مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (3) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (3) 2023

التغطية المتكافئة لمخاريط الدوال مع خواص الترتيب لإجل كمون بيسل و ريس المعممتين و طمرها في الفضاء RIS

سلمان عيسى*

أ.د . ابراهيم ابراهيم**

(تاريخ الإيداع 5/7/ 2023 – تاريخ النشر 27/7/ 2023)

□ ملخّص □

نقوم في هذا المقال بالبرهان على وجود التغطية المتكافئة لثلاثة أنواع من المخاريط وهي $K(T); M(T); L(T)$ المؤلفة من الدوال المتناقصة والمعاد ترتيبها والمعرفة على نصف المحور الحقيقي الموجب، حيث دالة المخاريط شبه منظمة (مثلى) لها على الترتيب هي $\rho_K ; \rho_M ; \rho_L$ معرفة بشكلٍ وحيد. ومن ثم تكافؤ المخاريط من أجل الكمون $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ و بشكل خاص كمون بيسل و ريس المعممتين و طمرها في الفضاء RIS.

الكلمات المفتاحية: التغطية المتكافئة، مخاريط الدوال، الفضاء RIS.

* طالب دراسات عليا/ دكتوراه في -قسم الرياضيات- كلية العلوم - جامعة البعث.

**أستاذ دكتور في قسم الرياضيات- كلية العلوم - جامعة البعث.

The equivalent cover of the cones of functions that endowed with the properties of the order for generalized Rize and Bessel potentials and the embedding of this cover in the space RIS.

Sulman Issa*
Professor Ibrahim Ibrahim**

(Received 5/7/2023.Accepted 27/7/2023)

□ABSTRACT □

In this paper, we prove the existence of the equivalent cover for the following three types of cones: $K(T); M(T); L(T)$, where these cones consist of rearranged decreasing functions defined on the positive real numbers, and the unique semi-norm functions of them are ρ_K ; ρ_M ; ρ_L respectively.
Also, we prove the equivalence of the cones for the potential $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$. In particular, for the generalized Rize and Bessel potentials and embedding of it in the space RIS.

Key words and phrases: The ordered cover, The cones of functions and The space RIS.

*PhD student - Department of Mathematics – Faculty of Science- Al Baath University
**Professor at Department of Mathematics – Faculty of Science- Al Baath University

المقدمة

تلعب فضاءات الدوال دوراً مهماً في حل مختلف المسائل النظرية و التطبيقية في الرياضيات حيث درس الرياضيون أمثال نيكولسكي ، بيسوف ، امانوف ،غولدمان..... خواص هذه الدوال وتطبيقاتها في نظرية التفاضل و المعادلات التفاضلية و قد تمكنوا من بناء نظرية الطمر (Embedding) في فضاءات الكمون (Potential) الكلاسيكية وقد تم استكمال هذه الدراسة في تطوير نظرية الفضاءات المعممة مثل فضاءات بيسل و ريس ولورنتز وأورليش .

الدراسة المرجعية :

في عام 2010 قام (M. L. Goldman) بدراسة فضاء الكمون على الفضاء الإقليدي نوني البعد في الفضاء RIS و دراسة كمون بيسل و ريس المعممتين كحالة خاصة من الفضاء RIS . و ثم دراسة الخصائص التكاملية لكمون بيسل و ريس المعممتين و طمرها في الفضاء RIS . [6]

في عام 2013 قام (M. L. Goldman , P. P. Zabreiko) بدراسة فضاء باناخ الذي يحتوي على مخروط كيفي من الدوال القيوسة الموجبة و ذلك بالنسبة للدالة شبه منظمة التي تنتمي إلى الفضاء الأمثل مع الأخذ بعين الأعتبار الفضاء RIS و مقارنة النتائج. [7]

في عام 2016 قام (Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман) بدراسة فضاء باناخ الأمثل الذي يحتوي على مخروط من الدوال الموجبة مع خواص الترتيب، و تم إيجاد النتائج العامة للقيم المثلى المتوافقة مع علاقة الترتيب. والسؤال المطروح هو إيجاد التغطية المرتبة و المتكافئة لهذه المخاريط. [2]

في عام 2018 قام (Бокаев Н.А., Гольдман М.Л., Каршыгина Г.Ж) بدراسة التغطية المرتبة و المتكافئة لمخروطين من الدوال الموجبة مع خواص الترتيب المتعلقة بكمون بيسل و ريس المعممتين. [3]

هدف البحث :

إن هذا البحث هو استمرار لدراستنا في المرجع [8] حيث قمنا بتعميم ما تمت دراسته في المرجع [3] عن طريق إيجاد التغطية المرتبة لثلاثة مخاريط من الدوال $K(T); M(T); L(T)$

و هنا قمنا بإيجاد التغطية المتكافئة (المتبادلة) لهذه المخاريط مع خواص الترتيب و ثم طمر هذه المخاريط في الفضاء RIS .

