مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (6) 2022
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (6) 2022

دراسة تحليلية لسلوك حلول المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب

د. منال حسين *
د . محمد معلا***
منار عجي***

(تاريخ الإيداع 12/6/ 2022 – تاريخ النشر16/11/ 2022)

□ ملخّص □

يخصص هذا البحث لدراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب والمتأخر بالشكل الآتي:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)f\left(x\big(\theta(t)\big), r(t)z'(t)\right) = 0$$

وأيضاً المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد الأعظمي المميزة بالشكل الآتي:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)\max_{s\in[\theta(t),t]} f\big(x(s), r(t)z'(t)\big) = 0$$

حيث$z(t) = x(t) - a(t)x(\theta(t))$، وذلك باعتماد على بعض التمهيديات للحصول على النتائج المطلوبة.

كلمات مفتاحية: نصف الخطية المعممة – الحد الأعظمي – المحايد السالب–الحد المتأخر– تحويل ريكاتي.

* مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس.
** مدرس في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا.
*** طالبة دراسات عليا(ماجستير)– قسم الرياضيات–كلية العلوم– جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (6) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (6) 2022

Behavior of solutions of a Generalized Half- Linear Second Order Differential Equation with Negative Neutral term (analytical study)

Dr . Manal Hussien*

Dr . Mohammad Moalla**

Manar age***

(Received 12/6/2022.Accepted 16/11/2022)

□ABSTRACT □

This research is devoted to studying the oscillation of generalized half linear second order differential equation with the negative and delayed neutral term as follows:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)f\left(x(\theta(t)), r(t)z'(t)\right) = 0$$

Also, the generalized half-linear differential equation of the second order with max term featured by the following form:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)\max_{s\in[\theta(t),t]} f(x(s), r(t)z'(t)) = 0$$

Where $z(t) = x(t) - a(t)x(\theta(t))$ Depending on some premise to get the desired results.

Key words: Generalized Half-Liner – Max term – Negative Neutral – Delay term-Riccati Transformation.

* Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University.

** Lecturer, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University, Tartous, Syria

. *** Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University.

مقدمة:

أهمية المعادلات التفاضلية في حياتنا اليومية لا تنحصر على تطبيق أو ظاهرة أو مثال معين لأنها تساعدنا في وصف وتقديم وشرح آلية عمل هذه الظواهر منها انتشار الأمراض، آلية عمل الكهربائيات، التغيير المناخي، الانفجارات النووية والكثير الكثير من الظواهر، وجميعها يعبر عنها بصور رياضية.

بشكل خاص المعادلات التفاضلية نصف الخطية ذات الحد المحايد السالب تعتبر تعميم لمسألة شتورم_ليوفيل الخطية التي كانت موضوع دراسة للكثير من الباحثين في مجال الفيزياء، وأيضاً المعادلات التفاضلية ذات الحد الأعظمي، إذ تدخل في عمل أنظمة التحكم الآلي وفي الشبكات الكترونية.

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية من المرتبة الثانية بالشكل الآتي:

$$\left(r(t)\phi\left(x'(t)\right)\right)' + c(t)\phi\left(x(t)\right) = 0 \qquad (1)$$

حيث أن $r(t) > 0$ مهما تكن $t \in \mathbb{R}$ و $c(t)$ تابعان مستمران، كما أن $\phi(x) = |x|^{p-1}sgn(x)$ وذلك من أجل $p > 1$. تسمى المعادلة(1) بالمعادلة الكلاسيكية مع التابع x والمتحول المستقل t، وهي معادلة تفاضلية خطية بالنسبة إلى التابع $\phi(x)$ غير الخطي بالنسبة لـx، أي أنها غير خطية بالنسبة إلى التابع x.

يعد الباحث بيهاري Bihari أول من وضع المعادلة التفاضلية نصف الخطية من المرتبة الثانية في[1] عام ١٩٦٦ م مركزاً على فضاء الحلول لهذه المعادلة، فإذا كان $x(t)$ حل للمعادلة (2) فإن $\lambda x(t)$ حل أيضاً. توصل إلبرت Elbert في عام ١٩٨٧ م في [2] لبعض المعايير التي تخضع لها أمثال المعادلة كي تصبح متذبذبة [3].

