

## دراسة تأثير نصف قطر الفتحة الدائرية على شكل الانعراج وعلاقتها بمسافة رايلي

د. سمر فيصل عمران\*

(تاريخ الإيداع 2022 /9/8 – تاريخ النشر 2022 /10/5)

### □ ملخص □

قمنا في هذا البحث بدراسة نمط انعراج موجة ضوئية وحيدة اللون عبر فتحة دائرية انطلاقاً من نظرية فرينل للانعراج وحساب مركبات الشدة الضوئية  $C_1^0$ ,  $C_1^{-1}$ ,  $C_1^1$  من أجل  $(n = 1, m = -1, 0, 1)$ ، بالإضافة إلى حساب الشدة الضوئية في المستوي المحرقى الهندسي استناداً إلى التحليل التوافقي الكروي، قمنا أيضاً في هذا البحث بدراسة تأثير نصف قطر الفتحة الدائرية على شكل الانعراج من خلال علاقتها بمسافة رايلي وذلك في المستوي المحرقى الهندسي.

كلمات مفتاحية : الفتحة الدائرية، المستوي المحرقى الهندسي، التحليل التوافقي الكروي، مسافة رايلي.

---

\*مدرسة في قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة طرطوس.

## Study of the effect of the circular aperture radius on the shape of diffraction and its relation to Rayleigh distance

D.samar faisal omran\*

(Received 8/9/2022.Accepted 5/10/2022)

### □ABSTRACT □

In this research, we study the diffraction pattern of a monochromatic light wave through a circular aperture based on Fresnel diffraction theory and calculate the optical intensities  $C_1^0$ ,  $C_1^1$ ,  $C_1^{-1}$  for  $(n = 1, m = -1, 0, 1)$ , in addition to calculating the optical intensity in the geometric focal plane based on spherical harmonic analysis.

we also study in this research the effect of the radius of the circular aperture on the diffraction shape through its relation to the Rayleigh distance in the geometric focal plane.

**Keywords:** circular aperture, geometric focal plane, spherical harmonic analysis, Rayleigh distance.

---

\* Lecturer in the Department of Physics - Faculty of Science - Tartous University – Syria

## مقدمة:

يُعتبر فهم آلية انعراج الضوء أثناء مروره عبر فتحة أو شق أو عائق ما وطريقة تشكّل صور الانعراج على شاشة المراقبة من المحاور الفيزيائية الهامة في دراسة الضوء، حيث قدّم فرينل [1] تفسيراً لظاهرة الانعراج من خلال صياغة هذه الظاهرة وفقاً لمبدأ هاينغز بمقاربة مستندة على الموجة و ينص مبدأ هاينغز - فرينل (Huygens-Fresnel principle) [2,3,4,5] على أنّ: كل نقطة من صدر الموجة تُعدّ منبعاً ثانوياً جديداً يُصدر أمواجاً كروية، تتداخل الأمواج الصادرة من هذه المنابع الثانوية والمتناظرة بالنسبة لمركز الثقب النقضي لتشكل أهداب الانعراج (Diffraction Fringes) التي نشاهدها على شاشة المراقبة، وبتطبيق هذا المبدأ يمكننا القول بأنّ كل نقطة تقع في الفتحة تمثّل مصدراً نقظياً وبناءً على ذلك يكون نمط الانعراج هو نتيجة للتداخل البناء والهذام للموجات المختلفة المتولدة عن هذه المصادر النقضية.

حُسبت الشدة الضوئية من قبل العديد من الباحثين من أجل فتحات بأشكال مختلفة، حيث قدم ACOSTA & REINO [6] طريقة لدراسة توزع الشدة لحزمة أشعة غاوس Gaussian beam المنعرجة عن فتحة دائرية وذلك في وسط غير متجانس فتمّ الحصول على العبارة التحليلية لمجال الانعراج في شروط توافق بيسل Bessel functions.

درس Sheppard & Cooper [7] انعراج فرينل عبر فتحة دائرية من أجل إضاءة خارج المحور (off-axis illumination) ودرجات مختلفة من التقريب، عبّرا عن تابع الانتشار النقضي لجملة خالية من الانحرافات في شروط الإحداثيات البصرية وتمّ مقارنة النتائج التي حصلوا عليها مع الحسابات الدقيقة لتكامل انعراج سمرفيدل-رايلي بالإضافة إلى الحصول على عبارة تقريبية جديدة لشكل منحنيات الشدة في المستوي المحرق تصف تشوّه المنحنيات بالمقارنة مع الشكل البيضاوي الذي تتبأ به Murty [8] حيث تعتبر معادلته دقيقة من أجل قيم كبيرة لعدد فرينل عندما تكون الشدة ملحوظة فقط في منطقة المحرق.

أصبح استخدام التوافقيات الكروية في مجال التصوير والإضاءة منتشر بشكل كبير حيث قدّم Feng وآخرون [9] خوارزمية لاستنتاج البارامترات لمصدر ضوء نقطة واحدة مع الضوء المحيط بها باستخدام المعاملات التوافقية الكروية في فضاء التردد من أجل هندسة ثلاثية الأبعاد. أظهرت نتائج الاختبار على الصور المركبة و باستخدام قواعد بيانات (CMU PIE database and Yale Database B) للوجوه الحقيقية فعالية الطريقة المستخدمة وذلك من أجل زوايا ضوء للمصدر أقل من  $50^0$ .

