لنأخذ مثال على قطع ناقص دوراني في فضاءٍ إقليديّ، ولنتحقق من تشويهه بواسطة التّطبيقات الجيوديزيّة. وهذا يكون في رقعة إحداثيّة محليّة تغطّي نصفاً واحداً من السّطح، علاوةً على ذلك، وفيما يخصّ طول القوس w ،تتحقّق الشّروط للمتغيّر φ:

$$r(\varphi) = k\sin\varphi \quad , \quad z(\varphi) = 1 - \cos\varphi \qquad (\mathbf{12})$$

مربّع عنصر طول القوس هو:

$$dw^2 = dr^2 + dz^2 = (k^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)d\varphi^2$$

نختار $w_1 = w(\varphi = 0) = 0$، حيث إنّ نقطة الأصل (المركز) لـ φ و طول القوس (متقايسان).

ثمّ إنّ $w_2 = w(\varphi = \pi)$ هو نصف محيط القطع النّاقص.

يعني الشّرط $r(w_1) = r(w_2) = 0$ هو استيفاء.

$$\frac{dr}{dw} = \frac{dr}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dw} = \frac{k\cos\varphi}{\sqrt{k^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}}$$

لذلك نجد أنّ:

$$\frac{dr}{dw}(w_1) = 1 \quad , \quad \frac{dr}{dw}(w_2) = -1$$

يعطى التّحويل $(\mathbf{11})$ بدلالة φ بـ:

$$\bar{r}(\varphi) = \frac{k\sin\varphi}{\sqrt{1 + ak^2\sin^2\varphi}} \qquad (\mathbf{13})$$

$$\bar{z}(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{1+ar^2(\varphi')-r'^2(\varphi')}{\left(1+ar^2(\varphi')\right)^3}\frac{dw}{d\varphi'}}\, d\varphi' \qquad (\mathbf{14})$$

يعني r' دائماً مشتقاً لـ w، أيضاً عندما يكتب كتابع φ' لذلك $r'(\varphi')$ هو $\frac{dr}{d\varphi'}\frac{d\varphi'}{dw}$ فنجد

$$\bar{r}(\varphi') = \frac{k\cos\varphi}{(\mathrm{k}^2\cos^2\varphi + sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}(1+ak^2 sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \qquad (\mathbf{15})$$

القيمة العظمى لـ $\bar{r}$ هي $\bar{r}_{\max} = \frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{ak}^2}}$ ، تتحقّق عند $\varphi = \frac{\pi}{2}$ مثل مركز القطع النّاقص.

بدلاً من مكاملة $(\mathbf{15})$ بشكل صريح نعتبر المشتق $\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}\bar{r}}$ ، الذي يعطي معادلة تفاضليّة للمنحني ونحذف الوسيط φ. وهذا يكون في الخطوات التالية:

أوّلاً: نعبّرعن $\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}\bar{r}}$ بالصّيغة $\frac{d\bar{z}}{\mathrm{d}\varphi}\Big/\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{d\varphi}$

نحصل من $(\mathbf{13})$ و$(\mathbf{14})$ على

$$\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{d\varphi} = \frac{k\cos\varphi}{(1+ak^2 sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \frac{d\bar{z}}{\mathrm{d}\varphi} = \sqrt{\frac{1+ar^2(\varphi)-r'^2(\varphi)}{\left(1+ar^2(\varphi)\right)^3}\frac{\mathrm{d}w}{d\varphi}}$$

عندئذٍ من التّعريف $(\mathbf{12})$ وفق المعادلة الصّريحة:

$$(1-z)^2 + \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{k}^2} = 1$$

نعبّر عن $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ كدوال في r ، فنجد:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}\bar{r}} = \frac{r\sqrt{1+ak^4+ar^2-a^2k^2r^2}}{\mathrm{k}\sqrt{k^2-r^2}}$$

