مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (5) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (5) 2022

تقدير لمعاملات متراجحة فكيت شيغو في بعض صفوف التوابع التحليلية ثنائية التباين

أ.د. حسن بدور*

أ.د. محمد علي**

مجد عياش***

تاريخ الإيداع 3/7/ 2022 – تاريخ النشر19/9/ 2022)

□ ملخّص □

توصّلنا في هذا البحث الى تقدير معاملات متراجحة " Fekete–Szegö " في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ المعرّف من قبل الباحث "Frasin " حيث أدى هذا التقدير الى تحسين حد المعامل الثالث في هذا الصف وصفه الجزئي $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$.

الكلمات المفتاحية: تابع ثنائي التباين ، متراجحة فكيت شيغو ، حدود المعاملات.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (5) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (5) 2022

Coefficient Estimates for the Fekete-Szegö Problem for Some Subclasses of Analytic and Bi-Univalent Functions

Dr. Hassan Baddour*
Dr. Mohammad Ali**
Majd Ayash***

(Received 3/7/2022.Accepted 19/9/2022)

□ABSTRACT □

In this paper, we present an estimate for the Fekete-Szegö inequality in the subclass $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ which is defined by Frasin. This estimate leds to improe the third coefficient in this class and its subclass $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$.

Keywords: Bi-univalent functions, Fekete-Szegö inequalities, Coefficient bounds

∗Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia,Syria.

∗∗Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.

∗∗∗Postgraduate student(Ph.D), Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Latakia, Syria

مقدمة

ندرس في هذا البحث مسألة تحسين تقديرات معاملات التوابع في بعض صفوف التوابع ثنائية التباين استكمالاً لعمل بعض الباحثين السابقين في كل من المراجع [5,6,7] حيث توصلنا إلى تقدير للمعامل الثالث في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ والصف الجزئي $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ مستخدمين طريقة إيجاد تقدير لمسألة " Fekete–Szegö " وحدود معاملات التوابع في صف التوابع ذات القسم الحقيقي الموجب وأيضا مطابقات خاصة مبنية على طبيعة تعريف الصف المدروس.

أهمية البحث وأهدافه

تكمن أهمية البحث من كونه يُعنى في دراسة التوابع المختلفة للأسرة σ والمعرّفة بأنها أسرة التوابع ثنائية التباين على قرص الواحدة المفتوح $\mathbb{D}$ من خلال دراسة خواص معاملات هذه التوابع عندما تنتمي لصفوف جزئية معينة من الأسرة σ. ويتجلى هدف هذا البحث في محاولة الحصول على أفضل تقديرات الممكنة لبعض المعاملات للتوابع في بعض الصفوف الجزئية من σ .

طرائق البحث ومواده

يقع هذا البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص ضمن التحليل العقدي والتوابع التحليلية والمتباينة، لذلك تعتمد الطرق المتبعة بشكل أساسي على مفاهيم التحليل العقدي مثل قابلية نشر التابع التحليلي في سلسلة تايلور في جوار نقطة ما , وأيضاً على منشور ثنائي حد نيوتن – أويلر للأسس الحقيقية بمتغيرات عقدية، وبشكل عام على مفاهيم نظرية التوابع المتباينه.

تعاريف ومفاهيم أساسية

يرمز بالرمز $\mathcal{A}$ الى مجموعة التوابع $f(z)$ التحليلية على قرص الواحدة المفتوح $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ والتي تحقق الشرط $f(z) = f'(0) - 1 = 0$ والمعروف بأنها تمثل بسلسلة تايلور ذات الشكل الآتي:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (1)$$