استخدم بعض الباحثين طريقة تحليل الصور البصرية في مجالات مختلفة ومنها ما يخص النباتات. قام Lemein وآخرون [10] بتقييم فعالية استخدام تحليل الصور البصرية لأنواع معينة من النباتات فتوصلوا إلى أنّ هذه الطريقة البصرية قدمت تقديرات جيدة عندما يكون عمق المجال بين 10cm و 60cm من الغطاء النباتي، وعندما يتجاوز العمق 60cm يتم فقدان المعلومات وتصبح الصور مشبعة.

قدّم Saad, et al [11] تحليلاً نظرياً للحل العام لمعادلة الموجة المحورية المنعرجة بواسطة محور حلزوني وذلك باشتقاق عبارات السعة وتوزعات الشدة لمجال الموجة المنعرجة تحليلاً باستخدام طريقة الطور الثابت بالإضافة إلى إجراء حسابات عددية لإظهار تغيرات الشدة في الاتجاهات الطولية والعرضية.

أهتمت Naglaa Mahmoud [12] بدراسة الخواص البصرية لطبقة رقيقة من سطح الزجاج البصري وبيان مدى تأثير هذه الطبقة السطحية على بلورة معينة الشكل TIR بأطوال موجية مختلفة، إضافة إلى رصد

التغيرات التي تطرأ على أسطح المكونات البصرية بسبب التصنيع أو البيئة المحيطة مما يؤثر على القياسات البصرية وهذا يتطلب إجراء العديد من التصحيحات.

قام Pal وآخرون [13] بدراسة تحليلية عددية للشدة في المستوي المحرق لحقول القطع الناقص فحصلوا على المكونات الطولية والعرضية لحقول القطع الناقص مدمجة مع تفرقات الطور وتوصلوا إلى أنّ هذه الحقول مفيدة في الفحص المجهر عالي الدقة وفي المعالجة الضوئية الدقيقة.

قمنا في هذا البحث بدراسة تحليلية لانعراج الضوء عن فتحة دائرية باستخدام التوافقيات الكروية وحسبنا الشدة الضوئية في المستوي المحرق الهندسي، بالإضافة إلى ذلك قمنا بدراسة تأثير نصف قطر الفتحة الدائرية على شكل الانعراج وعلاقتها بمسافة رايلي والتي تعتبر معياراً هاماً للتمييز بين منطقتي انعراج فريزل وفرانهورف عند مقارنتها مع المسافة  $Z$  (المسافة بين مستوي الفتحة ومستوي المراقبة).

### أهداف البحث:

يهدف هذا البحث إلى ما يلي:

- 1-دراسة تحليلية لانعراج الضوء عن فتحة دائرية باستخدام التوافقيات الكروية.
- 2-حساب مركبات الشدة الضوئية  $C_1^0, C_1^{-1}, C_1^1$  من أجل  $(n = 1, m = -1, 0, 1)$ .
- 3-حساب الشدة الضوئية في المستوي المحرق الهندسي باستخدام التحليل التوافقي الكروي.
- 4-دراسة تأثير نصف قطر الفتحة الدائرية على شكل الانعراج انطلاقاً من علاقتها بمسافة رايلي.

**أهمية البحث:** تكمن أهمية البحث باعتباره طريقة تحليلية جيدة لدراسة تأثير نصف قطر الفتحة الدائرية المدروسة على صورة الانعراج الناتجة على شاشة المراقبة وذلك من خلال مقارنتها بمسافة رايلي وهذا ما يؤدي إلى الحصول على صورة تماثل الجسم الحقيقي بطريقة رياضية عن طريق نشر مركبات الشدة الضوئية.

### طرائق البحث ومواده:

إنّ التطورات الأخيرة في أداء عمل الأجهزة البصرية يفتح المجال أمامنا للبحث في هذه القضايا وتطويرها بما يتناسب مع تطورات العصر. لذلك ركزنا في هذا البحث على دراسة الموجات الضوئية الواردة على شاشة تحتوي فتحة دائرية كما يحدث في العين، المجهر، التيلسكوب، عدسات الكاميرا وغيرها. انطلقنا من معادلة انعراج سمر فيلد- رايلي الأولى والتي تُعطى بالصيغة الآتية [4]:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint U(\hat{x}, \hat{y}, 0) \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{z}{r}\right) \left(ik + \frac{1}{r}\right) d\hat{x}d\hat{y} \quad (1)$$

حيث:

$k$  : العدد الموجي (wave number)  $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ ،  $\lambda$ : الطول الموجي (wave length).

$x, y, z, \hat{x}, \hat{y}$ : الإحداثيات الديكارتية في مستوي الفتحة ومستوي المراقبة على التوالي.

$U(x, y, z)$ : عبارة عن تراكب خطي لموجات كروية متباعدة مركزها النقطة  $(\hat{x}, \hat{y}, 0)$ ، وهو مقدار سلمي لذلك

يتم الاعتماد على نظرية الانعراج السلمية فقط، حيث تكون بنية الانعراج كبيرة مقارنة بالطول الموجي للضوء [14].

$\frac{e^{ikr}}{r}$ : فيزيائياً هو معامل يُعبّر عن مبدأ هاينغز [15]، رياضياً يمثل تابع غرين [16].

