

الإثارة الداخلية للبولارون البصري

د. محمد كامل ابراهيم*

(تاريخ الإيداع ٢٠٢٠/١٠/٢١. قُبل للنشر في ٢٦ / ١١ / ٢٠٢٠)

□ ملخّص □

تم حساب طاقة الحالة الأساسية، وطاقة حالة الإثارة الأولى للبولارون البصري، من أجل قيم مختلفة لثابت ارتباط إلكترون - فونون. كما تمت مناقشة وجود الإثارة الداخلية.
الكلمات المفتاحية: الاستقطاب الأيوني، بولارون، بولارون سطحي، فونون، إثارات سطحية،

*مدرس في قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة طرطوس، طرطوس، سوريا.

The internal excitement of the optical polaron

Dr. Mohamed Kamel Ibrahim *

(Received 21 /10 /2020. Accepted 26/ 11 /2020)

□ABSTRACT □

the ground state energy, and the initial excitation state energy of the optical polaron, for different values of the electron-phonon bonding constant has been calculated. the presence of inner excitement also has been Discused.

key words: Ion polarization, polaron, superficial polaron, phonon, superficial excitations

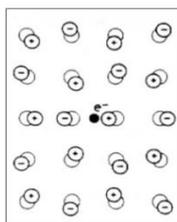
* Teacher. at physics department- faculty of sciences –Tartus university - Tartus - Syria.

١. المقدمة

يمكن أن تتشكل في البلورات الأيونية حالة خاصة للإلكترونات الناقلية، وقد درس هذه الظاهرة بيكار (S.I. Pekar) ١٩٤٦ وتدعى تلك الحالة بالبولارونات.

لكن أول من أثار مفهوم البولارون لاندوا (Landau L.D) عام 1933 [1]. وفقاً للنداو فإن حقل كمون كولون للإلكترون الناقلية في البلورة الأيونية يسبب تشوهاً لمحيط الأيون الذي بدوره يتفاعل مع الإلكترون مغيراً طاقته وكتلته (self-action). وتشكل الحركة البطيئة للإلكترون متبوعاً بالتشوه المرافق للشبكة شبه جسيم يدعى بولارون.

تظهر إذاً البولارونات نتيجة استقطاب أيونات الشبكة الأيونية بواسطة إلكترون الناقلية، وينتج عن استقطاب البلورة نقص في طاقة الإلكترون، وذلك بسبب ظهور حفرة كمون في مجال تواجد الإلكترون (حسب الإلكترون)، وينتج عن حصر الإلكترون استقطاب البلورة، يتغير كمون إلكترون الناقلية نتيجة إزاحة أيونات البلورة، ويوصف الإلكترون المتواجد في الحفرة الكمونية بواسطة تابع موجي متخامد. ينتج عن تموضع الإلكترون استقطاب البلورة الذي يحفظ تواجد الإلكترون. هذا التوضع الآلي للإلكترون يمكن أن ينزاح بحرية في كامل البلورة، يسمى الاستقطاب في هذه الحالة الاستقطاب اللاعطالي.



الشكل (١): يوضح بولارون إلكترون الناقلية في وسط بلوري أيوني ، يدفع الإلكترون الأيون السالب ويجذب الأيون الموجب.

إذا كانت سعة قياس التابع الموجي ψ للغمامة الإلكترونية في حالة الاستقطاب كبيرة مقارنة مع ثابت الشبكة يسمى البولارون في هذه الحالة بالبولارون كبير نصف القطر (نصف قطر البولارون أكبر من ثابت الشبكة) [2]، أو بمعنى آخر بولارون فروليخ (polaron Fröhlich).

تمت دراسة مثل هذا البولارون بواسطة ثابت عددي α بدون أبعاد سُمي ثابت ترابط فروليخ، ويُحدد بالعلاقة التالية [3]:

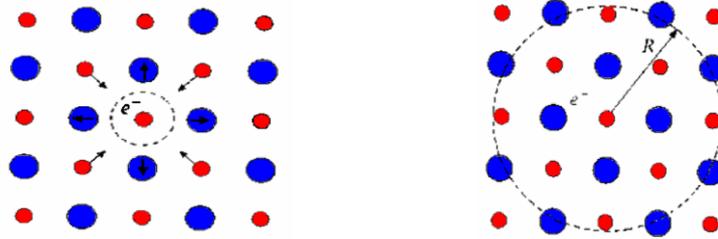
$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{m_b c^2}{2\hbar \omega_{L0}}} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0} \right)$$