ويرمز بالرمز $\mathcal{S}$ لصف التوابع المتباينة والتي تعرّف بأنها مجموعة التوابع $f \in \mathcal{A}$ والتي تكون متباينة على $\mathbb{D}$، ومن المعروف أنه وفقاً لنظرية الربع للباحث "Koebe" [1]، انّ كل تابع من الصف $\mathcal{S}$ مداه يحوي القرص $\{w : |w| < 1/4\}$. لذلك كل تابع f متباين من الصف $\mathcal{S}$ يملك معكوساً f^{-1} يحقق أن :

$$f^{-1}(f(z)) = z\,, (z \in \mathbb{D}) \quad \& \quad f(f^{-1}(w)) = w \quad ; (\,|w| < r_0(f); r_0(f) \geq 1/4)$$

وبسبب التباين يمكن لهذا المعكوس أن يعبر عنة بسلسلة قوى (تايلور) كما يلي:

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 + (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \ \dots \qquad (2)$$

تعريف [7]: يقال عن التابع $f \in \mathcal{A}$ إنّه ثنائي التباين على قرص الواحدة $\mathbb{D}$ اذا كان كل من f ومعكوسه $g = f^{-1}$ متبايناً على قرص الواحدة. ويرمز اليه بـ σ . ومن الأمثلة على توابع من الصف σ

$$\frac{z}{1-z} \quad , \quad -\log(1-z) \quad , \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

تعريف [9]: يقال عن التابع $f \in \mathcal{S}$ إنّه نجمي من المرتبة α اذا حقق الشرط الآتي:

$$\Re\left(\frac{z\acute{f}(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad , \quad (z \in \mathbb{D}), \ (0 \le \alpha < 1).$$

ويرمز لصف التوابع النجمية من المرتبة α بالرمز $\mathcal{S}^*(\alpha)$.

تعريف [9]: يقال عن التابع $f \in \mathcal{S}$ إنّه محدب من المرتبة α اذا حقق الشرط الآتي:

$$\Re\left(1 + \frac{z\acute{\acute{f}}(z)}{\acute{f}(z)}\right) > \alpha \quad , \quad (z \in \mathbb{D}), \ (0 \le \alpha < 1).$$

ويرمز لصف التوابع المحدبة من المرتبة α بالرمز $\mathcal{K}(\alpha)$. وفي حالة $\alpha = 0$ يرمز إليه بـ $\mathcal{K}$ و $\mathcal{S}^*$ لصف التوابع المحدبة وصف التوابع النجمية على الترتيب.

تعريف [9]: يقال عن التابع $f \in \sigma$ إنّه من الصف $\mathcal{S}_\sigma^*(\beta)$ (صف التوابع ثنائية النجمية من المرتبة β حيث $(0 \le \beta < 1)$) اذا كان كل من f ومعكوسة f^{-1} نجمياً من المرتبة β .

تعريف [9]: يقال عن التابع $f \in \sigma$ إنّه من الصف $\mathcal{K}_\sigma(\beta)$ (صف التوابع ثنائية التحدب من المرتبة β حيث $(0 \le \beta < 1)$) اذا كان كل من f ومعكوسة f^{-1} محدباً من المرتبة β، في حال $\beta = 0$ نحصل على صف التوابع ثنائية النجمية $\mathcal{S}_\sigma^*$ وصف التوابع ثنائية التحدب $\mathcal{K}_\sigma$.

تعريف [8]: يعرف الصف $\mathcal{P}$ بأنّة صف التوابع $\mathscr{k}$ التحليلية على قرص الواحدة والتي تنقل قرص الواحدة الى نصف المستوي العقدي الأيمن والتي تحقق الشرط $\mathscr{k}(0) = 1$ ، مثل هذه التوابع تمثل بسلسلة قوى من الشكل الآتي:

$$\mathscr{k}(z) = 1 + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} p_k z^k \qquad (3)$$

يرمز بالرمز $H_q(n)$ لمحدد هانكل [2] لمعاملات التابع f حيث نوقش هذا المحدد من قبل العديد من الباحثين من أجل $q = 2\,, n = 1$ الذي يعطي محدد هانكل الثاني $H_2(1) = a_3 - a_2^2$ والمعروف بتابع"Fekete–Szegö"