الواردة [15].  $U(\hat{x}, \hat{y}, 0)$ : تابع متناظر دوراني، يُمثل الموجة المضاءة مضروبة بتابع الفتحة [17]، يصف الموجة

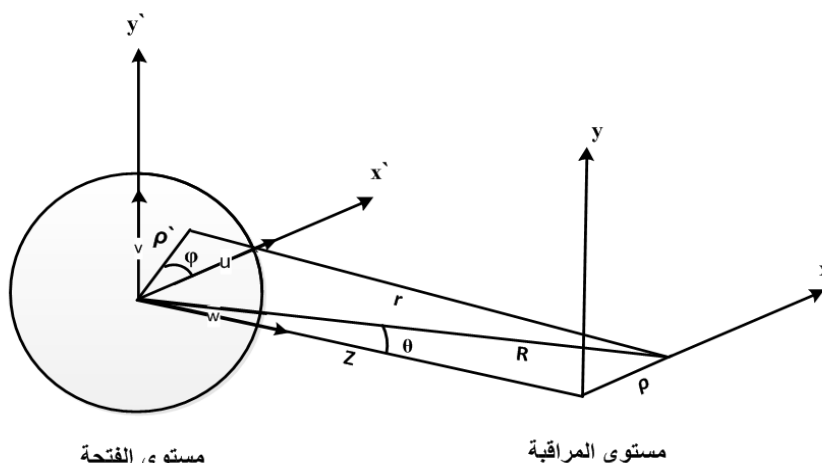
الفرق الوحيد بين صيغتي انعراج سومرفيلد- رايلي وكيرشوف - فريزل، لذلك يتم تقريبه في معظم الدراسات إلى الواحد، فتمتثل عندئذ معادلة انعراج سومرفيلد- رايلي ومعادلة انعراج كيرشوف - فريزل [16,14].

$$r = [z^2 + (x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

تُعطى الصيغة الرياضية السابقة (١) من أجل فتحة دائرية نصف قطرها  $A$ ، مضاءة بموجة مستوية بالشكل التالي:

$$U(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} A^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{z}{r}\right) \left(ik + \frac{1}{r}\right) d\varphi \rho d\rho \quad (3)$$

حيث:  $\rho, \hat{\rho}$ : إحداثيات شعاعية اسطوانية (cylindrical radial coordinates) في مستوي الفتحة ومستوي المراقبة على التوالي،  $U(\rho, z)$ : يُمثل المجال البصري (optical field) [18]، يصف سعة وطور الموجة المنعرجة عن الفتحة الدائرية [15].



الشكل (1): الشكل الهندسي لانعراج موجة ضوئية عن فتحة دائرية.

"الشكل من تصميم الباحثة باستخدام برنامج (Microsoft Visio)"

يُعبّر عن  $r$  في العلاقة (3) بالصيغة التالية:

$$r = [z^2 + A^2 \rho^2 + A^2 \hat{\rho}^2 - 2A^2 \rho \hat{\rho} \cos \varphi]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

تم اختيار  $R$  من الشكل الهندسي (1) كما يلي:

$$R^2 = z^2 + A^2 \rho^2 \quad (5)$$

نحصل بتعويض العلاقة (5) في العلاقة (4)، وذلك بعد نشر  $r$  في حدّ الأس على شكل سلسلة قوى مع الاحتفاظ بالحدّين الأول والثاني فقط وفقاً للنظرية الثنائية (binomial theorem) لنيوتن، على العبارة الآتية:

$$r = R \left( 1 + \frac{A^2 \rho^2}{2R^2} - \frac{A^2 \rho \rho \cos \varphi}{R^2} \right) \quad (6)$$

يمكن الحصول على  $(kr)$  بعد ضرب طرفي العلاقة (6) بالعدد الموجي  $(k)$ ، كما هو وارد في العبارة الآتية:

$$kr = kR \left( 1 + \frac{A^2 \rho^2}{2R^2} - \frac{A^2 \rho \rho \cos \varphi}{R^2} \right) = kR + \frac{k A^2 \rho^2}{2R} - \frac{k A^2 \rho \rho \cos \varphi}{R} = \frac{1}{2} \frac{k A^2}{R} \rho^2 - \frac{k A^2 \rho}{R} \rho \cos \varphi + kR \quad (7)$$

$$\Rightarrow kr = \frac{1}{2} u \rho^2 - v \rho \cos \varphi + w \quad (8)$$

حيث:  $u, v, w$  إحداثيات بصرية (Optical Coordinates)، وهي إحداثيات رياضية شبيهة بالإحداثيات الديكارتية ولكنها تتبع لفضاء يسمى الفضاء البصري (Optical Space) مرتبط بقرينة انكسار وسط الانتشار، وتُعطى بالصيغ التالية:

$$u = \frac{kA^2}{R}, \quad v = \frac{kA^2 \rho}{R}, \quad w = kR \quad (9)$$

تُعطى صيغة حقل الانعراج (the diffracted field) (3) بالصيغة الآتية (علماً أنه من أجل بعد لا نهائي عن الفتحة تصبح  $z \cong R$ ):

$$U(\rho, R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} A^2 \frac{e^{i(\frac{1}{2}u\rho^2 - v\rho \cos \varphi + w)}}{R} \left(\frac{z}{R}\right) \left(ik + \frac{1}{R}\right) d\varphi \rho d\rho$$

$$= A^2 \frac{e^{iw}}{R} \left(\frac{z}{R}\right) \left(ik + \frac{1}{R}\right) \int_0^1 e^{\frac{i}{2}u\rho^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iv\rho \cos \varphi} d\varphi \rho d\rho \quad (10)$$

يُمثل التكامل  $\int_0^{2\pi} e^{-iv\rho \cos \varphi} d\varphi$  في العلاقة (10) تابع ببيل من النوع الأول والرتبة صفر (The Zero-Order Bessel Function of the First Kind) مضروباً بـ  $2\pi$  [19]، وبالتعويض عنه في نفس العلاقة نحصل على الصيغة الآتية:

$$U(\rho, R) = A^2 \frac{e^{iw}}{R} \left(\frac{z}{R}\right) \left(ik + \frac{1}{R}\right) \int_0^1 e^{\frac{i}{2}u\rho^2} J_0(v\rho) \rho d\rho \quad (11)$$

حيث  $R$  ثابتة.