نأخذ العلاقة العكسية للعلاقة $(\mathbf{13})$

$$r = \frac{\bar{r}}{\sqrt{1-a\bar{r}^2}}$$

لنتمكّن من الاشتقاق بالنّسبة لـ $\bar{r}$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}\bar{r}} = \frac{\bar{r}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{k}^2}+\mathrm{ak}^2-\mathrm{a}(1+\mathrm{ak}^2)\bar{r}^2}}{\sqrt{1-\mathrm{a}\bar{r}^2}\sqrt{\mathrm{k}^2-(1+\mathrm{ak}^2)\bar{r}^2}}$$

أخيراً، من أجل مقارنة مباشرة مع التّفاضل الموافق لتغير القطع النّاقص

$$\frac{dz}{\mathrm{dr}} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{k}\sqrt{k^2-r^2}}$$

يمكننا أن نتوصل إلى التّحويل السّلمي

$$\hat{\mathrm{r}} = \bar{r}\sqrt{1+\mathrm{ak}^2} \quad , \quad \hat{\mathrm{z}} = \bar{z}\sqrt{1+\mathrm{ak}^2}$$

حيث القيمة العظمى لـ $\hat{\mathrm{r}}$ تساوي k' ، نأخذ القيمة العظمى لـ r في حالة القطع النّاقص وكافة وسطاء السّطحين هي نفسها.

ضمن الشّروط المحدّدة لهذه المتغيّرات:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{z}}{\mathrm{d}\hat{r}} = \frac{\hat{r}}{\mathrm{k}\sqrt{k^2 - \hat{r}^2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \mathrm{a}\mathrm{k}^2(\mathrm{k}^2 - \hat{r}^2)}{1 + \mathrm{a}(\mathrm{k}^2 - \hat{r}^2)}} \qquad (\mathbf{16})$$

من هنا يمكن أن نرى أنّ تحويل المنحني من نمط مختلف، لا يتوافق مع القطع النّاقص، عند القيمة العظمى للمتغيّرات المتّجهة، عند خط الاستواء كل من المشتقّات $\frac{dz}{\mathrm{dr}}$ للقطع النّاقص و $\frac{\mathrm{d}\hat{z}}{\mathrm{d}\hat{r}}$ للتّشويه.

إنّ الخاصية الاستثنائيّة لهذه التّحويلات هي أنّها تُبقي لدوائر $(k = 1)$ لا متغيّرة(عامل سلّمي $\sqrt{1+a}$).

في النّهاية تعديل معامل التّحويل الأعظمي a في $(\mathbf{16})$ يحّول المنحني تقريباً إلى دائرة.

بالنّتيجة يكون المترك للسّطح الدّوراني هو:

$$dS^2 = 1 + \left(\frac{d\hat{z}^2}{d\hat{r}^2}\right) d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 dt^2$$

$$= \frac{k^2 + ak^4 + \left(\frac{1}{k^2} - ak^2 - 1\right)\hat{r}^2}{(k^2 - \hat{r}^2)(1 + ak^2 - a\hat{r}^2)} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 dt^2$$

صيغة المترك هذا في الشّروط لـ $\hat{r}$ محليّة توافق فقط النّصف العلوي أو السّفلي للسّطح. ويمكن أن تكون منتظمة عند وجود أبعاد متعدّدة للدوائر مع الثّابت $\hat{z}$ حيث تستبدل بسطوح كرويّة ذات أبعاد كبيرة،

عندئذٍ من الضّروري أن يستبدلdt بعنصر زاوية $d\Omega$ من البعد ذاته.

يمكننا بتابع المسافة نفسه العودة إلى مركز القطع النّاقص بتعبير بسيط $\hat{r}$ في الشّروط لـ r

$$dS^2 = (1 + ak^2)\left[\frac{k^2 + \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)r^2}{(k^2 - r^2)(1 + ar^2)^2}\, dr^2 + \frac{r^2}{1 + ar^2} dt^2\right] \qquad (\mathbf{17})$$

بينما تابع المسافة على مركز القطع النّاقص يعطى بـ:

$$dS^2 = \frac{k^2 + \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)r^2}{(k^2 - r^2)}\, dr^2 + r^2 dt^2$$

بتعبير آخر هو تشويه السّطح، نعتبر أنّ معادلة خطوط الطّول في الصّيغة $\hat{z}(\mathrm{r})$، حيث $\hat{z}$ و$\hat{r}$ هي الإحداثيّات الدّيكارتية لمقطع عرضي عبر المحور الدّوراني.