وذلك بوجود الثابت μ بالشكل $a_3 - \mu a_2^2$. حيث تعود تسمية هذا التابع للباحثين "Fekete" و "Szegö " الذين أوجدا التقدير الأمثل لهذا التابع في ال صف $\mathcal{S}$ والتي تنص على ما يلي [11] :

من أجل $f \in \mathcal{S}$ و $0 \le \gamma < 1$ و $\beta > 0$ عندئذٍ يكون

$$|a_3 - \mu a_2^2| \le 1 + 2e^{-\frac{2\mu}{1-\mu}} \qquad ; \quad 0 < \mu < 1$$

وهذا التقدير الأمثل من أجل $\mu \in]0,1[$.

تحقق الباحث Lewin [3] أن المعامل الثالث لكل تابع $f \in \sigma$ يحقق المترجحة $|a_2| < 1.51$،وفي عام ١٩٨٠ خمّن الباحثان Brannan and Clunie [4] $|a_2| \le \sqrt{2}$ وفي عام 1985 أثبت الباحث Kedzierawski [5] تخمين الباحثين Brannan and Clunie [4] وذلك من أجل التوابع ثنائية النجمية

$f \in \mathcal{S}_\sigma^*$ ، وفي عام ١٩٨٨ توصّل الباحثان Brannan and Taha [6] على تقدير لكل من المعاملين $|a_2|$ و $|a_3|$ في كل من صف التوابع ثنائية النجمية $\mathcal{S}_\sigma^*(\beta)$ وصف التوابع ثنائية التحدب $\mathcal{K}_\sigma(\beta)$.

حصل الباحث Murugusundaramoorthy et al. [7] في عام ٢٠١٣ على تقدير لكل من المعاملات $|a_2|$ و $|a_3|$ في كل من الصفين $\mathcal{S}_\sigma(\alpha,\lambda)$ و $\mu_\sigma(\beta,\lambda)$ الجزئيين من σ والتي كانت على الشكل التالي :

من أجل كل $f \in S_\sigma(\alpha,\lambda)$ حيث $0 \le \lambda < 1\ ,\ 0 < \alpha \le 1$ فإن:

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{(1-\lambda)\sqrt{1+\alpha}}\ ,\qquad |a_3| \le \frac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$$

من أجل كل $f \in \mu_\sigma(\beta,\lambda)$ حيث $0 \le \lambda < 1\ ,\ 0 \le \beta < 1$ فإن:

$$|a_2| \le \frac{\sqrt{2(1-\beta)}}{1-\lambda}\ ,\qquad |a_3| \le \frac{4(1-\beta)^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1-\beta}{1-\lambda}$$

تمكن الباحث Zaprawa [8] في عام ٢٠١٤ من إيجاد تقدير لمسألة Fekete–Szegö في كل من الصفين $\mathcal{S}_\sigma(\alpha,\lambda)$ و $\mu_\sigma(\beta,\lambda)$ الأمر الذي أدى الى تحسين تقدير المعامل $|a_3|$ في كل من الصفين المعرفين في المرجع [7] والتي كانت على الشكل التالي :

من أجل كل $f \in S_\sigma(\alpha,\lambda)$ حيث $0 \le \lambda < 1\ ,\ 0 < \alpha \le 1$ فإن:

$$|a_3| \le \begin{cases} \dfrac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2(1+\alpha)} & ;\ 4\alpha \ge (1+\alpha)(1-\lambda) \\ \dfrac{\alpha}{1-\lambda} & ;\ 4\alpha \le (1+\alpha)(1-\lambda) \end{cases}$$

من أجل كل $f \in \mu_\sigma(\beta,\lambda)$ حيث $0 \le \lambda < 1\ ,\ 0 \le \beta < 1$ فإن:

$$|a_3| \le \frac{2(1-\beta)}{(1-\lambda)^2}$$

في نفس العام قام الباحث Frasin [9] بتعريف الصفين $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ و $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ الجزئيين من σ بالشكل التالي:

تعريف [9]: يكون التابع $f \in \sigma$ من الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ اذا حقق مايلي:

$$\left|arg\left(\acute{f}(z) + \beta z\acute{\acute{f}}(z)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}\ ,\quad \left|arg\left(\acute{g}(w) + \beta w\acute{\acute{g}}(w)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}\ ,(z,w \in \mathbb{D}) \qquad (4)$$

حيث أنّ

$$g = f^{-1}\ ,\ \beta > 0\ ,\ 0 < \alpha < 1\ ,\ 2(1-\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{\beta m+1} \le 1.$$

تعريف [9]: يكون التابع $f \in \sigma$ من الصف $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ اذا حقق مايلي:

$$\Re\left(\acute{f}(z) + \beta z\acute{\acute{f}}(z)\right) > \gamma\ ,\quad \Re\left(\acute{g}(w) + \beta w\acute{\acute{g}}(w)\right) > \gamma\ ,(z,w \in \mathbb{D}) \qquad (5)$$

حيث أنّ

$$g = f^{-1}\ ,\ \beta > 0\ ,\ 0 \le \gamma < 1\ ,\ 2(1-\gamma)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{\beta m+1} \le 1.$$

مبرهنة ١: [9]

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ حيث إنّ $\beta > 0$ و $0 < \alpha < 1$ يكون

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{2(\alpha+2)+4\beta(\alpha+\beta-\alpha\beta+2)}} \quad ,$$

$$|a_3| \leq \frac{\alpha^2}{(1+\beta)^2} + \frac{2\alpha}{3(1+2\beta)} \qquad (6)$$

مبرهنة ٢: [9]

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ حيث إنّ $\beta > 0$ و $0 \leq \gamma < 1$ يكون

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}} \quad , \quad |a_3| \leq \frac{(1-\gamma)^2}{(1+\beta)^2} + \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)} \qquad (7)$$

نتيجة ١: [9]

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ حيث إنّ $0 < \alpha < 1$ يكون

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{2\alpha+16}} \quad , \quad |a_3| \leq \frac{9\alpha^2+8\alpha}{36}. \qquad (8)$$

نتيجة ٢: [9]

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,1)$ حيث إنّ $0 \leq \gamma < 1$ يكون

$$|a_2| \leq \frac{1}{3}\sqrt{2(1-\gamma)} \quad , \quad |a_3| \leq \frac{(1-\gamma)(9(1-\gamma)+8)}{36}. \qquad (9)$$

مبرهنة ٣: [1]

ليكن التابع $\mathscr{k}$ من صف التوابع $\mathcal{P}$ حيث $\mathscr{k}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$ عندئذٍ

$$|p_k| \leq 2 \qquad (10)$$

هو الحد الدقيق لمعاملات التوابع في الصف $\mathcal{P}$.

مبرهنة مساعدة ١: [10]

ليكن $k, l \in \mathbb{R}$ و $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ حيث $|z_1| \leq R$ ، $|z_2| \leq R$ يكون :

$$|(k+l)z_1 + (k-l)z_2| \leq \begin{cases} 2|k|R & , |k| \geq |l| \\ 2|l|R & , |k| \leq |l| . \end{cases} \qquad (11)$$

مبرهنة ٤: [10]

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ حيث $0 \leq \gamma < 1$ و $\beta > 0$ يكون

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} 4h(\gamma)|1-\mu| & , h(\gamma)|1-\mu| \geq h(\gamma) \\ 4h(\gamma) & , h(\gamma)|1-\mu| \leq h(\gamma) \end{cases} \qquad (12)$$

حيث $\mu \in \mathbb{R}$ و $h(\gamma) = \frac{1-\gamma}{6(1+2\beta)}$.