حيث ϵ_0 ثابت العازلية الكهربائية الساكنة ($\omega \rightarrow 0$)، ϵ_∞ ثابت العازلية الكهربائية عند ($\omega \rightarrow \infty$)، ω_{L0} التردد الزاوي للفونونات الضوئية ذي الخط الطولي، m_b الكتلة الفعالة للبولارون، وتكون كتلة لبولارون أكبر من كتلة الإلكترون ، وقد وضع ريتشارد فاينمان (Richard Feynman) تقريب يربط كتلة البولارون مع كتلة إلكترونه ومع ثابت الترابط α [3] بالعلاقة.

$$m^* \approx m_b \left(1 + \frac{\alpha}{6} \right) \text{ (for } \alpha \ll 1), m^* \approx m_b (0.02 \alpha^4) \text{ (for } \alpha \gg 1)$$

يكون في معظم المواد نصف قطر البولارون أكبر من ثابت الشبكة للمادة، تعالج المسألة في هذه الحالة كوسط استقطابي مستمر، وقد اعتبر فروليخ أن البولارون أبسط مثال على نظرية الحقول الكمية، واستنتج هاملتون البولارون باستخدام نظرية الحقول الكمية نتيجة تفاعل إلكترون - فونون حيث افترض فروليخ في استنتاجه أن

البلورة عبارة عن وسط مستمر، وأن للإلكترون كتلة فعّالة تنتج من معدل تأثير كمون الشبكة على الإلكترون [4]. تُعرّف الفرضيات (استمرارية الوسط واستبدال كتلة الإلكترون الحر بالكتلة الفعّالة) بتقريب الاستمرارية وتقريب الكتلة الفعّالة على التوالي. ولكن، عندما يكون استقطاب الحث الذاتي مثار بواسطة إلكترون أو ثقب فإن نصف قطر البولارون يكون من مرتبة ثابت الشبكة، ويظهر بولارون (Holstein) صغير نصف القطر بحيث يمكن أن ينحصر في حجم مثل حجم الخلية ويكون مدى تفاعله صغير جداً.



بولارون صغير b

بولارون كبير a

الشكل (٢):

يوصف البولارون بواسطة طاقة ارتباطه E_0 ، الكتلة الفعّالة m^* وبواسطة سلوكه التجاوبي للحقول الكهربائية والمغناطيسية الخارجية (مثال: قابلية الحركة للتيار المستمر، ومعامل امتصاص الضوء).

يمكن حل مسألة تأثير إلكترون - ثقب (الاستون) بطريقتين:

- الطريقة الأولى كلاسيكية (الإلكتروديناميك): حيث يعتبر مسوغ استخدام هذه الطريقة تحقق المتراحة $\omega_e \ll \omega_{pl}^v, \omega_{pl}^{s1,2}$ حيث ω_e تردد اهتزاز بولارون - إلكترون، و $\omega_{pl}^v, \omega_{pl}^{s1,2}$ التردد السطحي والحجمي لاهتزاز الشبكة الأيونية (التردد الضوئي). أي لا يستطيع الإلكترون في هذه الحالة للحاق باهتزاز الشبكة (بمعنى آخر يبقى إلكترون منطقة الناقلية مرتبط مع الثقب في منطقة التكافؤ ولا يُشكل الإلكترون في هذه الحالة شحنة تيارية، إنما يشكل ما يُسمى استون).

- الطريقة الثانية: كوانتية وهي موضوع الدراسة في هذا العمل، ويكون في هذه الحالة $\omega_e \sim \omega_{pl}^v, \omega_{pl}^{s1,2}$ ويتحقق هذا الشرط في البلورات الأيونية [5].

