مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (4) العدد (6) 2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (4) No. (6) 2020

تصنيف السطوح التربيعية في الفضاء الإسقاطي ثلاثي الأبعاد

د. نبيل علي*
د. عصام ديبان**
ريم عيود***

(تاريخ الإيداع 14 / 10 / 2020 . قُبل للنشر 23 / 12 / 2020)

ملخص

نحاول في هذا البحث تصنيف السطوح التربيعية في الفضاء الإسقاطي ثلاثي الأبعاد $\mathbb{P}^3$، وذلك بالاعتماد على التحويلات الإسقاطية في هذا الفضاء إضافة إلى تصنيف السطوح التربيعية في الفضاء الإقليدي متبعين في ذلك منهج تطبيق التحويلات الموافقة (اللازمة) للإحداثيات على المعادلة العامة.

الكلمات المفتاحية: السطح التربيعي، الفضاء الإسقاطي، التحويلات الإسقاطية، التحويلات الإقليدية.

*استاذ مساعد _ قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة طرطوس .
** استاذ مساعد _ قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة البعث .
*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) _ قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة طرطوس .

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (4) العدد (6) 2020
Tartous University Journal **for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (4) No. (6) 2020**

Classification of the quadratic surfaces in the projective 3D-space

Dr. Nabil Ali *
Dr. Essam Deeban**
Reem Ayoud ***

(Received 14/ 10/ 2020 . Accepted 23/ 12 / 2020)

ABSTRACT

In this paper, we try to classification for quadratic surfaces in projective 3D-space $\mathbb{P}^3$, depending on projective transformations in this space in addition to the classification of quadratic surfaces in the Euclidean space followed by the method of applying the corresponding (necessary) transformations of coordinates on the general equation.

Keywords: Quadratic Surfaces, Projective space, Projective Transformations, Euclidean Transformations.

*Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University.
** Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Albaath University.
*** Master student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University.

مقدمة:

الهندسة الإسقاطية فرع مستقل من فروع الهندسة الرياضية مبني على نظام مسلمات خاص به. يرتبط ظهور الهندسة الإسقاطية باسم الباحث الهندسي الفرنسي بونسيلي (1788–1807) ، وذلك في النصف الأول من القرن التاسع عشر، من خلال تعريفه للموضوع الأساسي الذي تقوم عليه الهندسة الإسقاطية وهو:

" دراسة خصائص الأشكال الهندسية اللامتغيرة بالنسبة لأي إسقاط لهذه الأشكال ".

تدعى تلك الخصائص الهندسية– التي لا تتغير بالنسبة لأي إسقاط– بالخصائص الإسقاطية للشكل الهندسي[4].

ساهمت أبحاث كل من شتينر وشال بإغناء الهندسة الإسقاطية بمواضيع عديدة وهامة، إلّا أنهما درساها كجزء من الهندسة الأساسية، وليس كفرع هندسي مستقل عن باقي فروع الهندسة. ولم يحدث ذلك إلّا في النصف الثاني من القرن التاسع عشر، وذلك على يد الهندسي شتاود، من خلال إدخاله مفهوم كل من المستقيم الإسقاطي، المستوي الإسقاطي والفضاء الإسقاطي، وذلك اعتماداً على النقطة الواقعة في اللانهاية (النقطة القاصية)؛ إذ تم تعريف المستقيم الإسقاطي بأنه مستقيم يحتوي على نقطة واحدة فقط واقعة في اللانهاية، المستوي الإسقاطي بأنه مستوٍ يحتوي على مستقيم واحد فقط واقع في اللانهاية والفضاء الإسقاطي بأنه فضاء يحتوي على مستوٍ واحد فقط واقع في اللانهاية. وبذلك يكون شتاود قد حرر الهندسة الإسقاطية من مفاهيم القياس– التي قيدتها – لتصبح دراستها مقتصرة على خصائص التموضع المتبادل للأشكال الهندسية.

تلعب العناصر الواقعة في اللانهاية (النقطة، المستقيم، المستوي) دوراً أساسياً لا يختلف عن دور العناصر العادية (النقطة ،المستقيم، المستوي). [6]

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى إيجاد تصنيف للسطوح التربيعية في الفضاء الإسقاطي الثلاثي بالاعتماد على التحويلات الإسقاطية. مما يساهم في تسهيل دراسة السطوح والمنحنيات التربيعية؛ إذ تنتج عدة معادلات مشتقة من الشكل العام للسطح التربيعي وكل منها تمثل معادلة سطح تربيعي.