المعادلة المعممة متذبذبة إذا تحقق الآتي:

$$\mathrm{c(t)} > 0, \int^{\infty} \mathrm{c(t)} = +\infty, \int^{\infty} \frac{1}{\mathrm{r(t)}} \mathrm{dt} = +\infty$$

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية بالشكل الآتي: [5]

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)f\left(x(t), r(t)x'(t)\right) = 0 \qquad (2)$$
$$f(x, rx') := \emptyset(x)|rx'|^{2-p}; r(t) > 0, \forall t \in R$$

حيث التابع $f(x,y)$ يتمتع بالخواص الآتية:

١) التابع $f(x,y)$ مستمر على المنطقة $\Omega = R \times R\backslash\{0\}$،

٢) اذا كان $xy \neq 0$ فإن التابع $f(x,y)$ يحقق العلاقة $xf(x,y) > 0$،

٣) التابع متجانس من الدرجة الأولى أي $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$ أياً كانت $\lambda \in R$،

٤) تضمن نظامية التابع $f(x,y)$ وجود ووحدانية الحل، وبالتالي من أجل أي نقطة $(x_1, x_2) \in R \times R^*$ يوجد حل $x(t_0)$ يحقق الشرطين $x(t_0) = x_1, x'(t_0) = x_2$.

يقصد بتذبذب المعادلة (2) (Oscillation) هو أن يملك كل حل من حلولها عدداً لانهائياً من الأصفار على مجال ما $I \in R$، أما عدم التذبذب (Non–Oscillation) فهو أن يوجد حل ما للمعادلة (2) بحيث يملك عدداً منتهياً من الأصفار على ذلك المجال[3].

وبصورة رياضية $x(t)$ حل المعادلة (2) متذبذب إذا وجدت متتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ تحقق أن :

$$x(t_n) = 0, \forall n \geq n_0; n_0 \in \mathrm{N}$$

درس الباحثان Došlý و $\check{R}ezní\check{c}ková$الحلول الأساسية للمعادلة (2) في [4] وبعد ذلك وضع الباحثان $Do\check{s}l\acute{y}$و $Bogn\acute{a}r$ معايير مهمة في [5] من أجل تذبذب المعادلة (2).

درس الباحثان Marík و $Fi\check{s}narov\acute{a}$ في[7] تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية ذات الحد المتأخر ثم ذات الحد المحايد و وضعا معايير لتذبذب هذه المعادلة من خلال تذبذب المعادلة الكلاسيكية عام ٢٠١٣م .

المعادلة$\left[\emptyset\left(x'(t)\right)\right]' + \lambda c(t)\emptyset(x(\tau(t))) = 0$ متذبذبة عندما تكون المعادلة

$\left[\phi\left(x'(t)\right)\right]' + \lambda c(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{p-1}\phi\left(x(t)\right) = 0$ متذبذبة.

ثم عمل الباحثان في [6] على إيجاد معيار لتذبذب المعادلات ذات الحد المتأخر وذلك باستخدام تحويل ريكاتي.

اهتم الباحث Selvarangam و آخرون بدراسة المعادلة التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد في[8]، حيث تم وضع عدة معايير لمعالجة مسالة تذبذب حلول ذلك النوع من المعادلات.

أجرى الباحث سامي انجرو وآخرون حديثاً دراسة تحليلية لسلوك حلول المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد الموجب في[9]، وأيضاً المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد والأعظمي[10]، وعملوا على إيجاد معيار لتذبذب المعادلة التفاضلية ذات الحد المتأخر ثم المعادلات ذات الحد المتأخر والمحايد.

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)\left(1 - a\left(\tau(t)\right)\right)^{p-1}\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{p-1} f\left(x(t), r(t)x'(t)\right) = 0$$

حيث أن

$$r'(t) \geq 0 \text{ و } \int^{\infty}\frac{1}{r(t)}dt = +\infty \text{ و } \int_T^{\infty} c(t)[[1 - a(\tau(t))]^{p-1}(\tau(t))^{p-1}dt = +\infty$$

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث من أنه يعطي دراسة تحليلية لسلوك حلول المعادلة (2)، وهي معادلة تفاضلية نصف خطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحدً المحايدِ. إن لهذه الدراسة دور هام في معرفة سلوك الظواهر التي تصفها تلك المعادلة وبالتالي إمكانية التحكم بنتائج تلك الظواهر، ولذلك فإن هذا البحث يعد على درجة كبيرة من الأهمية للباحثين في المجالات العلمية النظرية والتطبيقية. يهدف البحث إلى دراسة السلوك اللانهائي لحلول المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب والأعظمي، من حيث التذبذب.