إن دراسة فضاءات كمون بيسل و ريس المعممة هو أمر معقد للغاية ، لذلك نقوم بدراستها باستخدام التغطية المرتبة و المتكافئة لمخاريط الدوال الموجبة و المتناقصة و ثم طمرها في الفضاء RIS .

طرائق البحث ومنهجيته :

١-١ التغطية المتكافئة لمخاريط الدوال مع خواص الترتيب في الفضاء RIS:

في هذا القسم سيتم ايجاد التغطية المتكافئة للمخاريط $K(T), M(T), L(T)$، ولتكن $T \in (0,\infty)$; $\Omega(T)$ مجموعة الدوال φ من R_+ والتي تحقق الشروط الآتية :

$$\begin{cases} 1)\quad 0<\varphi(t)\downarrow \quad ; \quad \varphi(t+0)=\varphi(t) \; ; \displaystyle\int_0^t \varphi(\xi)\; d\xi<\infty \quad ; t\in(0,T) \\ \qquad 2)\quad if\;\; T<\infty \;\Rightarrow\; \varphi(t)=0 \quad ; t\in[T,\infty[\end{cases} \qquad (1,1)$$

في حالة $n \in \mathbb{N}$; $\varphi \in \Omega(T)$ تعرف الدوال :

$$f_\varphi(t,\tau) = \varphi(\max\{t,\tau\}) = \begin{cases} \varphi(t) & ; 0 \le \tau \le t \\ \varphi(\tau) & ; t < \tau < \infty \end{cases} \qquad (1,2)$$

$$m_\varphi(t,\tau) = \varphi(\max\{2^n t, 2^n \tau\}) = \begin{cases} \varphi(2^n t) & ; 0 \le \tau \le t \\ \varphi(2^n \tau) & ; t < \tau < \infty \end{cases} \qquad (1,3)$$

$$l_\varphi(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \varphi(\xi)d\xi & ; \tau \in (0,t) \\ \varphi(\tau) & ; t < \tau < T \end{cases} \qquad (1,4)$$

اذا كان $T < \infty$ فإن :

$$f_\varphi(t,\tau) = 0 \quad ; \quad t < \tau \quad ; \quad \tau \in \mathbb{R}_+$$
$$m_\varphi(t,\tau) = 0 \quad ; t \ge 2^{-n}T \quad ; \quad \tau \in \mathbb{R}_+$$

وهذا ينتج مباشرة من الخاصة الثانية للدالة φ في التعريف $(1,1)$.

ليكن $\tilde{E} = \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ فضاء RIS و في هذه الحالة نستخدم ثلاث دوال موجبة f_φ , m_φ , l_φ متعلقة بثلاثة مخاريط K_φ , M_φ , L_φ على الترتيب على R_+ حيث الدالة شبه منظمة لهذه المخاريط وحيدة ρ_K , ρ_M , ρ_L على الترتيب :

$$K(T) = K_{\varphi,\tilde{E}}(T) = \left\{ h_1(t) = h_1(g_1,t) = \int_0^\infty f_\varphi(t,\tau)\ g_1(\tau)d\tau \, ; g_1 \in \tilde{E} \downarrow (0,T) \right\} \ (1,5)$$

$$\rho_{K(T)}(h_1) = \inf\{ \|g_1\|_{\tilde{E}} \, ; g_1 \in \tilde{E} \downarrow (0,T), h_1(g_1,t) = h_1(t); t \in \mathbb{R}_+ \quad (1,6)$$

$$M(T) = M_{\varphi,\tilde{E}}(T) = \left\{ h_2(t) = h_2(g_2,t) = \int_0^\infty m_\varphi(t,\tau)\ g_2(\tau)d\tau \, ; g_2 \in \tilde{E} \downarrow (0,T) \right\} (1,7)$$