طرائق البحث ومواده:

يعتمد هذا البحث على التحويلات الإسقاطية في إيجاد تصنيف السطوح التربيعية في الفضاء الإسقاطي ثلاثي الأبعاد.

وذلك من خلال تحويل المعادلة العامة إلى إحدى المعادلات القياسية من خلال تطبيق التحويلات الهندسية للإحداثيات الإسقاطية.

الإحداثيات الإسقاطية: projective coordinates

يعتمد في الفضاء الإسقاطي مختلف الأبعاد على الإحداثيات المتجانسة homogeneous. coordinates تدعى (x_1, x_2)، حيث $x_2 \neq 0$ ، الإحداثيات المتجانسة لنقطة في الفضاء الإقليدي أحادي البعد،

كذلك يتم تمثيل أي نقطة في الفضاء الإقليدي ثنائي الأبعاد باستخدام الإحداثيات المتجانسة بالشكل (x_1, x_2, x_3) حيث $x_3 \neq 0$ ، وكما يتم تمثيل أي نقطة في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد باستخدام الإحداثيات المتجانسة بالشكل (x_1, x_2, x_3, x_4) حيث $x_4 \neq 0$. وبالتالي تكون الإحداثيات الإسقاطية في الفضاء الإسقاطي مختلف الابعاد هي الإحداثيات المتجانسة نفسها مع إلغاء شرط أن يكون الإحداثي الأخير غير مساوي للصفر. ففي الفضاء الإسقاطي ثنائي الأبعاد (المستوي الإسقاطي $\mathbb{P}^2$) يتم تمثيل أي نقطة بالمتجه(x_1, x_2, x_3)، في حال كانت $x_3 = 0$ عندئذٍ تكون النقطة واقعة في اللانهاية$(x_1, x_2, 0)$ S_∞.
[1] لا

تمثَّل النقاط في المستوي الإسقاطي بشكل وحيد؛ إذ يقابل كل نقطة من المستوي الإسقاطي عدد لانهائي من الثلاثيات الحقيقية، أي:

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1, x_2, x_3) \qquad ; \alpha \neq 0\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

إن أي نقطة (x, y) في المستوي الإقليدي$\mathbb{R}^2$ ، لها نقطة مقابلة في المستوي الإسقاطي$\mathbb{P}^2$ إحداثياتها المتجانسة$(x, y, 1)$. وبشكلٍ عام يتم تمثيل أي نقطة في الفضاء الإقليدي من البعد n بنقطة في الفضاء الإسقاطي بـ $n+1$ بعد.[2]

ترتبط الإحداثيات المتجانسة مع الإحداثيات الديكارتية في الفضاء الإسقاطي بالعلاقات:

$$x = \frac{x_1}{x_4}\,, y = \frac{x_2}{x_4}\ \,, z = \frac{x_3}{x_4}$$

التحويلات الإقليدية:[5]

يعطى التحويل الإقليدي(الانسحاب والدوران) في الهندسة الإقليدية بالعلاقات:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_1 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_2 \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_3 \end{cases}$$

يؤدي هذا التحويل– باختيار مناسب للمعاملات– عند تطبيقه على المعادلة العامة للسطح التربيعي في الفضاء الإقليدي إلى حذف الحدود الخطية والمستطيلة.

التحويلات الإسقاطية:

التحويل الإسقاطي هو مفهوم يستخدم في الهندسة الإسقاطية لوصف كيفية تحويل مجموعة من الكائنات الهندسية إلى مجموعة أخرى من الكائنات الهندسية في الفضاء الإسقاطي.

تعريف: [3]

التحويل الإسقاطي في الفضاء الإسقاطي ثلاثي الأبعاد هو تحويل خطي على متجهات رباعية متجانسة، يمثل بالشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{32} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

أو يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{13}x'_3 + c_{14}x'_4 \\ x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{23}x'_3 + c_{24}x'_4 \\ x_3 = c_{31}x'_1 + c_{32}x'_2 + c_{33}X'_3 + c_{34}x'_4 \\ x_4 = c_{41}x'_1 + c_{42}x'_2 + c_{43}x'_3 + c_{44}x'_4 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

نأخذ معادلة السطح التربيعي في القضاء الإقليدي:[5]

$$\varphi(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_4 = 0$$

بوضع:

$$x = \frac{x_1}{x_4}\ , y = \frac{x_2}{x_4}\ , z = \frac{x_3}{x_4}$$

نحصل على المعادلة العامة للسطح التربيعي في الفضاء الإسقاطي:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$$
$$+2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

لا يلعب مفهوم القياس أي دور على الإطلاق في الهندسة الإسقاطية، لذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 +$$
$$x_3x_4 = 0$$

تنويه: كتبنا المعادلة السابقة بأمثال مساوية للواحد لتسهيل حل المعادلات، علماً أن هذا لا يؤثر على عمومية المسألة.