طرائق البحث ومواده:

يندرج هذا البحث ضمن اختصاص الرياضيات التطبيقية، وبشكل خاص في مجال نظرية المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد بشكل أساسي على طرائق الدراسة التحليلية للمعادلات التفاضلية العادية.

النتائج والمناقشة:

سنهتم في بداية بحثنا بدراسة المعادلة المعممة التي تحوي على حد محايد، ثم المعادلة التي تحوي على حد محايد وأعظمي، وأيضاً المعادلة التي تحوي على حد محايد ومتأخر. سنعرض بعض التمهيديات التي سنستخدمها في إثبات التذبذب لهذه المعادلات بدراسة سلوك الحل دون إيجاده.

١. دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد والمتأخر

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتأخر والمحايد بالعلاقة الآتية:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)f\left(x\big(\tau(t)\big), r(t)z'(t)\right) = 0 \qquad (3)$$

ذات الحد المحايد السالب $z(t) = x(t) - a(t)x\big(\theta(t)\big)$، حيث سندرس الحالة $\tau(t) = \theta(t)$ مهما يكن $t \geq T$ حيث أن $t \in [t_0, +\infty[$ و T نقطة البداية.

إن المعادلة (3) تحقق الشروط الآتية:

١) $\theta(t) \in C'([t_0, +\infty[, R)$

٢) $\theta(t) \leq t$،

٣) $lim_{t\to+\infty}\theta(t) = +\infty$،

٤) $0 \leq a(t) < 1$.

٢. تحويل ريكاتي

إن دراسة تذبذب المعادلات المعممة باستخدام تحويل ريكاتي هي طريقة فعالة، إذ تتحول المعادلة من المرتبة الثانية إلى المرتبة الأولى. فمن أجل $x(t)$ حل للمعادلة (2) يعطى تحويل ريكاتي للمعادلة (2) بالشكل الآتي [5]:

$$v'(t) + c(t) + \frac{H(v)}{r(t)} = 0 \qquad (4)$$

حيث $H(v)$ معرف بالعلاقة $H(v) = g'(g^{-1}(v))(g^{-1}(v))^2$ ، وهو متزايد تماماً من أجل $u > 0$ ، كما أنه متناقص تماماً من أجل $u < 0$ ، ويحقق $H(0) = 0$ ، كذلك هو تابع محدب تماماً، إذ إن $u(t) = \frac{r(t)x\prime(t)}{x(t)}$ ، كما يعطى التابع بالعلاقة الآتية:

$$\mathrm{g(u)} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{1}{u}}^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} & if\ u > 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{1}{u}} \frac{ds}{F(s)} & if\ u < 0 \\ 0 & if\ u = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

حيث g متزايد تماماً ، و $\lim_{t\to+\infty} g(u) = +\infty$ ، كما أن $\lim_{t\to-\infty} g(u) = -\infty$

موضوعة 1.1:

إذا كانت المعادلة (2) غير متذبذبة، فإنه يوجد $v(t)$ حل محدود للمعادلة (4) على المجال $[T, +\infty[$ فإن القضايا الآتية متكافئة :

١) المعادلة (2) غير متذبذبة.

٢) يوجد $v(t)$ حل محدود للمعادلة (4) على المجال $[T, +\infty[$

٣) يوجد تابع محدود $v(t)$ على المجال $[T, +\infty[$ يحقق الآتي:

$$v'(t) + c(t) + \frac{H(v)}{r(t)} \leq 0$$

البرهان:

نجد البرهان في المرجع [9].

تمهيدية 1.1:

ليكن $x(t) > 0$ حل للمعادلة (3) عندئذ $z(t)$ يحقق أحدى الحالتين:

١) $z(t) > 0; z'(t) > 0$ و $[r(t)z'(t)]' \leq 0$،

٢) $z(t) < 0; z'(t) > 0$ و $[r(t)z'(t)]' \leq 0$.