$$\rho_{M(T)}(h_2) = \inf\{ \|g_2\|_{\tilde{E}} \, ; g_2 \in \tilde{E} \downarrow (0,T), h_2(g_2,t) = h_2(t); t \in \mathbb{R}_+ \qquad (1,8)$$

$$L(T) = L_{\varphi,\tilde{E}}(T) = \left\{ h_3(t) = h_3(g_3,t) = \int_0^\infty l_\varphi(t,\tau)\ g_3(\tau)d\tau \, ; g_3 \in \tilde{E} \downarrow (0,T) \right\} (1,9)$$

$$\rho_{L(T)}(h_3) = \inf\{ \|g_3\|_{\tilde{E}} \, ; g_3 \in \tilde{E} \downarrow (0,T), h_3(g_3,t) = h_3(t); t \in \mathbb{R}_+ \qquad (1,10)$$

العلاقة $(1,6)$ تتحقق من أجل كل الدوال $g_1 \in \tilde{E} \downarrow (0,T)$

ومن أجل $h_1(g_1,t)$ في التكامل الموجود في العلاقة $(1,5)$ يتحقق من أجل الدالة $h_1 \in K(T)$

وكذلك الامر بالنسبة للعلاقتين $(1,8)$ و $(1,10)$ الدالة الموجبة وحيدة وتعني :

$$h_1 \in K(T) \, ; \alpha \ge 0 \Rightarrow \rho_{K(T)}(\alpha h_1) = \alpha \rho_{K(T)}(h_1) \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

وكذلك الامر بالنسبة ل ρ_L, ρ_M.

ملاحظة ١: اذا كانت $n \in \mathbb{N}$; $\varphi \in \Omega(T)$ فإن المتراجحة الآتية محققة :

$$\varphi(2^n t) \le \varphi(t); \ \varphi(t) \le \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\xi)\, d\xi \qquad (1,11)$$

والعلاقة الآتية محققة

$$m_\varphi(t,\tau) \le f_\varphi(t,\tau) \le l_\varphi(t,\tau) \quad t,\tau \in \mathbb{R}_+ \qquad (1,12)$$

ملاحظة ٢: بفرض $t \in \mathbb{R}_+$ وبتثبيت τ فإن

$$f_\varphi(t,.)\ ,m_\varphi(t,.)\ ,l_\varphi(t,.) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+) \qquad (1,13)$$

حيث $\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ هو الفضاء المرافق للفضاء $\tilde{E}\,(\mathbb{R}_+)$

تعريف ١: بفرض $f_1, f_2 \in M_0^+$ دالتين كما ورد في المرجع [8] عندئذ علاقة الترتيب بين الدوال تعطى بالعلاقة:

$$\forall f_1, f_2 \in M_0^+ ;\ \begin{cases} f_1 \prec f_2 \Leftrightarrow f_1 \le f_2 \\ f_1 \prec f_2 \Leftrightarrow \int_0^t f_1^*(t)d\tau \le \int_0^t f_2^*(t)d\tau \ \ ; t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \qquad (1,14)$$

f^* هي الدالة المتناقصة اللامتغيرة المعاد ترتيبها للدالة f وهي تعطى بالعلاقة :

$$f^*(\mathrm{t}) = \inf \{y \in [0,\infty[\ ;\ \lambda_f(y) \le t\};\ t \in \mathbb{R}_+$$

$\lambda_f(y)$ هي دالة توزيع ليبغ $\lambda_f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ و μ هي قياس ليبيغ

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in R\ ; |f(x)| > y\} \quad ; y \in [0,+\infty)$$

$\lambda_f(y) < \infty$ فإنه يوجد $y_0 \in [0,+\infty)$ بحيث $\lambda_f(y_0) < \infty$

إذا كانت $f_1 \le f_2$ محقق في كل مكان تقريبا على R_+ فإن $f_1^* \le f_2^*$ محقق في كل مكان تقريبا على R_+ ومنه العلاقة $(1,14)$ محققة .