بتطبيق التحويل الإسقاطي الخطي المتجانس (1) على معادلة السطح التربيعي في الفضاء الإسقاطي، نحصل على المعادلة الآتية:

$$(c_{11}^2 + c_{11}c_{21} + c_{21}^2 + c_{11}c_{31} + c_{21}c_{31} + c_{31}^2 + c_{11}c_{41} + c_{21}c_{41} + c_{31}c_{41} +$$
$$c_{41}^2)x_1'^2 + (2c_{11}c_{12} + c_{12}c_{21} + c_{11}c_{22} + 2c_{21}c_{22} + c_{12}c_{31} + c_{22}c_{31} + c_{11}c_{32} + c_{21}c_{32} +$$
$$2c_{31}c_{32} + c_{12}c_{41} + c_{22}c_{41} + c_{32}c_{41} + c_{11}c_{42} + c_{21}c_{42} + c_{31}c_{42} + 2c_{41}c_{42})x'_1\ x'_2 +$$
$$(c_{12}^2 + c_{12}c_{22} + c_{22}^2 + c_{12}c_{32} + c_{22}c_{32} + c_{32}^2 + c_{12}c_{42} + c_{22}c_{42} + c_{32}c_{42} + c_{42}^2)x_2'^2 +$$
$$(2c_{11}c_{13} + c_{13}c_{21} + c_{11}c_{23} + 2c_{21}c_{23} + c_{13}c_{31} + c_{23}c_{31} + c_{11}c_{33} + c_{21}c_{33} +$$

$2c_{31}c_{33} + c_{13}c_{41} + c_{23}c_{41} + c_{33}c_{41} + c_{11}c_{43} + c_{21}c_{43} + c_{31}c_{43} + 2c_{41}c_{43})x_1' x_3' +$
$(2c_{12}c_{13} + c_{13}c_{22} + c_{12}c_{23} + 2c_{22}c_{23} + c_{13}c_{32} + c_{23}c_{32} + c_{12}c_{33} + c_{22}c_{33} +$
$2c_{32}c_{33} +$
$c_{13}c_{42} + c_{23}c_{42} + c_{33}c_{42} + c_{12}c_{43} + c_{22}c_{43} + c_{32}c_{43} + 2c_{42}c_{43})x_2' x_3' +$
$(c_{13}^2 + c_{13}c_{23} + c_{23}^2 + c_{13}c_{33} + c_{23}c_{33} + c_{33}^2 + c_{13}c_{43} + c_{23}c_{43} + c_{33}c_{43} +$
$c_{43}^2)x_3'^2 + (2c_{11}c_{14} + c_{14}c_{21} + c_{11}c_{24} + 2c_{21}c_{24} + c_{14}c_{31} + c_{24}c_{31} + c_{11}c_{34} +$
$c_{21}c_{34} + 2c_{31}c_{34} + c_{14}c_{41} + c_{24}c_{41} + c_{34}c_{41} + c_{11}c_{44} + c_{21}c_{44} +$
$c_{31}c_{44} + 2c_{41}c_{44})x_1' x_4' + (2c_{12}c_{14} + c_{14}c_{22} + c_{12}c_{24} + 2c_{22}c_{24} + c_{14}c_{32} +$
$c_{24}c_{32} + c_{12}c_{34} + c_{22}c_{34} + 2c_{32}c_{34} + c_{14}c_{42} + c_{24}c_{42} + c_{34}c_{42} + c_{12}c_{44} +$
$c_{22}c_{44} + c_{32}c_{44} + 2c_{42}c_{44})x_2' x_4' + (2c_{13}c_{14} + c_{14}c_{23} + c_{13}c_{24} +$
$2c_{23}c_{24} + c_{14}c_{33} + c_{24}c_{33} + c_{13}c_{34} + c_{23}c_{34} + 2c_{33}c_{34} + c_{14}c_{43} + c_{24}c_{43} +$
$c_{34}c_{43} + c_{13}c_{44} + c_{23}c_{44} + c_{33}c_{44} + 2c_{43}c_{44})\ x_3' x_4' + (c_{14}^2 +$
$c_{14}c_{24} + c_{24}^2 + c_{14}c_{34} + c_{24}c_{34} + c_{34}^2 + c_{14}c_{44} + c_{24}c_{44} + c_{34}c_{44} + c_{44}^2)\ x_4'^2 = 0$