توجد دراسات عديدة حول التأثير المتبادل بين الإلكترون والاهتزازات الضوئية السطحية و الحجمية (البولارون السطحي والبولارون الحجمي). وقد استعمل إيفانس وميلس (Evans and Mills) [6] لدراسة البولارون السطحي كمون القسم العطالي للاستقطاب في هاملتون التأثير المتبادل، وللحصول على الحد الكلاسيكي (كمون الخيال الكهربائي لحاملة الشحنة) اعتبر إيفانس وميلس أن حد الاستقطاب اللاعطالي يساوي الواحد. غير أن إيفارد وليكاري (Evrard and Licari) [7] أكدوا عدم دقة ذلك التقريب. وأن الهاملتوني المستنتج من قبلهما للإلكترون - فونون لا يعتبر كامل، وبالتالي فإنه لحل مسألة البولارون السطحي من الضروري الأخذ بعين الاعتبار ليس فقط التأثير المتبادل إلكترون - فونون، وإنما تأثير إلكترون منطقة الناقلية مع منطقة التكافؤ، حيث يمكن النظر في هذه الحالة إلى الإلكترون على أنه شبه جسيم (بولارون إلكتروني) [8,9].

تمت دراسة البولارون السطحي تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي وذلك باختيار نوعين من الارتباط التجريبي لوصف حالتي الإلكترون، الأول عندما يكون الإلكترون على سطح المادة مباشرة، ولارتباط الثاني عندما يكون محصور في شريط رفيع جداً على بعد محدد من السطح حيث بينت الدراسة أن الارتباط القوي بين الإلكترون والفونونات السطحية يزيد من انجذاب الإلكترون إلى السطح مما يجعله في حالة أكثر استقراراً على السطح. كما وجد أن المجال المغناطيسي يعزز من تأثير الفونونات على الإلكترون خصوصاً بالقرب من السطح [10]. يمكن وصف تأثير إلكترون الناقلية مع البولارون البصري لنصف ناقل بواسطة هاملتون فريوليك للبولارون الحر التالي [11]

$$H = \frac{p^2}{2m} + \sum_k \hbar\omega(k) a_k^+ a_k + \sum_k \left\{ v_k^* a_k^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + v_k a_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\} \quad (1)$$

حيث
(٢)

$$v_k = -i \frac{\hbar\omega}{k} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{4\pi\alpha}{V} \right)^{\frac{1}{2}}$$

\vec{r} و \vec{p} مؤثري زخم وإحداثيات الإلكترون في منطقة القطع المكافئ مع نهاية صغرى في $k=0$ ، m كتلة الإلكترون. $a_k^+ a_k$ مؤثر تكوين (فناء) الفونونات البصرية مع كمية حركة $\hbar\vec{k}$ وطاقة $\hbar\omega(k)$ ، ω تردد الفونون البصري. $v_k(r)$ التأثير المتبادل إلكترون - فونون، يتعلق بـ α ثابت ترابط إلكترون - فونون. لدينا في المواد الضعيفة القطبية ($\alpha < 3$)، وهذا الترابط يُدرس بواسطة نظرية الاضطراب [6]. تتعين إمكانية إثارة البولارون بواسطة إصدار فونون بصري حقيقي. يُعتبر في حالة الارتباط القوي ($\alpha > 6$) التأثير المتبادل إلكترون - فونون سبب ارتباط متبادل بين الفونونات البصرية، وأن الإلكترون يسيطر (يستولي) على الكمون الناتج عن التأثير المتبادل. يمكن في هذه الحالة وصف البولارون كإلكترون في كمون غاوس [12]. يمكن في هذه الحالة التمييز بين قمتي إثارة. أولاً: يمكن للبولارون أن يُصدر فونون بصري، ثانياً: يمكن للبولارون أن يُثار إلى سوية طاقة أعلى لكمون التوافق الذاتي.

٢. حساب طاقة الحالة الأساسية

يمكن تطبيق التحويل الواحد (The unitary transformation) البسيط الحصول على طاقة الحالة الأساسية، في حالة الارتباط القوي. وذلك انطلاقاً من التحويل الموحد [13] التالي:

$$u_1 = \exp(-ia \sum_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \vec{r} a_{\vec{k}}^+) a_{\vec{k}} \quad (3)$$