تعريف ٢ :

يقال أن المخروط M يغطي المخروط K (أو K مغطى ب M) وفق علاقة الترتيب $\prec$ مع ثوابت التغطية

$$c_0 \in (0,\infty) \ \ ; c_1 \in [0,+\infty)$$

إذا كان من أجل $h_1 \in K$ يوجد $h_2 \in M$ بحيث يتحقق:

$$\begin{aligned} &\rho_M(h_2) \le c_0\, \rho_K(h_1) \\ &h_1 \prec h_2 + c_1 \rho_K(h_1) \end{aligned} \qquad (1,15)$$

ونرمز له بالرمز $M \prec K$ أي أن المخروط M يغطي المخروط K

(التغطية المتكافئة للمخاريط) $\quad K \approx M \quad \Leftrightarrow K \prec M \prec K$

مبرهنة ١: إذا تحققت الشروط $(1,1) \to (1,13)$ فإن التغطية الآتية محققة:

$$(I) \qquad K(T) \prec L(T)\ \ ;\ M(T) \prec K(T)$$

وذلك بحسب العلاقة $(1,14)$ مع ثوابت التغطية تكون العلاقة الآتية صحيحة :

$$c_0(\mathrm{I}) \le 2^{2n+1} \|\sigma_{2^n}\| \ \ ; c_1(\mathrm{I}) = 0$$

البرهان : بفرض $h_1 \in K(T)$ ولنوجد $g_1 \in \tilde{E} \downarrow (0,T)$ $\big((1,5),(1,6)\big)$ بحيث يتحقق :

في حالة $T = \infty$:

$$h_1(t) = h_1(g_1, t) = \int_0^T f_\varphi(t,\tau)\ g_1(\tau)d\tau$$

$$\|g_1\|_{\widetilde{E(\mathbb{R}_+)}} \le 2\rho_{K(T)}(\,h_1) \qquad (1,16)$$

ولنضع $\quad g_3(\tau) = 2^{2n} g_1(2^n \tau)\ ; \tau \in \mathbb{R}_+$

$$h_3(t) = h_3(g_3, t) = \int_0^\infty l_\varphi(t,\tau)\ \ g_3(\tau)d\tau \qquad (1,17)$$

$$0 \le g_3(\tau) \downarrow ; g_3(\tau+0) = g_3(\tau)\ ;\ \tau \in \mathbb{R}_+$$

$$g_3(\tau) = 0\ \ ;\ \tau \in [2^{-n}T, \infty]$$

وفي حالة $T < \infty$ فإنه :

$$\|g_3\|_{\widetilde{E(\mathbb{R}_+)}} = 2^{2n}\|g_1(2^n, .)\|_{\widetilde{E(\mathbb{R}_+)}} \le 2^{2n}\ \|\sigma_{2^n}\|\ , \|g_1\|_{\widetilde{E(\mathbb{R}_+)}} \le 2^{2n+1}\|\sigma_{2^n}\|.\ \rho_{K(T)}(h_1)$$

وكذلك الأمر بالنسبة ل

$$g_2 \in \tilde{E} \downarrow (0, 2^{-n}T);\ h_3(t) = h_3(g_3, t) \in L(T)$$

$$\rho_{L(T)}(h_3) \le\ \|g_3\|_{\widetilde{E(\mathbb{R}_+)}} \le 2^{2n+1}\|\sigma_{2^n}\|\rho_{K(T)}(h_1) \qquad (1,18)$$

لتكن الدالة h_1 حيث الدالة h_1^* الدالة المتناقصة والمعاد ترتيبها لهذه الدالة وتحقق

$$0 \le h_1 \downarrow ; h_1(t+0) =\ h_1(t); t \in \mathbb{R}_+\ \Rightarrow\ h_1^* =\ h_1$$

$$0 \le h_3 \downarrow ; h_3(t+0) =\ h_3(t); t \in \mathbb{R}_+\ \Rightarrow\ h_3^* =\ h_3$$

ولأجل برهان علاقة الترتيب في العلاقة (1,14) يكفي أن نبرهن أن:

$$\int_0^t\ h_1 d\,\xi \le \int_0^t\ h_3 d\,\xi \quad ;\ t \in \mathbb{R}_+$$

وهذه العلاقة تعطي برهان $K(T) \prec L(T)$

مع ثوابت التغطية $c_0(\mathrm{I}) \le 2^{2n+1}\|\sigma_{2^n}\|\ \ ; c_1(\mathrm{I}) = 0$