سيؤدي هذا التحويل الإسقاطي إلى حذف الحدود المستطيلة ، وهنا نميز الحالات الآتية:

- رتبة مصفوفة أمثال المعادلة العامة تساوي 4،عندئذٍ نحل جملة المعادلات الآتية:

$$2c_{11}c_{12} + c_{12}c_{21} + c_{11}c_{22} + 2c_{21}c_{22} + c_{12}c_{31} + c_{22}c_{31} + c_{11}c_{32} + c_{21}c_{32} + 2c_{31}c_{32} + c_{12}c_{41} + c_{22}c_{41} + c_{32}c_{41} + c_{11}c_{42} + c_{21}c_{42} + c_{31}c_{42} + 2c_{41}c_{42} = 0$$

$$2c_{11}c_{13} + c_{13}c_{21} + c_{11}c_{23} + 2c_{21}c_{23} + c_{13}c_{31} + c_{23}c_{31} + c_{11}c_{33} + c_{21}c_{33} + 2c_{31}c_{33} + c_{13}c_{41} + c_{23}c_{41} + c_{33}c_{41} + c_{11}c_{43} + c_{21}c_{43} + c_{31}c_{43} + 2c_{41}c_{43} = 0$$

$$2c_{12}c_{13} + c_{13}c_{22} + c_{12}c_{23} + 2c_{22}c_{23} + c_{13}c_{32} + c_{23}c_{32} + c_{12}c_{33} + c_{22}c_{33} + 2c_{32}c_{33} + c_{13}c_{42} + c_{23}c_{42} + c_{33}c_{42} + c_{12}c_{43} + c_{22}c_{43} + c_{32}c_{43} + 2c_{42}c_{43} = 0$$

$$2c_{11}c_{14} + c_{14}c_{21} + c_{11}c_{24} + 2c_{21}c_{24} + c_{14}c_{31} + c_{24}c_{31} + c_{11}c_{34} + c_{21}c_{34} + 2c_{31}c_{34} + c_{14}c_{41} + c_{24}c_{41} + c_{34}c_{41} + c_{11}c_{44} + c_{21}c_{44} + c_{31}c_{44} + 2c_{41}c_{44} = 0$$

$$2c_{12}c_{14} + c_{14}c_{22} + c_{12}c_{24} + 2c_{22}c_{24} + c_{14}c_{32} + c_{24}c_{32} + c_{12}c_{34} + c_{22}c_{34} + 2c_{32}c_{34} + c_{14}c_{42} + c_{24}c_{42} + c_{34}c_{42} + c_{12}c_{44} + c_{22}c_{44} + c_{32}c_{44} + 2c_{42}c_{44} = 0$$

$$2c_{13}c_{14} + c_{14}c_{23} + c_{13}c_{24} + 2c_{23}c_{24} + c_{14}c_{33} + c_{24}c_{33} + c_{13}c_{34} + c_{23}c_{34} + 2c_{33}c_{34} + c_{14}c_{43} + c_{24}c_{43} + c_{34}c_{43} + c_{13}c_{44} + c_{23}c_{44} + c_{33}c_{44} + 2c_{43}c_{44} = 0$$

نلاحظ أنها ست معادلات ب 16 متغير، نعتبر ستة منها أساسية والباقي اختيارية، أي نحل هذه المعادلات بالنسبة لستة متغيرات ولتكن $c_{11}, c_{44}, c_{33}, c_{31}, c_{24}, c_{34}$ ، نضع على سبيل المثال:

$c_{23} = 0\ ,\ c_{14} = 1\ ,\ c_{12} = 1,\ c_{32} = 0\ ,\ c_{41} = 1\ ,\ c_{22} = 1\ ,\ c_{13} = 0\ ,\ c_{42} = 0\ ,$
$c_{43} = 1\ ,\ c_{21} = 1$

عندئذٍ تكون قيم المتغيرات الأساسية هي:

$$c_{11} = -\frac{7}{3}\ ,\ c_{44} = 3\ ,\ c_{33} = -1\ ,\ c_{31} = 1\ ,\qquad c_{24} = -5\ , c_{34} = 3$$