نقوم بنشر نصف القطر القطبي لنقطة على سطح الفتحة الدائرية المدروسة بالصيغة الرياضية التالية:

$$\rho(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (12)$$

حيث:  $\theta \in [0, \pi]$ : الإحداثي القطبي (العرضاني) ((Transverse) Polar Coordinate)، ويمثل زاوية

الانعراج،  $\varphi \in [0, 2\pi]$ : الإحداثي السمتي (الطولاني) ((Longitudinal) Azimuthal Coordinate).

$C_n^m$ : المعاملات التوافقية الكروية المرتبطة،  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ : التوابع التوافقية الكروية وهي متسلسلة من التوابع الخاصة المعروفة على سطح كرة وتُعطى بالعلاقة التالية، و نحصل على قيمها من جدول التابع التوافقي الكروي المعياري [20]:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (13)$$

حيث:  $P_n^m(\cos \theta)$  : توابع ليجندر (Legendre Functions)،  $n$ : رتبة النشر لتابع ليجندر، وهي عدد صحيح ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )، ( $-n \leq m \leq n$ )،

نحصل من أجل ( $n = 0, m = 0$ ) على:

$$\rho_0 = C_0^0 Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} C_0^0 \quad (14)$$

حيث:  $Y_0^0(\theta, \varphi)$ : متناظر كروياً ويمثل العزم أحادي القطب (monopole moment) للتابع على الكرة،  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ : يمثل العزوم ثنائية القطب (dipole moments) للتابع على الكرة. تعني هذه المعادلة بأن التمثيل التوافقي الكروي من الدرجة صفر لكل نقطة على سطح الفتحة الدائرية المدروسة هو كرة، يُحدّد نصف قطرها بواسطة  $C_0^0$ .

تعبّر عن المعاملات  $C_1^1, C_1^{-1}, C_1^0$  والتي تمثل مركبات الشدة الضوئية من أجل ( $n = 1, m = -1, 0, 1$ ) بجزأين حقيقي وتخيلي بالصيغ الآتية:

$$C_1^{-1} = -a + ib \quad (15)$$

$$C_1^0 = c \quad (16)$$

$$C_1^1 = a + ib \quad (17)$$

نلاحظ أن  $C_n^0$ : هي دائماً عدد حقيقي.

تُنشر العلاقة (١٢) من أجل ( $n = 0, 1, m = -1, 0, 1$ ) بالصيغة الآتية:

$$\rho(\theta, \varphi) = C_0^0 Y_0^0 + C_1^0 Y_1^0 + C_1^{-1} Y_1^{-1} + C_1^1 Y_1^1 \quad (18)$$

نحصل بتعويض العلاقات (14) و(15) و(16) و(17) في العلاقة (18) على العلاقة الآتية التي تعبّر عن نصف القطر القطبي لنقطة على سطح الفتحة الدائرية المدروسة:

$$\rho(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} C_0^0 + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} c \cos \theta + \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta \quad (19)$$

يُحسب تابع بيسل  $J_0(v\rho)$  في العلاقة (11) اعتماداً على القاعدة الآتية (بافتراض أن  $x = v\rho$ ):

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta} d\theta \quad (20)$$

يُنشر التابع الأسّي  $e^{iv\rho \sin \theta}$  في العلاقة (20) حسب متسلسلة القوى الآتية، بافتراض أن  $(a = iv\rho \sin \theta)$ :

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots \dots \dots \quad (21)$$

$e^{iv\rho \sin \theta} =$

$$1 + \frac{iv}{\sqrt{4\pi}} C_0^0 \sin \theta + iv \sqrt{\frac{3}{4\pi}} c \sin(\theta) \cos(\theta) + iv \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sqrt{a^2 + b^2} \sin^2(\theta) \quad (22)$$

نحصل على تابع بيسل من الرتبة صفر بعد تعويض المنشور (22) في العلاقة (20)، ومن ثم إجراء التكامل اللازم:

$$J_0(v\rho) = 1 + iv \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (23)$$

بالعودة إلى العلاقة (١١) ونشر التابع الأسّي  $e^{\frac{i}{2}u\rho^2}$  فيها حسب متسلسلة القوى (21)، بافتراض أن  $(a = iv\rho \sin \theta)$ :

$$e^{\frac{i}{2}u\rho^2} = 1 + i\frac{u}{8\pi}(C_0^0)^2 + i\frac{3u}{8\pi}c^2 \cos^2(\theta) + i\frac{3u}{4\pi}(a^2 + b^2) \sin^2(\theta) \quad (24)$$

نعوض العلاقات (19) و (23) و (24) في العلاقة (11)، فنحصل على العلاقة الآتية بعد حل التكامل