ومن العلاقة (1,5) ومن أجل $h_1\ \in\ K(T)$

$$S(t) = \int_0^t\ h_1(\xi)d\xi = \int_0^t\left(\int_0^\infty\ f(\xi,\tau)\ g_1(\tau)\ d\tau\right)d\xi = \int_0^t\left(\int_0^\infty\ h_3(2^{-n}\xi; 2^{-n}\tau)\ g_1(\tau)\ d\tau\right)d\xi$$

في التكامل الأخير بالنسبة ل ξ نضع

$$\alpha = 2^{-n}\xi\ \ ; d\xi = 2^n d\alpha$$

وبالنسبة ل τ نضع

$$\lambda = 2^{-n}\tau\ ;\ d\tau = 2^n d\lambda$$

وبحسب العلاقة $h_3(t) \le\ h_1(t)$ في [8] نجد :

$$S(t) = 2^n \int_0^{2^{-n}t}\left(\int_0^\infty\ h_3(\alpha, 2^{-n}\tau)\ \ g_1(\tau)d\tau\right)d\alpha = 2^n\int_0^{2^{-n}t}\left(\int_0^\infty\ h_3(\alpha, y)\ g\ (2^n y)dy\ \right)d\alpha$$

$$= \int_0^{2^{-n}t}\left(\int_0^\infty\ h_3(\alpha, y)\ \ g_2\ (y)dy\ \right)d\alpha = \int_0^{2^{-n}t}\ \ h_3(\alpha)d\alpha$$

في هذه الحالة من أجل $h_1 \in K(T)$ نجد $h_3 \in L(T)$ بحيث يتحقق :

$$\int_0^t\ h_1(\xi)d\xi = \int_0^{2^{-n}t}\ \ h_3(\alpha)d\alpha \le \int_0^t\ h_3(\alpha)d\alpha\ ;\ t \in \mathbb{R}_+$$

ومنه لأجل $h_1 \in K(T)$ وجدنا $h_2 \in L(T)$ بحيث يتحقق $h_1 < h_2$ في العلاقة $(1,14)$

ومنه يتحقق $K(T) \prec L(T)$

وبنفس الاسلوب يكون اثبات $M(T) \prec K(T)$.

تعريف٣ : ليكن $X = X(S, \sum, \mu)$ فضاء باناخ وليكن $L \subset M_0^+$ مخروط دالته شبه منظمة ρ_L عندئذ الطمر $L \to X$ (طمر المخروط L في فضاء باناخ X) يحقق :

$$1)\ L \subset X$$

$$2)\ \exists c_k \in [0, +\infty)\ ;\ \|h\|_X \leq c_k\, \rho_L(h)\ \ ; h \in L$$

نتيجة ١:

اذا كان $K \prec L$ حيث النظيم في فضاء باناخ يتوافق مع علاقة الترتيب $\prec$ عندئذ :

$$L \to X \quad \Rightarrow \quad K \to X$$

وذلك أيا كان الثابت c_k فإن $K \to X$ يتحقق :

$$c_k \leq c_M c_0 + c_1. \|1\|_X$$

($c_1 = 0\ , \|1\|_X = \infty$ ويصطلح أن $0.\infty = 0$)

بشكل خاص اذا كان $K \approx L$ فإنه لأجل أي فضاء باناخ X' فإنه :

$$L \to X \quad \Leftrightarrow \quad K \to X$$

١-٢ مخاريط الدوال المتناقصة والمعاد ترتيبها لأجل فضاءات كمون بيسل وريس المعممة وطمرها في الفضاء (RIS) :

في هذا القسم سيتم الحصول على تكافؤ المخاريط من أجل الكمون $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ وسنعتمد على النتيجة في المرجع [8] والمبرهنة ١.

لتكن لدينا $M_E^G(T); \widetilde{M}_E^G(T)$ مخروطين من الدوال الموجبة المتناقصة لأجل نواة الكمون G حيث هذه المخاريط مزودة بدالة وحيدة ، وسيكون اهتمامنا بقبول النواة G .