وبالتالي نحصل على التحويل الإسقاطي الآتي:

$$x_1 = -\frac{7}{3}x_1' + x_2' + x_4'$$
$$x_2 = x_1' + x_2' - 5x_4'$$
$$x_3 = x_1' - x_3' + 3x_4'$$
$$x_4 = x_1' + x_3' + 3x_4'$$

نعوض هذا التحويل في معادلة السطح نحصل على المعادلة :

$$\frac{40}{9}x_1'^2 + 3x_2'^2 + x_3'^2 + 24x_4'^2 = 0$$

ما يهمنا من هذه المعادلة إشارة الحدود(هنا الحدود جميعها من إشارة واحدة)، وبالتالي نحصل على الشكل القياسي:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0$$

كذلك باختيار مناسب للمتغيرات الاختيارية نحصل على الأشكال التالية:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = 0$$
$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 = 0$$

- رتبة المصفوفة تساوي 3، عندئذٍ نحل جملة المعادلات الآتية:

$$2c_{11}c_{12} + c_{12}c_{21} + c_{11}c_{22} + 2c_{21}c_{22} + c_{12}c_{31} + c_{22}c_{31} + c_{11}c_{32} + c_{21}c_{32} + 2c_{31}c_{32} + c_{12}c_{41} + c_{22}c_{41} + c_{32}c_{41} + c_{11}c_{42} + c_{21}c_{42} + c_{31}c_{42} + 2c_{41}c_{42} = 0$$
$$2c_{11}c_{13} + c_{13}c_{21} + c_{11}c_{23} + 2c_{21}c_{23} + c_{13}c_{31} + c_{23}c_{31} + c_{11}c_{33} + c_{21}c_{33} + 2c_{31}c_{33} + c_{13}c_{41} + c_{23}c_{41} + c_{33}c_{41} + c_{11}c_{43} + c_{21}c_{43} + c_{31}c_{43} + 2c_{41}c_{43} = 0$$
$$2c_{12}c_{13} + c_{13}c_{22} + c_{12}c_{23} + 2c_{22}c_{23} + c_{13}c_{32} + c_{23}c_{32} + c_{12}c_{33} + c_{22}c_{33} + 2c_{32}c_{33} + c_{13}c_{42} + c_{23}c_{42} + c_{33}c_{42} + c_{12}c_{43} + c_{22}c_{43} + c_{32}c_{43} + 2c_{42}c_{43} = 0$$
$$2c_{11}c_{14} + c_{14}c_{21} + c_{11}c_{24} + 2c_{21}c_{24} + c_{14}c_{31} + c_{24}c_{31} + c_{11}c_{34} + c_{21}c_{34} + 2c_{31}c_{34} + c_{14}c_{41} + c_{24}c_{41} + c_{34}c_{41} + c_{11}c_{44} + c_{21}c_{44} + c_{31}c_{44} + 2c_{41}c_{44} = 0$$
$$2c_{12}c_{14} + c_{14}c_{22} + c_{12}c_{24} + 2c_{22}c_{24} + c_{14}c_{32} + c_{24}c_{32} + c_{12}c_{34} + c_{22}c_{34} + 2c_{32}c_{34} + c_{14}c_{42} + c_{24}c_{42} + c_{34}c_{42} + c_{12}c_{44} + c_{22}c_{44} + c_{32}c_{44} + 2c_{42}c_{44} = 0$$
$$2c_{13}c_{14} + c_{14}c_{23} + c_{13}c_{24} + 2c_{23}c_{24} + c_{14}c_{33} + c_{24}c_{33} + c_{13}c_{34} + c_{23}c_{34} + 2c_{33}c_{34} + c_{14}c_{43} + c_{24}c_{43} + c_{34}c_{43} + c_{13}c_{44} + c_{23}c_{44} + c_{33}c_{44} + 2c_{43}c_{44} = 0$$
$$c_{14}^2 + c_{14}c_{24} + c_{24}^2 + c_{14}c_{34} + c_{24}c_{34} + c_{34}^2 + c_{14}c_{44} + c_{24}c_{44} + c_{34}c_{44} + c_{44}^2 = 0$$

تنويه: هنا جعلنا أمثال $x_4'^2$ مساوية للصفر كان من الممكن اختيار أمثال $x_3'^2$ أو $x_2'^2$ أو $x_1'^2$.