البرهان:

بما أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$ حل للمعادلة (3) عندئذٍ لدينا:

$$[r(t)z'(t)]' = -c(t)f\big(x(\theta(t)), r(t)z'(t)\big) \leq 0$$

لنفرض أن$z'(t) \leq 0$ ، وهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: $z(t) \geq 0$، وبما أن $[r(t)z'(t)]' \leq 0$ أياً كانت $t > T$، عندئذٍ يوجد $m > 0$ تحقق $r(t)z'(t) < -m$ أياً كانت $t > T_1 > T$، ومنه $z'(t) < -\frac{m}{r(t)}$، وبالمكاملة نجد:

$$m\int_T^t \frac{1}{r(s)} ds \leq z(t) + m\int_T^t \frac{1}{r(s)} ds < z(T)$$

وعندما تسعى t نحو $+\infty$ نجد أن $z(T) = +\infty$ وهذا تناقض.

الحالة الثانية: $z(t) < 0$، وبما أن $[r(t)z'(t)]' \leq 0$ أياً كانت $t > T$، فإنه يوجد عدد $k > 0$ بحيث من أجل $T_1 > T$ فإن $r(t)z'(t) < -k$ ، أي أن $z'(t) < -\frac{k}{r(t)}$، و بالمكاملة من T إلى t نجد أن $z(T) - k\int_T^t \frac{1}{r(s)} ds > z(t)$، وعندما تسعى t نحو$+\infty$ نجد$\text{Lim}_{t\to+\infty} z(t) = -\infty$،

ولكن لدينا $x\big(\theta(t)\big) = \frac{x(t)-z(t)}{a(t)} > \frac{-z(t)}{a(t)}$، ومنه نجد $\text{Lim}_{t\to+\infty} x\big(\theta(t)\big) = +\infty$،

وبما أن $\text{Lim}_{t\to+\infty} \theta(t) = +\infty$، نجد$\text{Lim}_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ ، الآن وبملاحظة أن $z(t) < 0$ أي أن

$x(t) < a(t)x\big(\theta(t)\big) < x\big(\theta(t)\big)$، نشكل متتالية $t_0, t_1, t_2, \ldots$ بحيث أن $\theta(t_n) = t_{n-1}$ و

$t_{n-1} < t_n$ ، الآن باعتبار $x(t_0) = \eta$، وبما أن$x(t) < x\big(\theta(t)\big)$ ومنه نجد أن $x(t_n) < x\big(\theta(t_n)\big)$ أي $x(t_n) < x(t_{n-1})$ ومنه نجد أن $x(t_n) < \eta$ أيا كان n عدد طبيعي، وهذا يعني $\text{Lim}_{t\to+\infty} x(t) < \eta$ وهذا تناقض.

ومنه فإن $z'(t) > 0$ ، وهنا نجد أن $z(t) < 0$ أو أنه يوجد $T_2 > T$ بحيث $z(t) > 0$.

تمهيدية 1.2:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة(3) يحقق أن $x(t) > 0$ من أجل $0 < T < t$ وليكن $\int^\infty \frac{dt}{r(t)} = +\infty$ عندئذٍ فإن $x(\theta(t)) \geq z(\theta(t))$ من أجل كل $\mathrm{T} < \mathrm{t}$ في حالة $z(t) > 0$.

البرهان:

نأخذ التابع $x(t)$ حيث $x(t)>0$ من أجل كل $T<t$ ، حيث $z(t)>0; z'(t)>0$ و $[r(t)z'(t)]'\leq 0$

لدينا $z(t)=x(t)-a(t)x(\theta(t))$ عندئذٍ نجد أن:

$$z(t)=x(t)-a(t)x(\theta(t)\leq x(t)$$

أي $z(t)\leq x(t)$ وعليه فإن

$$x(\theta(t))\geq z(\theta(t))$$

تمهيدية 1.3:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة(3) يحقق أن $x(t)>0$ من أجل $0<T<t$ وليكن $\int^{\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$ و $r'(t)>0$ وكذلك $\int_T^{\infty}c(t)\theta(t)^{p-1}dt=\infty$ عندئذٍ فإن $\frac{\theta(t)}{t}\geq\frac{z(\theta(t))}{z(t)}$ من أجل كل T < t في حالة $z(t)>0$.