نأخذ نوعين من الشروط لنواة كمون بيسل وريس المعممة ومن ثم طمر هذا المخروط في الفضاء (RIS)

ليكن $E = E(\mathbb{R}^n)$ و $X = X(\mathbb{R}^n)$ فضائي (RIS)

$X(\mathbb{R}_+), E(\mathbb{R}_+)$ تحقق خاصة ليكسمبورغ [4] حيث انهما فضائي (RIS) أيضا . ويتحقق :

$$\begin{cases} \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)} = \|f^*\|_{E(\mathbb{R}_+)} \\ \|u\|_{X(\mathbb{R}^n)} = \|u^*\|_{X(\mathbb{R}_+)} \end{cases} \qquad (1,2)$$

من أجل $R \in (0, \infty)$ نجد أن الدالة $\emptyset(\rho);\ \rho \in (0, \rho)$ تحقق الشروط :

$$\begin{cases} 0 < \emptyset \downarrow;\ \int_0^r \emptyset(\rho)\, \rho^{n-1} d\rho < \infty\ \ ; r \in (0, R) \\ \sup_{\rho \in \left(0, \frac{R}{2}\right)} \left[\dfrac{\emptyset(\rho)}{\emptyset(2\rho)}\right] < \infty \end{cases} \qquad (2,2)$$

لنضع $T = V_n R^n \in (0, \infty)$ بحيث أن V_n حجم كرة الواحدة في R^n

$$\varphi(\tau) = \emptyset\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\ \ ; \tau \in (0, T) \qquad (3,2)$$

اذا كانت $\varphi \in \Omega(T)$ فإن $\sup_{\tau \in\left(0,\frac{1}{2^n}T\right)}\left[\frac{\varphi(\tau)}{\varphi(2^n\tau)}\right] < \infty$

إضافة الى ذلك اذا كانت $T = \infty$ فإنه $\varphi \in E'(t,\infty)$

فإن الفضاء $E = E(\mathbb{R}^n)$ يصبح فضاء الكمون المعرف بالشكل :

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u \in G * f\,;\, f \in E(\mathbb{R}^n)\} \qquad (4,2)$$

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\{\|f\|_E\,;\, f \in E(\mathbb{R}^n)\,;\, G * f = u\} \qquad (5,2)$$

الصيغة $G * f$ تعرف بالتكامل الآتي :

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{R^n} G(x-y)f(y)dy \qquad (6,2)$$

و تدعى التفاف .

G هي نواة الكمون وتحقق:

$$G(x) \cong \emptyset(\rho)\,;\ \rho = |x| \in (0,R) \qquad (7,2)$$

ملاحظة١:

١–في حالة $R = \infty$ فإن الكمون يدعى بكمون ريس المعمم (كمون ريس الكلاسيكي) حيث الدالة

$$\varphi(\tau) = c_n \tau^{\frac{\alpha}{n-1}}\,;\, 0 < \alpha < n$$

٢–في حالة $R < \infty$ فإن $T = V_n R^n < \infty$ حيث

$$\emptyset(\rho) = \rho^{\alpha-n} \quad ; 0 \le \alpha \le n \ ; \quad \rho \in (0,R)$$

تكون النواة G مقبولة اذا حققت :

$$G \in (L_1 \cap E')(R^n \backslash B_R)$$

$B_R = \{x \in R^n\,;\, |x| \le R\}$ الكرة المغلقة على R_+

$E'(\mathbb{R}^n)$ هو فضاء (RIS) وهو الفضاء المرافق للفضاء $E(\mathbb{R}^n)$

إضافة الى ذلك $\int_{R^n} G\,dx \neq 0$

في هذه الحالة يطلق عليه كمون بيسل المعمم (النواة الكلاسيكية لبيسل) .

ليكن لدينا مخاريط من الدوال المتناقصة والمعاد ترتيبها على $T \in (0,\infty)$ حيث الدالة شبه المنظمة لهذه المخاريط وحيدة من فضاء الكمون $H_E^G(\mathbb{R}^n)$:

$$M(T) = M_E^G(T) = \{h(t) = u^*(t)\,;\, t \in (0,T)\ ;\, u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)\} \ (8,2)$$

$$\rho_M(h) = \inf\{\|u\|_{H_E^G}\ ;\, u \in H_E^G\ ;\ u^*(t) = h(t)\ ;\, t \in (0,T)\} \quad (9,2)$$

$$\widetilde{M}(T) = \widetilde{M}_E^G(T) = \{h(t) = u^{**}(t)\,;\, t \in (0,T)\ ;\, u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)\} \quad (10,2)$$

$$\rho_{\widetilde{M}}(h) = \inf\{\|u\|_{H_E^G}\ ;\, u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)\ ;\ u^{**}(t) = h(t)\ ;\, t \in (0,T)\} \ (11,2)$$