النتائج:

$$U(\rho, R) = A^2 \left(\frac{z}{R}\right) \left(ik + \frac{1}{R}\right) \frac{e^{iw}}{R} \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} c C_0^0 + \frac{3\sqrt{a^2+b^2}}{16\sqrt{2\pi}\pi^2} uvc (C_0^0)^3 + \frac{3\sqrt{a^2+b^2}}{16\sqrt{2\pi}\pi^2} uvc^3 C_0^0 - \right. \\ \left. \frac{9\sqrt{3}(a^2+b^2)}{128\sqrt{\pi}\pi} uvc^3 + \frac{3(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{4\sqrt{2\pi}\pi^2} uvc C_0^0 + \frac{9\sqrt{3}(a^2+b^2)^2}{64\sqrt{\pi}\pi} uvc - i\left(\frac{3\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{2\pi}\pi} vc C_0^0 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2} uc (C_0^0)^3 + \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2} uc^3 C_0^0 + \frac{\sqrt{3}(a^2+b^2)}{4\pi^2} uc C_0^0 + \frac{9(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{32\sqrt{2\pi}} uc + \frac{9\sqrt{a^2+b^2}}{64\sqrt{2\pi}} uc^3 \right) \right] \quad (25)$$

تُعبر العلاقة (25) عن سعة المجال البصري (optical field amplitude) في أيّة نقطة خلف الفتحة الدائرية، التي تُمثّل مجموع الموجات الكروية (spherical wavelets) الصادرة عن المنابع الثانوية ولها نفس تردد الموجة الأولية. نحصل على الشدّة الضوئية الآتية بعد تربيع الناتج السابق:

$$I(u, v) = A^4 \left(\frac{z^2}{R^4}\right) \left(k^2 + \frac{1}{R^2}\right) \cdot \left[ \frac{3}{4\pi^2} c^2 (C_0^0)^2 + \frac{9(a^2+b^2)}{8\pi^3} v^2 c^2 (C_0^0)^2 - \frac{3\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi^2} uvc^2 C_0^0 \left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{2\pi}} (C_0^0)^3 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{2\pi}} c^2 C_0^0 - \frac{9\sqrt{a^2+b^2}}{32\sqrt{\pi}} c^2 + \frac{\sqrt{3}(a^2+b^2)}{\pi\sqrt{2\pi}} C_0^0 + \frac{9(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{16\sqrt{\pi}} \right) + \frac{9(a^2+b^2)}{16\pi^2} u^2 v^2 c^2 \left(\frac{(C_0^0)^3}{4\pi\sqrt{2\pi}} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{c^2 C_0^0}{4\pi\sqrt{2\pi}} - \frac{3\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2}}{32\sqrt{\pi}} c^2 + \frac{(a^2+b^2)}{\pi\sqrt{2\pi}} C_0^0 + \frac{3\sqrt{3}(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{16\sqrt{\pi}} \right)^2 + \frac{u^2 c^2}{16\pi^2} \left(\frac{\sqrt{3}(C_0^0)^3}{4\pi} + \frac{\sqrt{3} c^2 C_0^0}{4\pi} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\sqrt{3}(a^2+b^2)}{\pi} C_0^0 + \frac{9(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{8\sqrt{2}} - \frac{9\sqrt{a^2+b^2}}{16\sqrt{2}} c^2 \right)^2 \right] \quad (26)$$

نناقش حالة خاصة وهي الشدّة في المستوي المحرق الهندسي (Intensity in the geometrical focal plane):

تصبح العلاقة (26) بعد تعويض ( $u = 0$ ) فيها على الصيغة التالية:

$$I(0, v) = A^4 \left(\frac{z^2}{R^4}\right) \left(k^2 + \frac{1}{R^2}\right) \cdot \left[ \frac{3}{4\pi^2} c^2 (C_0^0)^2 + \frac{9(a^2+b^2)v^2 c^2 (C_0^0)^2}{8\pi^3} \right] \quad (27)$$

نحصل على  $R$  من الشكل الهندسي (1):

$$R = \frac{z}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} = \frac{z}{\cos(\theta)} \quad (28)$$



نحسب قيم المعاملات  $C_n^m$  من العلاقة الآتية [21]:

$$C_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} C_0^0 &= 1 \\ C_1^0 &= \cos \theta \\ C_1^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi) \\ C_1^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ندرس الحالة الخاصة ( $\varphi = 0$ )، والموافقة لكون النقطة المدروسة من الفتحة واقعة على المحور  $x$ ، نحصل على المعاملات التالية:

$$\left. \begin{aligned} C_0^0 &= 1 \\ C_1^0 &= \cos \theta \\ C_1^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ C_1^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

تُعطى علاقة الشدة الضوئية في المستوى المحرق الهندسي بعد تعويض العلاقات (28) و(31) في العلاقة (27)، والاستفادة من العلاقات (15) و(16) و(17)، بالصيغة الآتية:

$$I(0, v) = \left( \frac{A^4 k^2 \cos^4(\theta)}{Z^2} + \frac{A^4 \cos^6(\theta)}{Z^4} \right) \cdot \left[ \frac{3}{4\pi^2} \cos^2(\theta) + \frac{9 v^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{16 \pi^3} \right] \quad (32)$$

دراسة الحالة الخاصة للشدة من أجل مسافة رايلي (Rayleigh Distance) التي تأخذ الصيغة التالية:

$$d_{RL} = \frac{2(2A)^2}{\lambda} \quad (33)$$

حيث: (2A): قطر الفتحة الدائرية المدروسة.