نحول هاملتون القطبية (١) إلى الصيغة التالية:

$$H' = \frac{1}{2} (\vec{P} - a \sum_{\vec{k}} \hbar\vec{k} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}})^2 + \sum_{\vec{k}} \hbar\omega a_{\vec{k}}^k a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \left\{ U_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^+ e^{-i(1-a)\vec{k}\cdot\vec{r}} + c c \right\} \quad (4)$$

a معامل متغير القيمة، عندما $a \rightarrow 0$ يعني أن البولارون قوي الارتباط، وفي الحالة $a = 1$ ، فإن المعادلة (3) تُعبر عن تحويل شهير لـ لو، لي، وباينس (Lee, Low, and Panic)، نقدم من أجل تأثير ضعيف إلكترون - فونون وبلاستناد إلى تعريف مؤثري الإنتاج والفاء، مؤثر كمية التحرك \hat{p}_j والمؤثر \hat{r}_j بالصيغة التالية:

$$\begin{aligned}\hat{p}_j &= \left(\frac{m\hbar\lambda}{2}\right)^{1/2}(\hat{a}_j^+ + \hat{a}_j) \\ \hat{r}_j &= i\left(\frac{\hbar}{2m\lambda}\right)^{1/2}(\hat{a}_j - \hat{a}_j^+)\end{aligned}\quad (5)$$

حيث $j = x, y, z$ ، يمكن باستعمال (5) إعادة كتابة الهاملتونيان (4) بالصيغة:

$$H' = H'_1 + H'_2 \quad (6a)$$

حيث:

$$\begin{aligned}H'_1 &= \frac{\hbar\lambda}{2}\left(\sum_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j + \frac{3}{2}\right) + \sum_k \left(\hbar\omega + \frac{a^2 \hbar^2 k^2}{2m}\right) a_k^+ a_k + \\ &+ \sum_k \left\{ v_k^* a_k^+ \exp\left(-\frac{\hbar^2}{4m\lambda}(1-a)^2 k^2\right) \exp\left[-(1-a)\left(\frac{\hbar}{2m\lambda}\right)^{1/2} \sum_j \hat{a}_j^+ k_j\right] \times \right. \\ &\left. \times \exp\left[(1-a)\left(\frac{\hbar}{2m\lambda}\right)^{1/2} \sum_j k_j \hat{a}_j\right] + \text{c.c.} \right\} + \frac{\hbar\lambda}{4} \sum_j (\hat{a}_j^+ \hat{a}_j^+ + \hat{a}_j \hat{a}_j) \quad (6b)\end{aligned}$$

$$H'_2 = \frac{a^2}{2m} \sum_{kk'} \hbar^2 \vec{k} \vec{k}' \cdot \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \hat{a}_k - a \left(\frac{\hbar\lambda}{2m}\right)^{1/2} + \sum_k \sum_j \hbar k_j (\hat{a}_j^+ + \hat{a}_j) a_k^+ a_k \quad (6c)$$

بتطبيق التحويل الثاني لـ (Lee - Low and Pines) نجد:

$$u_2 = \exp\left[\sum_k (\hat{a}_k^+ f_k - \hat{a}_k f_k^*)\right] \quad (7)$$

يُعتبر f_k تابع تغييري يُختار للحصول على القيمة الصغرى للطاقة. بالأخذ بعين الاعتبار التماثل الناتج من تعيين كمية زخم البولارون نجد.

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \sum_{\vec{k}} \sum_j \frac{\hbar \vec{k}_j \vec{p}_j}{2m} \middle| f_k \right\rangle^2 = \left\langle \frac{1}{2m} \left(\sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} |f_k|^2 \right)^2 \right\rangle = \frac{3\hbar\lambda}{4} \quad (8)$$

نحصل على:

$$H'' = \frac{\hbar\lambda}{2} \sum_j (\hat{a}_j^+ \hat{a}_j) + \frac{3}{4} \hbar\lambda (1-a)^2 + \sum_k \left(\hbar\omega + a^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) (a^+ + f_k^*) (\hat{a}_k + f_k) +$$

$$+ \sum_k \left[v_k^* (a_k^+ + f_k^*) \exp \left\{ \frac{-\hbar^2}{4m\lambda} (1-a^2)^2 \hbar^2 \exp \left[-(1-a) \left(\frac{\hbar}{2m\lambda} \right)^{1/2} \sum_j k_j b_j^* \right] \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \exp \left[(1-a) \left(\frac{\hbar}{2m\lambda} \right)^{1/2} \sum_j k_j \hat{a}_j \right] + \text{c.c} \right\} + H_1'' \quad (9)$$

يتضمن H_1'' حدود هامة للحساب القادم.