حيث أن

$$u^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t u^*(\tau)\,d\tau \quad ; t \in (0,T)$$

إن دراسة المخاريط $M_E^G(T)$, $\widetilde{M}_E^G(T)$ هو أمر معقد للغاية لذلك سيتم دراستها عن طريق التغطية المرتبة في المرجع [8]:

$$K_{\varphi,E}(T) \le M_E^G(T) \le \widetilde{M}_E^G(T) \le L_{\varphi,E}(T) \qquad (12,2)$$

وعن طريق التغطية المتكافئة :

$$K_{\varphi,E}(T) \prec M_E^G(T) \prec \widetilde{M}_E^G(T) \prec L_{\varphi,E}(T) \qquad (13,2)$$

نحصل على (12,2) من النتيجة في [8] وبحسب المبرهنة ١ نحصل على العلاقة (13,2).

القسم الأيسر في العلاقتين (12,2) و (13,2) نحصل عليه من [8] والقسم الأوسط من التغطية محققة دوما أما الطرف الأيمن نحصل عليه من المرجع [8].

وبحسب المرجع [8] حيث $A_\varphi < \infty$ فإنه يعطي العلاقة (12,2) وبحسب المبرهنة (1) فإنها تعطي (13,2)

ومنه نحصل على التغطية المتكافئة للمخاريط :

$$K_{\varphi,E}(T) \cong M_E^G(T) \cong \widetilde{M}_E^G(T) \cong L_{\varphi,E}(T)$$

في النتيجة إذا كان $A_\varphi < \infty$ نحصل على طمر الكمون في الفضاء اللامتغير والمعاد ترتيبه $X(\mathbb{R}^n)$ في [7] لأجل كمون ريس المعمم نجد :

$$H_E^G(R^n) \subseteq X(R^n) \Leftrightarrow \; K_{\varphi,E}(\infty) \to X(\mathbb{R}_+)$$

ولأجل كمون بيسل المعمم نجد :

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subseteq X(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \begin{cases} K_{\varphi,E}(T) \to X(0,T)\;; T \in (0,\infty) \\ E(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

النتائج و التوصيات:

- إيجاد التغطية المتكافئة لمخاريط الدوال $K(T); M(T); L(T)$ في الفضاء RIS .
- الحصول على تكافؤ المخاريط من أجل الكمون $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$.
- نوصي بإيجاد الطمر الأمثل لمخاريط الدوال $\boldsymbol{K_\varphi}; \boldsymbol{M_\varphi}; \boldsymbol{L\varphi}$ في الفضاء $\boldsymbol{RIS}$
- نوصي بتوظيف هذه النتائج في الخصائص التكاملية لفضاءات كمون بيسل و ريس المعممتين

المراجع العلمية

[1] C. Bennett, R. C. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, 1988.

[2] Э. Г. Бахтигареева, М. Л. *Гольдман, "Построение оптимальной оболочки для конуса неотрицателных функций со свойствами монотонности*", Труды Матем.Института им. В.А.Стеклова, (2016) .

[3] Бокаев Н.А., Гольдман М.Л., *Каршыгина Г.Ж. Конусы функций с условиями монотонности для обобщенных потенциалов Бесселя* и Рисса,«Математические заметки» – 2018.

[4] Erik Kristiansson , *Decreasing Rearrangement and Lorentz* L(p, q) Spaces, Lech Maligranda, 2002

[5] M. L. Goldman , *Rearrangement Invariant Envelopes of Generalized Besov, Sobolev, and Calderon Spaces*, Contemporary Mathematics,2003

[6] М. Л. Гольдман, *"Об оптималных вложениях потенциалов Бесселя и Рисса", Труды Матем.Института и*м. В.А.Стеклова, (2010).

[7] M. L. Goldman , P. P. Zabreiko , Optimal Reconstruction of a Banach Function Space from a Cone of Nonnegative Functions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*,(2013).

[8] أ.د.ابراهيم إبراهيم ، سلمان عيسى ، *"التغطية المرتبة لمخاريط الدوال مع خواص الترتيب في الفضاء **RIS**"* منشورات مجلة جامعة طرطوس المجلد السابع العدد الثاني **2023**