تمثل مسافة رايلي مسافة معينة فاصلة بين الفتحة الدائرية وشاشة المراقبة، وتُعدّ معياراً هاماً للتمييز بين منطقتي انعراج فرينل وفرانهوفر عند مقارنتها مع المسافة  $Z$ ، فعندما تقع الشاشة على مسافة  $Z$  أصغر من مسافة رايلي نحصل على انعراج فرينل، وعندما تُحرك الشاشة بعيداً على مسافة أكبر من مسافة رايلي نحصل على انعراج فرانهوفر.

نحصل على الشدة الضوئية في المستوى المحرق الهندسي بعد تعويض العلاقة (33) في العلاقة (32)،

نجد:

$$I(0, v) = \left( \frac{2d_{RL}\pi^2 A^2}{\lambda Z^2} \cos^4(\theta) + \frac{A^4 \cos^6(\theta)}{Z^4} \right) \cdot \left[ \frac{3}{4\pi^2} \cos^2(\theta) + \frac{9 v^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{16 \pi^3} \right] \quad (34)$$

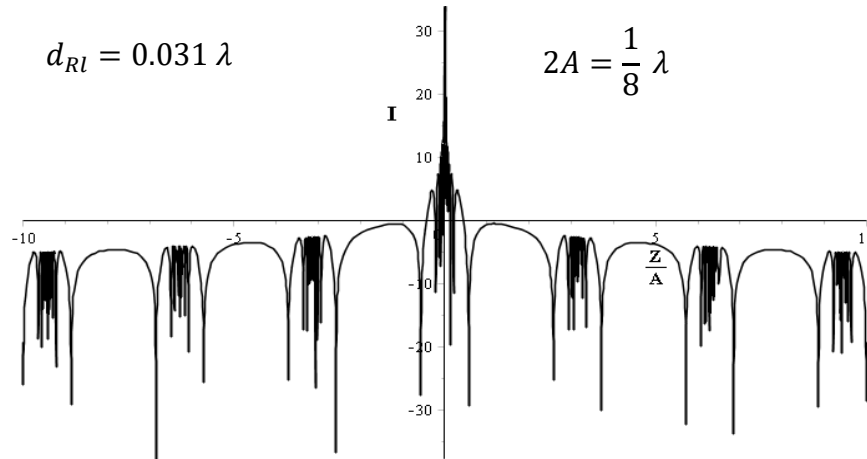
## النتائج والمناقشة:

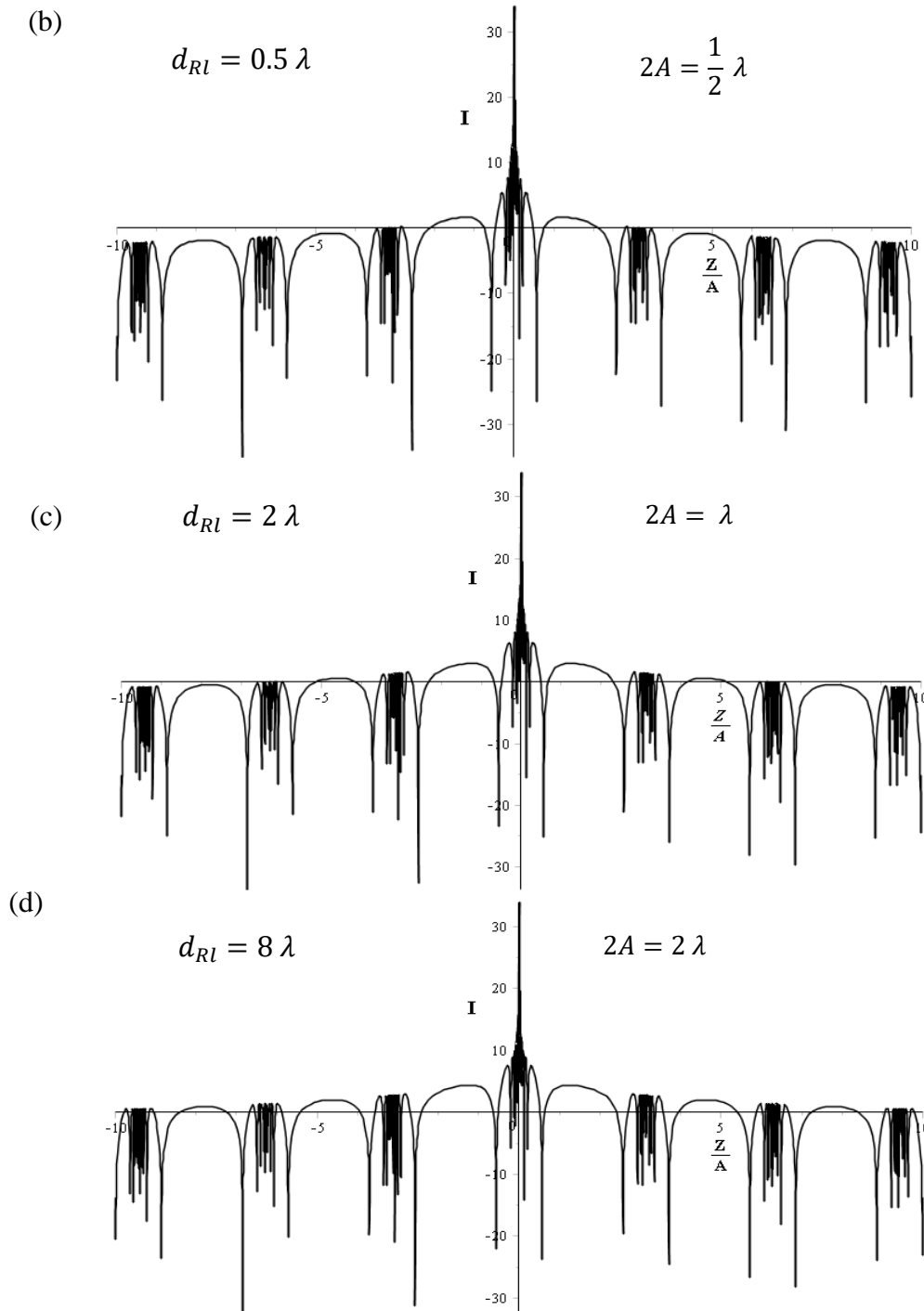
قمنا في هذا العمل بحساب الشدة الضوئية في المستوي المحرق الهندسي انطلاقاً من معادلة انعراج سمر فيلد- رايلي وذلك من أجل فتحة دائرية مُضاءة بموجة مستوية، أجرينا الرسم البياني باستخدام برنامج ميبل ( Maple program ) وبالمقياس اللوغاريتمي (Logarithmic scale) لإظهار تصوّر أوضح للرسم البيانية وبقيم كبيرة جداً، بمعنى آخر قياس أكبر كمية من الشدة الضوئية التي تخترق الفتحة الدائرية وذلك من أجل قيم مختلفة لنصف قطر الفتحة الدائرية بالمقارنة مع طول موجة الضوء المستخدم وهذا ما لا يمكننا مشاهدته بدقة عند استخدام المقياس الخطي ( Linear scale).