نحل هذه المعادلات بالنسية للمتغيرات:

$$c_{11}, c_{44}, c_{33}, c_{31}, c_{24}, c_{34}, c_{14}$$

نعطي قيم للمتغيرات الاختيارية ولتكن:

$$c_{23} = 1\ ,\ \ c_{12} = 1\ , c_{32} = 0\ , c_{41} = 1\ , c_{22} = 0\ , c_{13} = 1\ , c_{42} = 0\ , c_{43} = 1\ , c_{21} = 1$$

فنحصل على قيم المتغيرات الأساسية:

$$c_{11} = -1, c_{44} = 0, c_{33} = -4, c_{31} = 0, c_{24} = 0, c_{34} = 0, c_{14} = 0$$

وبالتالي يكون التحويل الإسقاطي هو:

$$x_1 = -x_1' + x_2' + x_3'$$
$$x_2 = x_1' + x_3'$$
$$x_3 = -4x_3'$$
$$x_4 = x_1' + x_3'$$

وبتعويض هذا التحويل الإسقاطي في معادلة السطح نحصل على المعادلة الآتية:

$$2x_1'^2 + x_2'^2 + 10x_3'^2 = 0$$

أي نحصل على الشكل القياسي:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0$$

كذلك باختيار مناسب للمتغيرات الاختيارية نحصل على الشكل الآتي:

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$$

- رتبة المصفوفة تساوي2، عندئذٍ نحل جملة المعادلات الآتية:

$$2c_{11}c_{12} + c_{12}c_{21} + c_{11}c_{22} + 2c_{21}c_{22} + c_{12}c_{31} + c_{22}c_{31} + c_{11}c_{32} + c_{21}c_{32} + 2c_{31}c_{32} + c_{12}c_{41} + c_{22}c_{41} + c_{32}c_{41} + c_{11}c_{42} + c_{21}c_{42} + c_{31}c_{42} + 2c_{41}c_{42} = 0$$
$$2c_{11}c_{13} + c_{13}c_{21} + c_{11}c_{23} + 2c_{21}c_{23} + c_{13}c_{31} + c_{23}c_{31} + c_{11}c_{33} + c_{21}c_{33} + 2c_{31}c_{33} + c_{13}c_{41} + c_{23}c_{41} + c_{33}c_{41} + c_{11}c_{43} + c_{21}c_{43} + c_{31}c_{43} + 2c_{41}c_{43} = 0$$
$$2c_{12}c_{13} + c_{13}c_{22} + c_{12}c_{23} + 2c_{22}c_{23} + c_{13}c_{32} + c_{23}c_{32} + c_{12}c_{33} + c_{22}c_{33} + 2c_{32}c_{33} + c_{13}c_{42} + c_{23}c_{42} + c_{33}c_{42} + c_{12}c_{43} + c_{22}c_{43} + c_{32}c_{43} + 2c_{42}c_{43} = 0$$
$$2c_{11}c_{14} + c_{14}c_{21} + c_{11}c_{24} + 2c_{21}c_{24} + c_{14}c_{31} + c_{24}c_{31} + c_{11}c_{34} + c_{21}c_{34} + 2c_{31}c_{34} + c_{14}c_{41} + c_{24}c_{41} + c_{34}c_{41} + c_{11}c_{44} + c_{21}c_{44} + c_{31}c_{44} + 2c_{41}c_{44} = 0$$
$$2c_{12}c_{14} + c_{14}c_{22} + c_{12}c_{24} + 2c_{22}c_{24} + c_{14}c_{32} + c_{24}c_{32} + c_{12}c_{34} + c_{22}c_{34} + 2c_{32}c_{34} + c_{14}c_{42} + c_{24}c_{42} + c_{34}c_{42} + c_{12}c_{44} + c_{22}c_{44} + c_{32}c_{44} + 2c_{42}c_{44} = 0$$
$$2c_{13}c_{14} + c_{14}c_{23} + c_{13}c_{24} + 2c_{23}c_{24} + c_{14}c_{33} + c_{24}c_{33} + c_{13}c_{34} + c_{23}c_{34} + 2c_{33}c_{34} + c_{14}c_{43} + c_{24}c_{43} + c_{34}c_{43} + c_{13}c_{44} + c_{23}c_{44} + c_{33}c_{44} + 2c_{43}c_{44} = 0$$
$$c_{14}^2 + c_{14}c_{24} + c_{24}^2 + c_{14}c_{34} + c_{24}c_{34} + c_{34}^2 + c_{14}c_{44} + c_{24}c_{44} + c_{34}c_{44} + c_{44}^2 = 0$$
$$c_{13}^2 + c_{13}c_{23} + c_{23}^2 + c_{13}c_{33} + c_{23}c_{33} + c_{33}^2 + c_{13}c_{43} + c_{23}c_{43} + c_{33}c_{43} + c_{43}^2 = 0$$

تنويه: هنا جعلنا أمثال ${x'_4}^2$ و ${x'_3}^2$ مساوية للصفر كان من الممكن أيضاً اختيار أمثال ${x'_2}^2$ أو ${x'_1}^2$.