البرهان:

نفرض $x(t)>0$ من أجل كل $T<t$ حل للمعادلة(3)، حيث $r'(t)>0$ وباعتبار $z(t)>0$

نجد من التمهيدية (3) أن $z'(t)>0$ ، ولنبرهن الآن أن $\left(\frac{z(t)}{t}\right)'\leq 0$ ، إي $z'(t)t-z(t)\leq 0$ وذلك بطريقة نقض الفرض

نفرض جدلاً أن $\left(\frac{z(t)}{t}\right)'\geq 0$ إي التابع $\frac{z(t)}{t}$ متزايد تماماً وبالتالي فإن $z(t)>tk$ ومنه يتحقق الأتي:

$$[r(t)z'(t)]'=-c(t)\frac{(x(\theta(t)))^{p-1}}{\left(r(t)z'(t)\right)^{p-2}}$$

ومنه ينتج لدينا

$$\left(r(t)z'(t)\right)^{p-2}[r(t)z'(t)]'=-c(t)(x(\theta(t)))^{p-1}$$

بمكاملة الطرفين من T إلى t نحصل على

$$\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}=\left(r(T)z'(T)\right)^{p-1}-(p-1)\int_T^t c(s)(x(\theta(s)))^{p-1}ds$$

لدينا $z'(t)>0$ و $p-1$ زوجي عندئذٍ نجد أن $\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\geq 0$

وبالتالي فإن:

$$\left(r(T)z'(T)\right)^{p-1}-(p-1)\int_T^t c(s)\left(x\big(\theta(s)\big)\right)^{p-1}ds\geq 0$$

وعليه نجد الآتي:

$$\left(r(T)z'(T)\right)^{p-1}\geq(p-1)\int_T^t c(s)z\big(\theta(s)\big)^{p-1}ds$$
$$\geq k^{p-1}(p-1)\int_T^t c(s)\theta(s)^{p-1}ds$$

وعندما t تسعى إلى ∞ فإن $\left(r(T)z'(T)\right)^{p-1}\geq\infty$، وهذا تناقض لأن $r(T)z'(T)$ عدد حقيقي لا يمكن أن يبلغ لانهائي، أي أن $z'(t)t-z(t)\leq 0$ من أجل كل $T<t$ وبالتالي نجد:

$$\frac{z(\theta(t))}{\theta(t)}\geq\frac{z(t)}{t}\tag{6}$$

تمهيدية 1.4:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة(3) يحقق أن $x(t)>0$ من أجل $0<T<t$ وليكن $\int^{\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$

عندئذٍ فإن

$$\left(\frac{x\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} \geq 1$$

من أجل كل $T < t$ في حالة $z(t) < 0$، حيث $p > 1$ عدد فردي.

البرهان:

نأخذ التابع $x(t)$ حيث $x(t) > 0$ من أجل كل $T < t$ ، وباعتبار $z(t) < 0$ ولكن لدينا $z(t) = x(t) - a(t)x(\theta(t))$، عندئذٍ نجد أن:

$$a(t)x\big(\theta(t)\big) - x(t) > 0$$

من أجل $x(t) > 0$ فأن $x(\theta(t)) > 0$ أي:

$$0 < a(t)x\big(\theta(t)\big) - x(t) < a(t)x\big(\theta(t)\big) < x\big(\theta(t)\big)$$

أي أن :

$$a(t)x\big(\theta(t)\big) - x(t) < x\big(\theta(t)\big)$$

وبما أن $p - 1$ زوجي فيكون

$$\big[a(t)x\big(\theta(t)\big) - x(t)\big]^{p-1} < \big[x\big(\theta(t)\big)\big]^{p-1}$$

$$[-z(t)]^{p-1} < \big[x\big(\theta(t)\big)\big]^{p-1}$$

أي $0 < z^{p-1}(t) < x^{p-1}(\theta(t))$ فإن $\left(\frac{x(\theta(t))}{z(t)}\right)^{p-1} \geq 1$

تمهيدية 1.5:

تحويل ريكاتي للمعادلة (3) يعطينا الشكل الآتي:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{x\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0 \qquad (7)$$

حيث $p > 1$ عدد فردي.

