مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (5) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (5) 2022

استبدال الشروط اللازمة لمسألة القيم القصوى بمفاهيم التحدب وتحت التفاضل

زكاء أحمد سجيع*

(تاريخ الإيداع 6/15/ 2022 – تاريخ النشر10/18/ 2022)

□ ملخّص □

تعتبر مسألة القيم القصوى من أهم المسائل في التحليل التابعي وأولينا الأهمية في هذا البحث بتعميم الشروط اللازمة للقيمة القصوى الصغرى لدالة خطية حقيقية مستمرة وذلك عندما تكون قيود المسألة معطاة بمجموعات أو دوال ليست بالضرورة أن تكون محدبة وأدخلنا فيها مفاهيم جديدة كمخروط الأتجاهات المماسة والتقريب المحدب وتحت التفاضل

الكلمات المفتاحية: مسألة القيم القصوى مخروط الإتجاهات المماسة، التقريب المحدب الأعلى ،التحدب ،تحت التفاضل.

*خريجة دراسات عليا(ماجستير)–قسم الرياضيات –كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية– سوريا.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (5) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (5) 2022

Replace the necessary conditions for extreme value by the convexion and under differentiation

Zooka Ahamad Sajea*

(Received 15/6/2022.Accepted 18/10/2022)

□ABSTRACT □

Consider problem extreme value,which is the most important in the convex analysis.

In this paper ,we generalize the necessary conditions for minma extreme value of linear continoues function,in the case when the problem is given by sets or functions,which are not necessary convex and we indroduce new defitions as tangent cone ,convex approximation and under differentiation.

Key Words :Problem extreme value Cone of tangent directions , HigherConvex approximation ,the convex ,under differentiation.

*Graduated from Master, Department of Mathematics ,Faculty of Sciences ,Screen University ,Leticia.

مقدمة:

يعد مفهوم الأمثليات أحد أهم الفروع الرياضية نظراً لتطبيقاته المختلفة في جميع المجالات التطبيقية وهناك أهتمام كبيرمن قبل الباحثين لتطبيقات الأمثليات في مجالات عدة منها ربط موضوعات التحليل المحدب مع نظرية التقريب فمنهم على سبيل المثال العالم جوزيف لاغرانج وبانترياغن وكلارك وأندريف وغيرهم.

في هذا العمل تعرفنا على مفاهيم جديدة حول المتجه المماس لمجموعة ومخروط الأتجاهات المماسة ومفهوم التقريب المحدب من الأعلى من أجل الدوال الغيرالمحدبة ومفهوم تحت التفاضل.

كما توصلنا في هذا البحث إلى إيجاد القيم القصوى لبعض المسائل وعممنا الشروط اللازمة لها في حالتين :

الأولى: عندما تكون المسألة معطاة بمجموعة كيفية.

الثانية: عندما تكون شروط المسألة معطاة بدلالة مطابقات ومتراجحات وهنا أدخلنا مفهوم مخروط الأتجاهات المماسة والتقريب المحدب الأعلى وتحت التفاضل. .

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في محاولة الوصول الى نتائج وتوصيات يمكن تطبيقها وتعميمها على مختلف حالات القيود التي يتم التعامل معها أما هدف البحث يكمن في الأنتقال من الحالة للعامة لمسألة القيم القصوى وأستبدال بعض شروطها بمفاهيم جديدة كمخروط أتجاهات المماسة والتقريب المحدب وتحت التفاضل وتمكنا من الوصول للنتائج المرجوة.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص التحليل الحقيقي والأمثليات فلذلك الطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على مفاهيم الأمثليات والتقريب المحدب الأعلى ومخروط الأتجاهات المماسة.

من أجل متطلبات البحث تلزمنا التعاريف الآتية:

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف(1) [1] : ليكن X فضاءً خطياً و $M \subset X$ يقال عن المتجه $\vec{x} \in X$ إنه مماس للمجموعة M في النقطة $x \in M$ إذا وجدت دالة $\varphi(\lambda) \in X$ بحيث يتحقق:

$$x + \lambda \bar{x} + \varphi(\lambda) \in M ; \lambda \geq 0$$

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} \to 0 ; \lambda \downarrow 0$$

حيث $\lambda \downarrow 0$ تسعى نحو الصفر بقيم موجبة.