نحلها بالنسبة للمتغيرات : $c_{12}, c_{44}, c_{33}, c_{31}, c_{24}, c_{34}, c_{41}, c_{13}$ وباعتبار:

$$c_{11} = 0\,, c_{22} = 0\,, c_{32} = 1\,, c_{42} = 0\,, c_{14} = 0\,, c_{23} = 0\,, c_{43} = 0\,, c_{21} = 1$$

نحصل على :

$$c_{12} = -\frac{1}{2}, c_{44} = 0, c_{33} = 0\,, c_{31} = 0\,, c_{24} = 0\,, c_{34} = 0\,, c_{41} = -1\,, c_{13} = 0$$

وبالتالي يصبح التحويل الإسقاطي:

$$x_1 = -\frac{1}{2}x'_2$$
$$x_2 = x'_1$$
$$x_3 = x'_2$$
$$x_4 = -x'_1$$

نعوض هذا التحويل في معادلة السطح نحصل على المعادلة:

$${x'_1}^2 + \frac{3}{4}{x'_2}^2 = 0$$

أي حصلنا على الشكل القياسي:

$${x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$$

كذلك باختيار مناسب للمتغيرات الاختيارية نحصل على الشكل الآتي:

$${x'_1}^2 - {x'_2}^2 = 0$$

تنويه: كان من الممكن أن تكون المعادلات بدلالة x'_4 أو x'_3 .

- رتبة المصفوفة تساوي 1، عندئذٍ نحل جملة المعادلات الآتية:

$$2c_{11}c_{12} + c_{12}c_{21} + c_{11}c_{22} + 2c_{21}c_{22} + c_{12}c_{31} + c_{22}c_{31} + c_{11}c_{32} + c_{21}c_{32} + 2c_{31}c_{32} + c_{12}c_{41} + c_{22}c_{41} + c_{32}c_{41} + c_{11}c_{42} + c_{21}c_{42} + c_{31}c_{42} + 2c_{41}c_{42} = 0$$
$$2c_{11}c_{13} + c_{13}c_{21} + c_{11}c_{23} + 2c_{21}c_{23} + c_{13}c_{31} + c_{23}c_{31} + c_{11}c_{33} + c_{21}c_{33} + 2c_{31}c_{33} + c_{13}c_{41} + c_{23}c_{41} + c_{33}c_{41} + c_{11}c_{43} + c_{21}c_{43} + c_{31}c_{43} + 2c_{41}c_{43} = 0$$
$$2c_{12}c_{13} + c_{13}c_{22} + c_{12}c_{23} + 2c_{22}c_{23} + c_{13}c_{32} + c_{23}c_{32} + c_{12}c_{33} + c_{22}c_{33} + 2c_{32}c_{33} + c_{13}c_{42} + c_{23}c_{42} + c_{33}c_{42} + c_{12}c_{43} + c_{22}c_{43} + c_{32}c_{43} + 2c_{42}c_{43} = 0$$

$$2c_{11}c_{14}+c_{14}c_{21}+c_{11}c_{24}+2c_{21}c_{24}+c_{14}c_{31}+c_{24}c_{31}+c_{11}c_{34}+c_{21}c_{34}+2c_{31}c_{34}+c_{14}c_{41}+c_{24}c_{41}+c_{34}c_{41}+c_{11}c_{44}+c_{21}c_{44}+c_{31}c_{44}+2c_{41}c_{44}=0$$
$$2c_{12}c_{14}+c_{14}c_{22}+c_{12}c_{24}+2c_{22}c_{24}+c_{14}c_{32}+c_{24}c_{32}+c_{12}c_{34}+c_{22}c_{34}+2c_{32}c_{34}+c_{14}c_{42}+c_{24}c_{42}+c_{34}c_{42}+c_{12}c_{44}+c_{22}c_{44}+c_{32}c_{44}+2c_{42}c_{44}=0$$
$$2c_{13}c_{14}+c_{14}c_{23}+c_{13}c_{24}+2c_{23}c_{24}+c_{14}c_{33}+c_{24}c_{33}+c_{13}c_{34}+c_{23}c_{34}+2c_{33}c_{34}+c_{14}c_{43}+c_{24}c_{43}+c_{34}c_{43}+c_{13}c_{44}+c_{23}c_{44}+c_{33}c_{44}+2c_{43}c_{44}=0$$
$$c_{14}^2+c_{14}c_{24}+c_{24}^2+c_{14}c_{34}+c_{24}c_{34}+c_{34}^2+c_{14}c_{44}+c_{24}c_{44}+c_{34}c_{44}+c_{44}^2=0$$
$$c_{11}^2+c_{11}c_{21}+c_{21}^2+c_{11}c_{31}+c_{21}c_{31}+c_{31}^2+c_{11}c_{41}+c_{21}c_{41}+c_{31}c_{41}+c_{41}^2=0$$
$$c_{13}^2+c_{13}c_{23}+c_{23}^2+c_{13}c_{33}+c_{23}c_{33}+c_{33}^2+c_{13}c_{43}+c_{23}c_{43}+c_{33}c_{43}+c_{43}^2=0$$