البرهان:

نفرض أن $x(t) \neq 0$ حل للمعادلة (2) من أجل كل $T \leq t$ حل للمعادلة(3) وأن $v(t) = g(u(t))$ ، والتابع $u(t) = \frac{r(t)z\prime(t)}{z(t)}$ باشتقاق التابع $v(t)$ نحصل على:

$$v'(t) = g'(u)u'(t) = g'(u)\left[\frac{[r(t)z'(t)]'z(t) - r(t)z'^2(t)}{z^2(t)}\right]$$

$$v'(t) = g'(u)\left[\frac{-c(t)f(x\big(\theta(t)\big), r(t)z'(t))}{z(t)} - \frac{r(t)z'^2(t)}{z^2(t)}\right]$$

$$v'(t) = -g'(u)c(t)\left(\frac{x\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1}\left(\frac{z(t)}{r(t)z'(t)}\right)^{p-2} - \frac{g'(u)}{r(t)}\left(\frac{r(t)z'(t)}{z(t)}\right)^2$$

$$v'(t) = -g'(u)c(t)\left(\frac{x\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} u^{2-p}(t) - \frac{g'(u)}{r(t)}u^2(t)$$

باختيار التابع g بحيث يكون $g'(u)u^{2-p}(t) = 1$ فتتحول المعادلة إلى الشكل الآتي:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{x\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

وعندئذٍ يصبح $g: R \to R$ معطى بالعلاقة (5) ، حيث يعطى التابع H بالعلاقة $H(v) = u^2 g'(u)$.

مبرهنة 1.1:

ليكن لدينا المعادلة الآتية:

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1} f\big(x(t), r(t)x'(t)\big) = 0 \qquad (8)$$

حيث $r'(t) \geq 0$ و $\int^{\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$ عندئذٍ إذا كانت المعادلة (8) متذبذبة فإن المعادلة (3) متذبذبة .

البرهان:

لإتمام المطلوب علينا برهان أن المعادلة (3) متذبذبة .

سنستخدم طريقة نقض الفرض، لنفرض أن المعادلة (8) متذبذبة، وأن المعادلة (3) غير متذبذبة، عندئذٍ يوجد $x(t)$ حل للمعادلة (3) بحيث يحقق أن $x(t) > 0$ من أجل كل $T < t$. وهنا حسب التمهيدية 1.1، نميز حالتين:

الحالة الأولى: في حالة $z(t) > 0$ حيث p عدد فردي من أجل كل $T < t$ ،

حسب تمهيدية 1.5 لدينا تحويل ريكاتي للمعادلة (3) هو:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\theta(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

حيث أن $v(t)$ تابع محدود لأن $x(t) \neq 0$، وبالتالي وبالاستفادة من تمهيدية 1.3 والتمهيدية 1.2 نجد أن:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \leq v'(t) + c(t)\left(\frac{z\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

$$\leq v'(t) + c(t)\left(\frac{x\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

بالتالي فإن:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \leq 0$$

وحسب الموضوعة 1.1 نجد أن المعادلة (8) غير متذبذبة وهذا يناقض الفرض.

الحالة الثانية: في حالة $z(t) < 0$ من أجل كل $t > T$،

سنأخذ تحويل ريكاتي للمعادلة (3) حيث تابع $v(t) = g\big(u(t)\big)$ و $u(t) = \frac{r(t)z\prime(t)}{z(t)}$ فبحسب تمهيدية 1.5 لدينا

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\theta(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

حيث أن $v(t)$ تابع محدود وبالتالي بالاستفادة من التمهيدية 1.4 لدينا:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \leq v'(t) + c(t) + \frac{H(v)}{r(t)}$$

$$\leq v'(t) + c(t)\left(\frac{x\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

بالتالي فإن:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \leq 0$$

وحسب الموضوعة1.1 نجد أن المعادلة (8) غير متذبذبة وهذا يناقض الفرض .

2. دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد الأعظمي

ندرس في هذه الفقرة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة التي تحوي على حد محايد وآخر أعظمي، ولهذه المعادلة الشكل الآتي:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t) \operatorname*{Max}_{s\in[\theta(t),t]} f\big(x(s), r(t)z'(t)\big) = 0 \qquad (9)$$

حيث أن $f(x,y)$ معرف كما في المعادلة (2) بشرط p عدد طبيعي فردي أي $p \geq 1$ وأن $c(t), r(t)$تابعان موجبان تماماً والتابع$z(t)$ المعطى بالعلاقة $z(t) = x(t) - a(t)x(\theta(t))$

يحقق الشروط الآتية:

١) $\cdot \geq 1 \leq a0 \leq a(t)$،

٢) $\theta\ (t) \leq t$،

٣) $[t0 \ni t;\infty+ = \theta(t)\ \infty+\leftarrow \text{Lim}t$،$+\infty[$.

تمهيدية 1.2: تحويل ريكاتي للمعادلة (9) يعطينا الشكل الآتي :

$$v'(t) + c(t) \max_{s\in[\theta(t),t]} \left(\frac{x(s)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0 \qquad (10)$$

حيث $p \geq 1$عدد فردي.

البرهان:

نفرض أن $x(t) \neq 0$ من أجل كل$t > T$ حل للمعادلة(9) وأن $v(t) = g(u(t))$،

والتابع $u(t) = \frac{r(t)z\prime(t)}{z(t)}$ باشتقاق $v(t)$ نحصل على :

$$v'(t) = g'(u)u'(t) = g'(u)\left[\frac{[r(t)z'(t)]'z(t) - r(t)z'^2(t)}{z^2(t)}\right]$$

$$v'(t) = g'(u)\left[\frac{-c(t) \max_{s\in[\theta(t),t]} f(x(s), r(t)z'(t))}{z(t)} - \frac{r(t)z'^2(t)}{z^2(t)}\right]$$

$$v'(t) = -g'(u)c(t)\left[\frac{\max_{s\in[\theta(t),t)]} x(s)}{z(t)}\right]^{p-1}\left[\frac{z(t)}{r(t)z'(t)}\right]^{p-2} - \frac{g'(u)}{r(t)}\left[\frac{r(t)z'(t)}{z(t)}\right]^2$$

$$v'(t) = -g'(u)c(t)\left[\frac{\max_{s\in[\theta(t),t)]} x(s)}{z(t)}\right]^{p-1}[u(t)]^{2-p} - \frac{g'(u)}{r(t)}[u(t)]^2$$

باختيار التابع g بحيث يكون$g'(u)u^{2-p}(t) = 1$ فنحصل على المعادلة :

$$v'(t) + c(t)\left[\frac{\max_{s\in[\theta(t),t)]} x(s)}{z(t)}\right]^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

مبرهنة 2.2: ليكن لدينا المعادلة الآتية:

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1} f\big(x(t), r(t)x'(t)\big) = 0 \qquad (11)$$

حيث $r'(t) \geq 0$ و $\int^{\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$عندئذٍ إذا كانت المعادلة (11) متذبذبة فإن المعادلة (9) متذبذبة .

برهان:

سنستخدم طريقة نقض الفرض، لنفرض أن المعادلة (11) متذبذبة ، وأن المعادلة (9) غير متذبذبة، عندئذٍ يوجد$x(t)$ حل للمعادلة (9) بحيث يحقق أن $x(t) > 0$ من أجل كل $T < t$ ، وهنا نميز حالتين :

الحالة الأولى: في حالة $z(t) > 0$ حسب التمهيدية 1.1 حيث p عدد فردي من أجل كل $T < t$.

بأخذ تحويل ريكاتي للمعادلة(9) المعطاة حيث تابع $v(t) = g\big(u(t)\big)$ حل محدود و$u(t) = \frac{r(t)z\prime(t)}{z(t)}$ معرف على كامل المجال $]T, +\infty[$ حيث $T < t$، وحسب التمهيدية 1.2 والتمهيدية 1.3 حيث pعدد فردي من أجل كل$T < t$ ، وحسب تمهيدية 1.5 نجد أن:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \leq v'(t) + c(t)\left(\frac{z\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

$$\leq v'(t) + c(t)\left(\frac{x\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

$$\leq v'(t) + c(t)\left(\frac{\max_{s\in[\theta(t),t)]} x(s)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \leq 0$$

أي أن:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \leq 0$$

وحسب الموضوعة1.1 نجد أن المعادلة (11) غير متذبذبة وهذا يناقض الفرض .

الحالة الثانية: في حالة $z(t) < 0$ و$x(t) > 0$ حسب التمهيدية 1.4 حيث pعدد فردي من أجل كل$T < t$.