من أجل هذا الغرض نكامل $(\mathbf{16})$

$$\sin^2\varphi = \frac{k^2 - r^2}{k^2 - \frac{1}{\mathrm{a}} - r^2} \qquad (\mathbf{18})$$

عندئذٍ

$$z(r) = -\frac{1}{k\sqrt{a}}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(r)} \frac{\sqrt{1 - (1 - k^2)\sin^2\varphi'}}{\cos^2\varphi'} d\varphi' \qquad (\mathbf{19})$$

حيث

$$\varphi(0) = arc\ sin\sqrt{\frac{ak^2}{1+ak^2}} \quad ,\varphi(r) = arc\ sin\sqrt{\frac{a(k^2-r^2)}{1+ak^2-ar^2}}$$

بتكامل$(\mathbf{19})$ بالتّجزئة نحصل على :

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(r)} \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\varphi'}\,\frac{d\varphi'}{\cos^2\varphi'} = \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\varphi}\tan\varphi\ \Big|_{\varphi(0)}^{\varphi(r)}$$

$$-\frac{1}{1-k^2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(r)} \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\varphi'}\,d\varphi'$$

$$+\frac{1}{1-k^2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(r)} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\varphi'}}$$

حيث التّكاملين الآخرين هما تكاملين أساسيين من النّوع الأوّل والثّاني.

مع مناقشة k,ϕ

$$E(\phi,k) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \qquad , \quad F(\phi,k) = \int_0^{\phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

وبالعودة إلى r

نحصل على العلاقة الآتية:

$$z(r) = -\frac{\sqrt{k^2-r^2}}{k}\sqrt{\frac{1+ak^4-ak^2r^2}{1+ak^2-ar^2}} + \sqrt{\frac{1+ak^4}{1+ak^2}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}k(1-k^2)}\left[E\left(arc\ sin\sqrt{\frac{k^2-r^2}{k^2+\frac{1}{a}-r^2}},\sqrt{1-k^2}\right) - E\left(arc\ sin\frac{k}{\sqrt{k^2+\frac{1}{a}}},\sqrt{1-k^2}\right) - F\left(arc\ sin\sqrt{\frac{k^2-r^2}{k^2+\frac{1}{a}-r^2}},\sqrt{1-k^2}\right) + F\left(arc\ sin\frac{k}{\sqrt{k^2+\frac{1}{a}}},\sqrt{1-k^2}\right)\right]$$

تصف العلاقات السّابقة و العلاقة $(\mathbf{16})$ التّشويه الجيوديزي في E_3.

ونجد أنّه عندما تنتهي معاملات التّحويل إلى قيم كبيرة يتحوّل السّطح إلى ما يقارب كرة في نهاية السّطح.

عندئذٍ نخلص إلى النتيجة الآتية:

مبرهنة$(\mathbf{5})$:

يعرّف مجسّم القطع النّاقص الدّوراني تطبيقاً جيوديزيّاً غير مبتذل، الذي يحافظ على السّطوح الدّورانية، فإن السّطوح النّاتجة ليست سطوح قطوع ناقصة.

الاستنتاجات والتوصيات :

توصلنا إلى أن القطع الناقص الدوراني يعرف تشويه جيوديزي غير مبتذل أي أنّ السطوح الناتجة ليست قطوع ناقصة، يمكن متابعة البحث ودراسة سطوح أخرى بالاستفادة من التنسورات وتطبيقاتها لما لها من أهمية علمية قيمة في مجالات الرياضيات و الفيزياء(الحركة والكم والضغط و ...) والطب و غيرها من العلوم الأخرى.