وبشكل عام يمكن جمع الإتجاهات المماسة في مجموعة ما بمخروط الإتجاهات المماسة

الداخلية النسبية:

تدعى x داخلية نسبياً للمجموعة المحدبة M إذاكان

$$x + linM \cap (\varepsilon, \beta) \subseteq M$$

حيث β كرة مغلقة

ويرمزللداخلية النسبية للمجموعة Mب riM

تعريف المتمايل المحلي (2–2–1) [3]

يدعى مخروط الإتجاهات $K_M(x_0)$ في النقطة $M \ni x_0$ متمايل محلي إذا كان من اجل كل اتجاه $\vec{x}_0 \in ri\, K_M(x_0)$ يوجد مخروط محدب Q ويوجد تطبيق مستمر في جوار مبدأ الإحداثيات $\psi(\bar{x})$ بحيث تتحقق الشروط

$$1)\ \bar{x}_0 \in ri\ Q,\ Lin\ Q = Lin\, K_M(x_0),\ Q = K_M\ (x_0)$$

$$2)\ \psi(\bar{x}) = \bar{x} + r\ (\bar{x})$$

حيث $\frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \xrightarrow[\bar{\chi} \to 0]{} 0$

$$3)\ x + \psi(\bar{x}) \in M \quad \forall\, \bar{x} \in Q \bigcap (\varepsilon, \beta)\ ,\ \varepsilon > 0$$

حيث β كرة مغلقة

مثال:لتكن

$$M = \{x :\ f_i(x) \le 0,\ i \in I^-,\ f_i(x) = 0,\ i \in I\}$$

تبين أن المخروط المعطى ب:

$$\boldsymbol{K_M(x_0) = \{\overline{\chi} : \langle \overline{\chi}, f_i'(\chi_0)\rangle < 0,\ i \in I^{-1}(\chi_0)}$$
$$\boldsymbol{\langle \overline{\chi}, f_i'(\chi_0)\rangle = 0,\ i \in I \quad \}}$$

متمايل محلي

حيث مجموعة الأدلة$I_0^- = \{i \in I^-,\ f_i(x_0) < 0\}$.

الحل: نجد أن $ri\, K_M(x_0) = K_M(x_0)$

$\Leftarrow$ بفرض إن $\bar{x}_0 \in K_M(x_0)$ فإذا وضعنا

$$\delta = \frac{1}{\|\bar{x}_0\|} ma_i x \{\langle \overline{\chi_0},\ f_i'(\chi_0)\rangle\ i \in I^-(x_0)\} < 0$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{r} \bar{x} : \langle \overline{\chi}, f_i'(\chi_0)\rangle \le \delta\,.\|\bar{x}\|,\ i \in I^-(x_0), \\ \langle \overline{\chi}, f_i'(\chi_0)\rangle = 0,\ i \in I \end{array} \right\}$$

عندئذ نختار الدالة $\bar{x}_0 \in ri\, Q, Q \le K_M(x_0)$

$$\psi(\bar{x}) = \bar{x} + (f'(x_0))^*\ .\ y(\bar{x})$$

وعندئذ:

$$f_i\left(x_0+\psi\left(\bar{x}\right)\right)=f_i\left(x_0\right)+\langle\bar{\chi},f_i'(\chi_0)\rangle+0\left(\left\|\chi\right\|\right),$$
$$i\in I^-$$

إذا كان $i\in I^-\setminus I^-\left(x_0\right)\Rightarrow f_i\left(\chi_0\right)<0$

$$f_i\left(\chi_0+\psi\left(\bar{\chi}\right)\right)<0,i\in I^-\setminus I^-\left(\chi_0\right)$$

وإذا كان

$\bar{x}\in Q$ فإن $I\in I^-\left(x_0\right)$

$$f_i\left(x_0+\psi\left(\bar{x}\right)\right)\le\delta\left\|\bar{x}\right\|+0\left\|\bar{x}\right\|<0\ ,i\in I^-\left(x_0\right)$$

وبالتالي:

$$f_i\left(x_0+\psi\left(\bar{x}\right)\right)=0;i\in I$$
$$x_0+\psi\left(\bar{x}\right)\in M\Leftarrow\bar{x}\in Q$$