يمكن الحصول على التابع f_k والوسطاء λ و a في (٩) باستخدام طريقة التغيير لطاقة الحالة الأساسية. حيث يكون من أجل الحالة الأساسية $|0\rangle$ أن:

$$a_k |0\rangle = 0 \quad (10)$$

ونحصل على طاقة الحالة الأساسية بالصيغة:

$$E_0 = \frac{3}{4} \hbar\lambda (1-a)^2 + \sum_k \left(\hbar\omega + a^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) |f_k|^2$$

$$+ \sum_k \left[v_k^* f_k^* \exp \left(-\frac{\hbar}{4m\lambda} (1-a)^2 k^2 \right) \right] \quad (11)$$

حيث

$$f_k = \frac{-v_k^* \exp \left[-\left(\frac{\hbar}{4m\lambda} \right) (1-a)^2 k^2 \right]}{\hbar\omega + a^2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)} \quad (12)$$

كما نحصل من تعويض (١٢) في (١١) على:

$$E_0 = \frac{3}{4} \hbar\lambda (1-a)^2 - \sum_k \frac{|v_k|^2}{\hbar\omega + a^2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)} \exp \left(-\frac{\hbar}{2m\lambda} (1-a)^2 k^2 \right) \quad (13)$$

من أجل بولارون حر مع v_k ، مع الأخذ بعين الاعتبار المعادلة (٢)، يمكننا كتابة E_0 بالصيغة:

$$E_0 = \frac{3}{4} \lambda (1-a)^2 - \frac{2\alpha (1-\alpha)}{\pi a^2 \sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \frac{dx \exp(-x^2)}{\left[\frac{(1-a)^2}{a^2 \lambda} \right] + x^2} \quad (14)$$

حيث تم التعبير عن E_0 في وحدات طاقة الفونون البصرية، و λ بدلالة ω . بإدخال الرمز:

$$\frac{(1-a)}{a\sqrt{\lambda}} = t \quad (15)$$

وحساب التكامل في (١٤)، نحصل على:

$$E_0 = \frac{3}{4} \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{1}{t\sqrt{\lambda}}\right)} - \alpha (1 + t\sqrt{\lambda}) \exp(t^2) \operatorname{erf}(t) \quad (16)$$

حيث $\operatorname{erf}(t)$ تابع الخطأ. يتم تعيين λ في t من طريقة التغيير في الحساب.

٣. النتائج والمناقشة

لاختبار صحة نتائج الفقرة ٢ نناقش نتائج طاقة الحالة الأساسية (١٦) مع النتائج المتوفرة. يكون لدينا في حالة الترابط الضعيف للإلكترون-فونون ($\alpha \rightarrow 0$)، أن: $t \rightarrow 0$ ، $a \rightarrow 1$ المعادلة (١٥). يمكن في هذه الحالة كتابة الطاقة كما يلي:

$$E_0 = -\alpha - \left[\left(\alpha\sqrt{\lambda} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) t - \frac{3}{4} \lambda^2 t^2 \right] \quad (17)$$

يوجد لها نهاية صغرى عندما $t=0.29$ ، $\lambda = 5.09$. بالتعويض في (١٧)، نحصل على قيمة الطاقة التالية:

$$E_0 = -\alpha - 0.0163 \quad (18)$$

تتوافق هذه القيمة مع نتيجة نظرية الاضطراب من المرتبة الثانية من أجل الطاقة السالبة. ومع المرتبة الثانية بالنسبة لـ α من منشور فاينمان لحساب التكامل بالمسار [14]

$$E_0 = -\alpha - 0.0159 \alpha^2 \quad (19)$$

من أجل ترابط قوي للإلكترون-فونون ($\alpha > 10$)، فإن $a \rightarrow 0$ ، أو $t \rightarrow \infty$. يمكن بنشر تقريبي كتابة العلاقة (١٦) بالصيغة التالية:

$$E_0 = \frac{-\alpha^2}{3\pi} - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{t} - \frac{\alpha}{3\sqrt{\pi t^2}} \right) \quad (20)$$

مع $\lambda = \frac{4\alpha^2}{9\pi}$ ، $t = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ ، ينتج أن:

$$E_0 = -0.1061 \alpha^2 - 3.00 \quad (21)$$

التي تتوافق مع نتيجة فاينمان:

$$E_0 = -0.106 \alpha^2 - 2.83 \quad (22)$$

ومع نتائج حساب مارشال وميلس.