المراجع

[1] Mikeˇs J. *Geodesic mappings of special Riemannian spaces*. Topics in diff. geometry,Pap. Colloq., Hajduszoboszl´o/Hung. 1984, Vol. 2, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 46,North-Holland, Amsterdam, 793-813, 1988

[2] Mikeˇs J. *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces*. J. Math.Sci. (New York) 78:3, 311-333, 1996. ⊲ Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem Mat. Prilozh.,Temat. Obz. 11, 121-162, 2002.

[3] Sinyukov N.S. *Geodesic mappings of Riemannian spaces*. Nauka, Moscow, 1979.

[4] Solodovnikov A.S. *Projective transformation of Riemannian spaces*. Usp. Mat. Nauk11:4(70), 45-116, 1956

[5] Mikeˇs J. *Holomorphically projective mappings and their generalizations*. J. Math. Sci.(New York) 89:3, 1334-1353, 1998. ⊲ Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem Mat. Prilozh.,Temat. Obz. 30, 258-289, 2002.

[6] Fulton W. *Algebraic topology*, A first course. Springer, 1995.

[7] Eisenhart L.P. *Riemannian geometry*. Princeton Univ. Press. 1926.

[8] Matsumoto M. *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces.* Shiga-Ken520, Japan: Kaiseisha Press. VI, 1986.

[9] Matsumoto M. *Finsler geometry in the 20th-century*. Handbook of Finsler geometry.Vols. 1 and 2. Kluwer, 557-966, 2003.

[10] Chud´a H. *Some properties of geodesics mappings and their generalization.* Ph.D. Thesis,Palacky Univ. Olomouc, 2010. (supervisor J. Mikeˇs)

[11] B´acs´o S., Matsumoto M. *Finsler spaces with the h-curvature tensor dependent onposition alone.* Publ. Math. 55:1-2, 199-210, 1999.

[12] B´acs´o S., Matsumoto M. *On Finsler spaces of Douglas type*. IV: Projectively flatKropina spaces. Publ. Math. 56:1-2, 213-221, 2000.

[13] Chud´a H., Mikeˇs J. *On first quadratic integral of geodesics with a certain initial conditions*. Proc. 6th Int. Conf. Aplimat, 85-88, 2007.

[14] Chud´a H., Mikeˇs J. *Geodesic and F-planar mappings with certain initial conditions.Proc. of the Int. Geom*. Center, 1:1-2, 159-167, 2008.

[15] Fubini G. *Sui gruppi transformazioni geodetiche. Mem. Acc*. Torino, 2, 261-313, 1903.

[16] Hashiguchi M., *Ichijyo Y. Randers spaces with rectilinear geodesics*. Rep. Fac. Sci.,Kagoshima Univ., Math. Phys. Chem. 13, 33-40, 1980.

[17] Hinterleitner I. *On global geodesic mappings of ellipsoids*. AIP Conf. Proc. 1460,180-184, 2012.
[18] Lee I.Y. *Douglas spaces of the second kind of Finsler space with a Matsumoto metric.J. Chungcheong Math*. Soc. 209-221, 2008.
[19] Mikeˇs J. *On the existence of n-dimensional compact Riemannian spaces admitting nontrivial global projective transformations*. Sov. Math., Dokl. 39, 315-317, 1989.⊲ Dokl. Akad. Nauk SSSR 305, 534-536, 1989.
[20] Solodovnikov A.S. *Projektive transformation of Riemannian spaces*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 105, 419-422, 1955.
[21] Solodovnikov A.S. *On spaces with common geodesics*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 108,201-203, 1956.
[22] Stankovi´c M.S., Minˇci´c S.M. *New special geodesic mappings of generalized Riemannian spaces*. Publ. Inst. Math., Nouv. S´er. 67(81), 92-102, 2000.
[23] Voss K. Geodesic mappings of the ellipsoid. *Geometry and topology of submanifolds X. Proc.* of Conf. Singapore: World Sci. 294-302, 2000.

[24] د.طالب غريبة، د .عصام ديبان، أ.د. محسن شيحة، *الهندسة التفاضليّة*، جامعة البعث(٢٠١٠).