استخدمنا القيم العددية التالية:  $\lambda = 6328 \text{Å}$  } طول موجة الضوء الوارد على الفتحة، قيمة الإحداثي البصري (optical coordinate)  $v = 3.832$  التي تُمثّل الصفر الأول في الشدة [22]، وحصلنا على الأشكال الآتية من أجل قيم مختلفة لمسافة رايلي بدلالة طول موجة الضوء المستخدم:

$2A$	$d_{RI}$
$\frac{1}{8}\lambda$	$\frac{1}{32}\lambda$
$\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{2}\lambda$
$\lambda$	$2\lambda$
$2\lambda$	$8\lambda$

(a)





الشكل (1): يُمثّل الشدة الضوئية الناتجة عن انعراج موجة ضوئية عن فتحة دائرية في المستوى المحرقى الهندسي وذلك من أجل قيم مختلفة لمسافة رايلي موضحة بجانب كل شكل.

نستنتج من الرسوم البيانية التي حصلنا عليها (1-a), (1-b), (1-c), (1-d):

- وجود قمة عظمى في المركز تُمثل هدباً مضيئاً مركزياً يليها قمم عظمى ودنيا متعاقبة بالإضافة إلى وجود حزم من الترددات تبدو واضحة في مجالات محدّدة ومتكرّرة بانتظام تُمثل مجموعة من الأهداب المضيئة والمظلمة المتعاقبة ناتجة عن استخدام التوافقيات الكروية في حساب الشدّة الضوئية بالإضافة إلى نشر مركبات الشدّة الضوئية [23].

- إن مقارنة نصف قطر الفتحة الدائرية مع طول موجة الضوء المُستخدم يعطي نتائج جيدة ومشابهة إلى حد كبير لما ورد في المراجع [26,25,24] باستثناء أنّه ظهر لدينا حزم تضاعف فيها عدد القمم ويرجع ذلك إلى استخدام التوافقيات الكروية في حساب الشدّة الضوئية وقيامنا بنشر مركبات الشدّة إلى مراتب أعلى، ويُفسر ذلك فيزيائياً بأنه حسب مبدأ هاينغز فريزل كل نقطة من صدر الموجة تعد منبعاً ثانوياً جديداً يصدر موجات كروية تتداخل مع بعضها البعض لتشكل أهداب الانعراج التي نشاهدها على شاشة المراقبة، حيث اعتبرنا في دراستنا هذه أنّ كل نقطة من الفتحة الدائرية هي بمثابة منبع جديد وكل نقطة من صدور الموجة اللاحقة أيضاً تعتبر منابع ثانوية، وبالتالي هذا يعني زيادة في عدد المنابع الضوئية وهذا مماثل لما يحدث في شبكة الانعراج عند زيادة عدد شقوق الشبكة حيث نحصل على عدد قمم أكثر في الرسوم البيانية وشدّة إضاءة أكبر وأوضح [27,4].

- لاحظنا أيضاً أنّه كلما زادت مسافة رايلي بالنسبة لطول موجة الضوء كلما انزاح المنحني البياني نحو الأعلى على جانبي الهدب المركزي على مسافة معينة وهذا يعني زيادة في قيمة الشدّة الضوئية في النقاط الواقعة على جانبي مركز الصورة وبالتالي الحصول على صور أكثر دقة ووضوح وتركيز في الأجهزة البصرية الحديثة.

### التوصيات:

أخيراً يمكن الاستفادة من هذه الدراسة في تحسين عدسات الأجهزة البصرية التي تحمل الشكل الدائري كالمجاهر والتيلسكوبات وعدسات الكاميرات وغيرها، حيث أنّ عملية النشر الرياضي التي أجريناها في الدراسة التحليلية تسمح لنا بالتحكم في دقة الصور التي نحصل عليها من الأجهزة البصرية العديدة، لذلك نوصي بإجراء عمليات نشر رياضي من مراتب أعلى وتطبيق النتائج في المخابر على الأجهزة البصرية المختلفة.