بأخذ تحويل ريكاتي للمعادلة(9) حيث تابع $v(t) = g\big(u(t)\big)$ حل محدود للمعادلة (10) و$u(t) = \frac{r(t)z\prime(t)}{z(t)}$ معرف على كامل المجال $]T, +\infty[$ وبالاستفادة من التمهيدية 1.4 لدينا العلاقة الآتية:

$$\left(\frac{x(\theta(t))}{z(t)}\right)^{p-1} \geq 1$$

وبحسب التمهيدية 1.5 لدينا

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \leq v'(t) + c(t) + \frac{H(v)}{r(t)}$$

$$\leq v'(t) + c(t)\left(\frac{x\big(\theta(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

$$\leq v'(t) + c(t)\left[\frac{\max_{s\in[\theta(t),t)]} x(s)}{z(t)}\right]^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

ومنه نجد أن:

$$v'(t)+c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1}+\frac{H(v)}{r(t)}\le v'(t)+c(t)\left[\frac{\max_{s\in[\theta(t),t)]} x(s)}{z(t)}\right]^{p-1}+\frac{H(v)}{r(t)}=0$$

إي أن:

$$v'(t)+c(t)\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{p-1}+\frac{H(v)}{r(t)}\le 0$$

وحسب الموضوعة 1.1 فإن الشرط يكافئ أن المعادلة (11) غير متذبذبة، وهذا تناقض.

الاستنتاجات والتوصيات:

درسنا في هذا البحث تذبذب المعادلة(3) وهي معادلة تفاضلية نصف خطية معممة من المرتبة الثانية تحوي على حد محايد سالب ومتأخر، إذ تمت مقارنتها بالمعادلة(8) وهي معادلة تفاضلية نصف خطية معممة من المرتبة الثانية استخدمنا تقنية تحويل ريكاتي للوصول إلى نتائجنا.

وبعد ذلك وفي القسم الثاني درسنا تذبذب المعادلة التفاضلية النصف الخطية من المرتبة الثانية والتي تحوي على حد محايد سالب وآخر أعظمي وتوصلنا الى الشرط(11) يفيد في إثبات فيما إذا كانت المعادلة (9) متذبذبة أم غير متذبذبة .

نوصي بدراسة تذبذب المعادلة التفاضلية ذات الحد المحايد السالب في حال p زوجي.

المراجع:

[1] BIHARI. I., 1964, *An oscillation theorem concerning the half-linear differential equation of second order*, Magy, Tud, Akad, Mat, Kut, Intéz, PP 275-280.

[2] ELBERT. A., *On the half-linear second order differential equations, Acta Math*. Hungar. 49 (1987), 487–508

[3] DOŠLÝ. O., REHAK. P., 2005, *Half-linear differential equation*, Hungar, Acta Math.

[4] DOŠLÝ. O., ŘEZNÍČKOVÁ. J., 2012, *Conjugacy and principal solution of generalized half-linear second order differential equations*, Qual, PP 1-13.

[5] DOŠLÝ. O., BOGNÁR. G., 2013, *Conditional oscillation and principal solution of generalized half-linear differential equation*, Debrecen, PP 451-459.

[6] MARÍK. R., FIŠNAROVÁ. S., *Oscillation of half-linear differential equations with delay*, Mendel University in Brno, Zemˇedˇelsk´A 1, 613 00 Brno, Czech Republic,2013

[7] FIŠNAROVÁ. S., MARÍK. R., 2014, *Modified Riccati technique for half-linear differential equations with delay*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, PP 1-14.

[8] SELVARANGAM. S., RANI. B., THANDAPANI, E. *Oscillation results for second order half-linear neutral delay differential equations with "maxima"*. Tamkang Journal of Mathematics, Volume 48, Number 3, 289-299, Sept 2017.

[9] INGROU. S., KAROUM. R., MOALLA. M., *Study on oscillation for generalized half linear second order differential equations with delay and neutral using Riccati transformation,* Tishreen University, Lattakia, Syria,2019,18.

[10] INGROU. S., KAROUM. R., MOALLA. M., *Oscillation criteria for second order generalized half linear neutral differential equations with maxima,* Tishreen University, Lattakia, Syria,2019,17.