نحلها بالنسبة للمتغيرات: $c_{43}, c_{44}, c_{33}, c_{31}, c_{24}, c_{42}, c_{34}, c_{41}, c_{13}$

$$c_{11}=0, c_{22}=0, c_{32}=0, c_{14}=0, c_{23}=0, c_{12}=1, c_{21}=0$$

نحصل على :

$$c_{43}=0, c_{44}=0, c_{33}=0, c_{31}=0, c_{24}=0, c_{42}=1, c_{34}=0, c_{41}=0, c_{13}=0$$

وبالتالي يصبح التحويل الإسقاطي:

$$x_1=x'_2$$
$$x_4=x'_2$$

نعوض هذا التحويل في معادلة السطح نحصل على المعادلة:

$$3{x'_2}^2=0$$

أي حصلنا على الشكل القياسي:

$${x'_2}^2=0$$

تنويه: كان من الممكن أن تكون المعادلات بدلالة x'_4 أو x'_3 أو x'_1.

الاستنتاجات والتوصيات:

جميع السطوح التربيعية في الفضاء الإسقاطي ثلاثي الأبعاد، تأخذ أحد الأشكال الآتية تبعاً لرتبة المصفوفة.

رتبة المصفوفة تساوي4، عندئذٍ تأخذ معادلة السطح الأشكال الآتية:

$${x'_1}^2+{x'_2}^2+{x'_3}^2+{x'_4}^2=0$$
$${x'_1}^2+{x'_2}^2+{x'_3}^2-{x'_4}^2=0$$
$${x'_1}^2+{x'_2}^2-{x'_3}^2-{x'_4}^2=0$$

رتبة المصفوفة تساوي 3، عندئذٍ تأخذ معادلة السطح الأشكال الآتية:

$${x'_1}^2+{x'_2}^2+{x'_3}^2=0$$
$${x'_1}^2+{x'_2}^2-{x'_3}^2=0$$

رتبة المصفوفة تساوي 2، عندئذٍ تأخذ معادلة السطح الأشكال الآتية:

$${x'_1}^2+{x'_2}^2=0$$
$${x'_1}^2-{x'_2}^2=0$$

رتبة المصفوفة تساوي 1، عندئذٍ تأخذ معادلة السطح الشكل الآتي:

$${x'_1}^2=0$$

نظراً لأن المنحني التربيعي هو تقاطع سطحين أحدهما على الأقل تربيعي، لذلك نوصي بإيجاد تصنيف للمنحنيات التربيعية في الفضاء الإسقاطي ثلاثي الأبعاد.

المراجع:

[1]- DUBROFSKY ,E.2009 , *Homography Estimation, A Master's Essay*, Columbia University, British,32.

[2]- HARTLEY,R ; ZISSERMAN,A.2004 ,*Multiple View Geometry in Computer Vision*.2, Cambridge University Press, New York,673.

[3]- KlEIN , F.2016 , *Projective Transformations*, Heidelberg, Berlin.

[4]- MUNDY , J, L; ZISSERMAN, A.1992 , *Geometric Invariance In Computer Vision*, MA:MIT Press, Cambridge.

[5]- ديبان، عصام. (2017-2018). *الهندسة التحليلية*، منشورات جامعة البعث، 296.

[6]- ديبان، عصام. (2016-2017). *أسس الهندسة الإقليدية واللاإقليدية*، منشورات جامعة البعث، 99.