## المراجع

- [1]- FRESNEL, AUGUSTIN. (1816). *Mémoire sur la diffraction de la lumière*. Paris: MM. Henri de Senarmont, Emile Verdet et Léonor Fresnel.
- [2]- GOODMAN, J. W. (2005). *Introduction to Fourier Optics*. Roberts and Company Publishers, the United States of America, 491.
- [3]- BORN. M, & WOLF, E. (1975). *Principles of Optics*. 5<sup>th</sup> ed , Pergamon Press, Oxford, 808.
- [4]- BORN, M & WOLF, E. (2003). *Principles of Optics*. 7<sup>th</sup> ed , printed in the United Kingdom at the university press, Cambridge, 936.
- [5]- PEATROSS, J & WARE, M. (2019). *Physics of Light and Optics*. optics.byu.edu, America, 340.
- [6]- ACOSTA, E & REINO, C. G. (1991). *Huygens-Fresnel-Kirchhoff wave-front diffraction formulation: spherical waves*. J. Opt. Soc. Am, America, Vol.38, No.9, 1659-1672.
- [7]- SHEPPARD, J. R & COOPER, I. J. (2006). *Fresnel diffraction by a circular aperture with off-axis illumination and its use in deconvolution of microscope images*. J. Opt. Soc. Am, Australia, Vol.21, No.4, 540-545.
- [8]- MURTY, M. V. R. K. (1957). *On the theoretical limit of resolution*. J. Opt. Soc. Am, Australia, Vol.47, 667-668.
- [9]- FENG, XIE; LINMI, TAO; GUANGYOU, XU.(2007). *Estimating Illumination Parameters Using Spherical Harmonics Coefficients in Frequency Space*. TSINGHUA SCIENCE AND TECHNOLOGY.Vol.12. No.1.
- [10]-LEMEIN, TODD, et al. (2015). *Accuracy of optical image analysis compared to conventional vegetation measurements for estimating morphological features of emergent vegetation*. Elsevier Ltd. All rights reserved, 66-74.
- [11]- SAAD, C, et al. (2017). *A theoretical study of the Fresnel diffraction of Laguerre-Bessel - Gaussian beam by a helical axicon*. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijleo.2017.09.068>,Morocco, Vol.149, 416-422.
- [12]-MAHMOUD, NAGLAA. (2022). *Analytical Study of Precision Optical Glass Surface and Its Effect on Some Polarimetric Parameters*. Journal of Surface Engineered Materials and Advanced Technology, 14-21.
- [13]- PAL, SUSHANTA, et al. (2022). *Focal intensity landscapes of tightly focused spatially varying bright ellipse fields*. Journal of Optics, Published by IOP Publishing Ltd, 24.
- [14]- TING CHANG, HSUAN. (2019). *Chapter 3 Foundations of Scalar Diffraction Theory*. 1-71.
- [15]- LUCKE, ROBERT. (2006). *Rayleigh–Sommerfeld diffraction and Poisson’s spot*. EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS, 27.
- [16]- KRESS, BERNARD; MEYRUEIS, PATRICK. (2009). *Appendix B The Scalar Theory of Diffraction*. Applied Digital Optics: From Micro-optics to Nanophotonics, 587-595.

- [17]- OCHOA, NOÉ ALCALÁ. (2017). *Alternative approach to evaluate the Rayleigh-Sommerfeld diffraction integrals using tilted spherical waves*. OPTICS EXPRESS, 10.
- [18]- NASCOV, VICTOR; LOGOFĂTU, PETRE. (2009). *Fast computation algorithm for the Rayleigh–Sommerfeld diffraction formula using a type of scaled convolution*. Optical Society of America, 22.
- [19]- STONE, MICHAEL; GOLDBART, PAUL. (2008). *Mathematics for Physics*. U.S.A: Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1110 West Green Street, Urbana, Illinois 61801-3080.
- [20]- ARFKEN, GEORGE; WEBER, HANS; HARRIS, FRANK. (2013). *MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS*. (7<sup>th</sup> ed). USA: Elsevier Academic Press.
- [21]- RAMAMOORTHI, RAVI; and HANRAHAN, PAT. (2004). *A Signal-Processing Framework for Reflection*, ACM Transactions on Graphics, 4.
- [22]- SHEPPARD, COLIN; COOPER, IAN. (2004). *Fresnel diffraction by a circular aperture with off-axis illumination and its use in deconvolution of microscope images*. Journal of Optical Society of America. 21, 540 -545.
- [23]- JAROSZ, WOJCIECH; CARR, NATHAN AND JENSEN, HENRIK. (2009). *Importance sampling spherical harmonics*. Computer Graphics Forum, 2.
- [24]-COOPER, IAN. *Rayleigh-Sommerfeld Diffraction Integral Of The First Kind. The Three-Dimensional Distribution Of The Radiant Flux Density At The Focus Of A Convergence Beam*. University of Sydney. Doing Physics with Matlab. op\_rs\_fb.docx.
- [25]- SHEPPARD, COLIN. (2015). *Diffraction of a focused wave by an aperture: a new perspective*. Journal of Optical Society of America. 4, 623-629.
- [26]- WU, YANG; KELLY, P, DAMIEN. (2014). *Paraxial light distribution in the focal region of a lens: a comparison of several analytical solutions and a numerical result*. Journal of Modern Optics. Vol. 61. No. S1, S57-S67.
- [27]- CAO, WENDA; PILLET, VALENTIN. *Lecture 05: Grating Spectrograph*. Hale COLLAGE (NJIT Phys-780). Topics in Solar Observation Techniques.