نتيجة ٣: [10]

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ حيث $0 \leq \gamma < 1$ و $\beta > 0$ يكون

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)} \qquad (13)$$

نتيجة ٤: [10]

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,1)$ حيث $0 \leq \gamma < 1$ يكون:

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\gamma)}{9} \tag{14}$$

النتائج والمناقشة

نقدم فيما يلي استكمالاً لعملنا السابق في المرجع [10] تحسيناً لبعض التقديرات التي وردت في المبرهنات والنتائج السابقة المقدمة من قبل الباحث "Frasin" في المرجع [9] :

مبرهنة:

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ حيث $0 < \alpha < 1$ و $\beta > 0$ يكون

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} 4h(\alpha)|1-\mu| & , h(\alpha)|1-\mu| \geq \dfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}, \\ \dfrac{2\alpha}{3(1+2\beta)} & , h(\alpha)|1-\mu| \leq \dfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}, \end{cases} \tag{15}$$

حيث $\mu \in \mathbb{R}$ و $h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{6\alpha(1+2\beta)-4(\alpha-1)(1+\beta)^2}$.

البرهان:

من أجل كل تابع $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ فإنّه من العلاقات (٤) نجد الآتي:

$$f'(z) + \beta z f''(z) = [p(z)]^\alpha \tag{16}$$

$$g'(w) + \beta w g''(w) = [q(w)]^\alpha \tag{17}$$

حيث $p(z), q(w) \in \mathcal{P}$ لذلك يكون :

$$[p(z)]^\alpha = [1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots]^\alpha$$

$$= 1 + \alpha p_1 z + \alpha p_2 z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} p_1^2 z^2 + \cdots \tag{18}$$

$$[q(w)]^\alpha = [1 + q_1 w + q_2 w^2 + \cdots]^\alpha$$

$$= 1 + \alpha q_1 w + \alpha q_2 w^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} q_1^2 w^2 + \cdots \tag{19}$$

وايضاً

$$[p(z)]^\alpha = 1 + \alpha p_1 z + \left(\alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} p_1^2\right) z^2 + \cdots \tag{20}$$

$$[q(w)]^\alpha = 1 + \alpha q_1 w + \left(\alpha q_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} q_1^2\right) w^2 + \cdots. \tag{21}$$

ومن منشور التابع f وتابعة العكسي g (العلاقات (1) و (2)) نجد أنّ :

$$f'(z) + \beta z f''(z) = 1 + 2a_2(1+\beta)z + 3a_3(1+2\beta)z^2 + \cdots \tag{22}$$

$$g'(w) + \beta w g''(w) = 1 - 2a_2(1+\beta)w + 3(2a_2^2 - a_3)(1+2\beta)w^2 + \cdots. \tag{23}$$

من العلاقات (16) , (20) ، (22) نحصل على الآتي:

$$2a_2(1+\beta) = \alpha p_1, \tag{24}$$

$$3a_3(1+2\beta) = \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} p_1^2, \tag{25}$$

أيضاً من العلاقات (17) , (21) ، (23) نحصل على الآتي:

$$-2a_2(1+\beta) = \alpha q_1, \tag{26}$$

$$3(2a_2^2 - a_3)(1+2\beta) = \alpha q_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} q_1^2, \tag{27}$$

نحصل من العلاقتين (24) و (26) بالمطابقة ثم بالتربيع والجمع نحصل على الآتي:

$$p_1 = -q_1\,, \tag{28}$$

$$8(1+\beta)^2 a_2^2 = \alpha^2(p_1^2 + q_1^2), \tag{29}$$

بجمع العلاقتين (25) و (27) نجد أنّ :

$$6a_2^2(1+2\beta) = \alpha(p_2+q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(p_1^2+q_1^2), \tag{30}$$

من العلاقتين (29) و (30) نحصل على

$$\left(\frac{6\alpha(1+2\beta) - 4(\alpha-1)(1+\beta)^2}{\alpha}\right) a_2^2 = \alpha(p_2+q_2), \tag{31}$$