$$E_0 = -0.1085 \alpha^2 - 2.836 \quad (23)$$

عُرض في الجدول ١ قيم تم الحصول عليها من أجل الوسيط t و λ المحسوبتين من أخذ النهاية الصغرى للمعادلة (١٦) (بطريقة النفاير) الموافقة لطاقة الحالة الأساسية، وتمت مقارنتها مع النتائج المحسوبة بطريقة تقريب فاينمان، ومع نتيجة تطبيق نظرية الاضطراب من لارسون. ينتج من الجدول أن قيمة الطاقة E_0 وفق العلاقة (١٦) تنحرف بمقدار أقل من ١% عن نتائج مارشال وميلس وذلك من أجل كل قيم ثابت ارتباط إلكترون-فونون في المجال $\alpha < 3$. في الختام يمكن القول بأن النموذج المقدم في هذا العمل يُعطي تقريب جيد لحساب الطاقة الخاصة للبولارون. ويسمح الشكل البسيط للهاملتوني في (٩) والحالة الأساسية في (١٠) بإمكانية تعيين طاقة حالة الإثارة باستعمال قيم الوسطاء المعطاة في الجدول.

الجدول ١

مقارنة طاقة الحالة الأساسية E_0 وفق العلاقة (١٦) مع النتائج المحسوبة من قبل مارشال، وميلس، ومع النتائج المحسوبة باستخدام نظرية الاضطراب من قبل ميلس.

α	t	λ	نتائج العمل E_0	مارشال وميلس E_0	لارسون E_0
١	0.3	5.4	-1.0172	-1.02	-1.0160
2	0.07	5.6	-2.0732	-	-2.0640
3	0.12	5.7	-3.1758	-3.16	-3.1421
4	0.18	6.1	-4.3359	-	-4.2471
5	0.25	6,7	-5.5686	-5.52	-
6	0.40	7.2	-6.8970	-	-
7	0.54	8.4	-8.3515	-8.32	-
8	0.73	10.0	-9.9669	-	-
9	0.95	12.0	-11.7614	-11.7	-
10	1.1	14.7	-13.7618	-	-

المراجع

- [1] Landau L.D. and Lifshitz E.M., *Quantum Mechanics*, Oxford,pergamon, (1965).
- [2] А.И.Ансельм. *ВВЕДЕНИЕВТЕОРИЮПОЛУПРОВОДНИКОВ. МОСКВА (1978)*.
- [3] J.T. Devreese, "Polarons," in *Digital Encyclopedia of Applied Physics*, edited by G. L. Trigg (Wiley, online,2008). Article also available at cond-mat/0004497v2.
- [4] Fröhlich Н. *Philos. Mag. Suppl.*, 3, p.325, (1954)
- [5] В.В.Брыксии Д.Н.Мин. Ю.А.Фирсов. УФН. 113.29.1974
- [6] E.Evans, D.Mills. *properties of surface polaron in semi infinitesimal crystal. Phys,Rev.B8.4004,1973.*
- [7] J.Licari, *R.Evrard. Phys.B4, 15,1977.*
- [8] J.Hermanson. *Elem.Excitation. Sol. Mol.Atoms, P. 99-211,Part b. London- New York. 1974*

- [9] Y. Toyozawa. *Progr. Theor. Phys.* (Kyoto), 12, 421, 1954.
- [10] Monther Taha Al-mokayed, *The Surface Polaron Under The Effect of Magnetic Field. The Islamic University of Gaza.* 2005.
- [11] H. Fröhlich, *Adv. Phys.* 3, 325 (1954).
- [12] Введение пространственной дисперсии в диэлектрическую проницаемость кристалла в фтспектральной области случайно близких экситонных резонансов /С. И. Пекар, Б. Е. Цеквава//ЖЭТФ. - 1984. 87, вып. 3.-С. 1046-1057.
- [13] T. D. Lee, F. E. Low, and D. Pines, *Phys. Rev.* 90, 297 (1953).
- [14] Feynman R. P. *Slow Electrons in a polar Crystal.* -*phys. Rev.* 1955, v.97, N 3, P.660 – 665.