ومنة نجد

$$a_2^2 = \frac{\alpha^2}{6\alpha(1+2\beta) - 4(\alpha-1)(1+\beta)^2}(p_2+q_2), \tag{32}$$

بطرح العلاقة (27) من (25) نحصل على:

$$6a_3(1+2\beta) - 6a_2^2(1+2\beta) = \alpha(p_2-q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(p_1^2 - q_1^2), \tag{33}$$

من العلاقات (33) و (32) و (28) نحصل على :

$$6a_3(1+2\beta) - \frac{6\alpha^2(p_2+q_2)(1+2\beta)}{6\alpha(1+2\beta) - 4(\alpha-1)(1+\beta)^2} = \alpha(p_2-q_2), \tag{34}$$

ومنه:

$$a_3 = \frac{\alpha^2}{6\alpha(1+2\beta) - 4(\alpha-1)(1+\beta)^2}(p_2+q_2) + \frac{\alpha}{6(1+2\beta)}(p_2-q_2), \tag{35}$$

وأيضاً يمكن أن نكتب:

$$a_3 = h(\alpha)(p_2+q_2) + \tfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}(p_2-q_2), \tag{36}$$

من العلاقتين (36) و (32) نحصل على

$$a_3 - \mu a_2^2 = h(\alpha)(p_2+q_2) + \frac{\alpha}{6(1+2\beta)}(p_2-q_2) - \mu h(\alpha)(p_2+q_2), \tag{37}$$

$$a_3 - \mu a_2^2 = p_2\left[h(\alpha)(1-\mu) + \frac{\alpha}{6(1+2\beta)}\right] + q_2\left[h(\alpha)(1-\mu) - \frac{\alpha}{6(1+2\beta)}\right], \tag{38}$$

بتطبيق المبرهنة المساعدة (١) على العلاقة (38) نجد الآتي:

$$|a_3 - \mu a_2^2| \le \begin{cases} 2|h(\alpha)(1-\mu)||p_2| & ,|h(\alpha)(1-\mu)| \ge \left|\dfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}\right|, \\ 2\left|\dfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}\right||q_2| & ,|h(\alpha)(1-\mu)| \le \left|\dfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}\right|, \end{cases}$$

ثم بتطبيق المبرهنة (٣) على العلاقة السابقة نحصل على:

$$|a_3 - \mu a_2^2| \le \begin{cases} 4h(\alpha)|1-\mu| & ,h(\alpha)|1-\mu| \ge \dfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}, \\ \dfrac{2\alpha}{3(1+2\beta)} & ,h(\alpha)|1-\mu| \le \dfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}, \end{cases}$$

وبذلك يتم البرهان.

نتيجة :

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ حيث $0 < \alpha < 1$ و $\beta > 0$ يكون

$$|a_3| \le \frac{2\alpha}{3(1+2\beta)}. \tag{39}$$

البرهان:

بوضع $\mu = 0$ فإن العلاقه (15) نحصل على الآتي:

$$|a_3| \le \begin{cases} 4h(\alpha) & , h(\alpha) \ge \dfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}, \\ \dfrac{2\alpha}{3(1+2\beta)} & , h(\alpha) \le \dfrac{\alpha}{6(1+2\beta)}, \end{cases}$$

حيث لدينا التابع $h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{6\alpha(1+2\beta)-4(\alpha-1)(1+\beta)^2}$

وبما آن $0 < \alpha < 1$ فإنّ المقدار $-4(\alpha-1)(1+\beta)^2$ موجب تماماً

ولدينا المقدار $\frac{\alpha}{6(1+2\beta)}$ يكافئ المقدار $\frac{\alpha^2}{6\alpha(1+2\beta)}$

ثم بملاحظة أنّ $\frac{\alpha^2}{6\alpha(1+2\beta)} \le \frac{\alpha^2}{6\alpha(1+2\beta)-4(\alpha-1)(1+\beta)^2}$

بالتالي نجد أنّ $h(\alpha) \le \frac{\alpha}{6(1+2\beta)}$ وهو الفرع الثاني من متراجحة المعامل a_3 في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ وبذلك نحصل على العلاقة (39) .

نتيجة:

من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ حيث $0 < \alpha < 1$ يكون

$$|a_3| \le \frac{2}{9}\alpha. \tag{40}$$

البرهان:

بوضع $\beta = 1$ في العلاقه (39) نحصل على التقدير للمعامل a_3 في الصف الجزئي $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ التي توصّلنا إليها في العلاقة (40) .

ملاحظة : بمقارنة التقدير للمعامل $|a_3|$ الذي توصلنا له في كل من النتيجتين السابقتين مع التقدير لهذا المعامل

في كل من المبرهنة (١) و النتيجة (١) المذكورة في المرجع [9] نجد أن تقديرنا يحسن النتائج فيما يخص–التقديرللمعامل$|a_3|$.

الاستنتاجات والتّوصيات

توصلنا في هذه المقالة إلى تقدير لمسألة Fekete–Szegö في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ وأيضا تقدير للمعامل $|a_3|$

في كل من الصفين $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ و $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ وهذا التقدير يحسن النتائج الموجودة في المرجع [9] .

نوصي بمحاولة إيجاد تقدير لمسألة Fekete–Szegö في صفوف جديدة معرفة حديثاً بمؤثرات تفاضلية أو تكامليه بهدف الوصول الى تقديرات مثلى لمعاملات التوابع في صفوفها.

المراجع

[1] DUREN, P. L., *Univalent functions,Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 259, Springer, New York,1983.

[2] NOONAN, J.W., AND D.K. THOMAS, *On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions,Trans*. Amer. Math. Soc., 223(2) (1976), 337-346.

[3] LEWIN, M., *On a coefficient problem for bi-univalent functions,* Proc. Amer. Math.
Soc. 18 (1967), 63-68.

[4] BRANNAN, A. AND CLUNIE, J. G. ,*Aspects of contemporary complex analysis Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham,* July 1-20, 1979, (Academic Press New York, London,1980).

[5] KEDZIERAWSKI, A. W., *Some remarks on bi-univalent functions*, Ann. Univ.Mariae CurieSk lodowska Sect. A 39 (1985), 77-81 (1988).

[6] BRANNAN, D.A. AND TAHA, T.S. *On some classes of bi-univalent functions,* in: S.M.Mazhar, A. Hamoui, N.S. Faour (Eds.), Math. Anal. and Appl., Kuwait; February
18-21, 1985, in: KFAS Proceedings Series, vol. 3, Pergamon Press, Elsevier Science Limited, Oxford, 1988, pp. 5360. see also Studia Univ. Babes-Bolyai Math. 31 (2) (1986), 70-77.

[7] MURUGUSUNDARAMOORTHY, G., MAGESH, N. AND PRAMEELA, V., *Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent function*, Abstr. Appl. Anal., Hindawi pub. Corp. vol. 2013, 3 pages, 2013.

[8] ZAPRAWA, P., *Estimates of initial coefficients for bi-univalent functions*, Abstr.
Appl. Anal., Hindawi pub. Corp. vol. 2014, 6 pages.

[9] FRASIN, B.A., *Coefficient bounds for certain classes of bi-univalent functions*,
Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics ,Vol 43 (3) (2014), 383 – 389

[10] BADOUR, H., Ali, M., AYASH, M., *Estimates of Initial Coefficients in Some Subclasses of Analytic and Bi-Univalent Functions*, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (4) 2021.

[11] Fekete - Szegö,(1933) *Eine Bemerkung uber ungerade schlichte Funktionen*, Tishreen University Journal es London mathematics society Vol. 8, pp.85-89.