وعند قيم صغيرة ل $\bar{x}\in Q$ فأن $K_M\left(x_0\right)$ متمايل محلي

تمهيدية (١)[7]: لتكن $M=\{x;\ f_i\left(x\right)=0;i\in I\}$ ولتكن $x_0\in M;\ f_i\left(x_0\right)=0;i\in I$ ولنفرض أن التدرجات $f_i'\left(x_0\right)$ مستقلة خطيا عندئذٍ:

$K_M\left(x_0\right)=\{\bar{x};\left\langle\bar{x},\ f_i\left(x_0\right)\right\rangle=0,i\in I\}$ هي مخروط الإتجاهات المماسة

(Cone of tangent directions)

تعريف (2) [8]: لتكن $f\left(x\right)$ دالة يقال عن الدالة $h\left(\bar{x}.x\right)$ إنها تقريب محدب أعلى للدالة $f\left(x\right)$ في النقطة $x\in X$ إذا تحقق الشرطين الآتيين:

$$h\left(\bar{x},x\right)\ge f\left(\bar{x},x\right),\forall\bar{x}\neq 0(1$$

$h\left(\bar{x},\bullet\right)(2$ دالة متجانسة و موجبة ومغلقة ومحدبة

حيث $f\left(x\right)$ دالة متجانسة من الدرجة n إذا تحفف الشرط:

$$f\left(\lambda x\right)=\lambda^n f\left(x\right),\lambda\in R,\lambda\neq 0$$

و $f\left(x\right)$ دالة موجبة أي خطها البياني يقع فوق محور الفواصل أي تأخذ القيم الموجبة

تعريف(3) [9]: إذا كانت $h\left(\bar{x},x\right)$ هو تقريب محدب أعلى للدالة f في النقطة x عندئذٍ نسمي:

$$\partial h\left(\bullet,x\right)=\{x^*\in X^*;h\left(\bar{x},x\right)\ge\left\langle\bar{x},x^*\right\rangle\forall\bar{x}\in X\}$$

بتحت التفاضل للدالة f في x ويرمز له بالرمز $\partial f\left(x\right)$.

النتائج والمناقشة:

مبرهنة(١): لتكن x_0 نقطة قصوى صغرى للدالة $f(x)$ على المجموعة M وليكن $h(\bar{x}, x_0)$ التقريب المحدب الأعلى للدالة f في النقطة x_0 عندئذ إذا كان :

$$\operatorname{int} domh(0, x_0) \cap K_M(x_0) \neq \phi$$

فإن: $\partial f(x_0) \bigcap K_M^*(x_0) \neq \phi$

الإثبات: بما أن x_0 نقطة قصوى صغرى فإن $h(\bar{x}, x_0) > 0$ من أجل كل $\bar{x} \in K_M(x_0)$ لأنه لو فرضنا جدلاً أن $\bar{x} \in K_M(x_0), h(\bar{x}, x_0) < 0$ عندئذٍ توجد دالة$\frac{r(\lambda)}{\lambda} \to 0, r(\lambda)$, عندما $\lambda \downarrow 0$ بحيث

وبالتالي: $x_0 + \lambda \bar{x} + r(\lambda) \in M$

$$\lim_{\lambda \downarrow o} Sup_X \frac{f(x_0, \lambda \bar{x} + r(\lambda)) - f(x_0)}{\lambda} \leq F(\bar{x}, x_0) \leq h(\bar{x}, x_0) < 0$$

أي عند القيم الصغرى بمافيه كفاية سيكون لدينا $f(x_0) > f(x_0 + \lambda \bar{x} + r(\lambda)), \lambda > 0$

وهذا يناقض كون x_0 نقطة قصوى صغرى .

ومنه $f(\bar{x}, x_0)$ تحقق قيمة صغرى على المجموعة المتراصة $\bar{x} = 0, K_M(x_0)$ وهذا محقق فقط عندما يكون: $\partial f(x_0) \bigcap K_M^*(x_0) \neq \phi$ وهو المطلوب.

نتيجة(١) :

من المبرهنة (١) يمكن التوصل إلى النتيجة الآتية:

لتكن f دالة لها تقريب محدب أعلى $h(\bar{x}, x_0)$ في x_0 عندئذٍ حتى النقطة x_0 قصوى صغرى للدالة f يجب أن يكون $0 \in \partial f(x_0)$.

مبرهنة الفصل[9]:

إذا كانت A, B مجموعتين غير متقاطعتين في فضاء منتهي الأبعاد X عندئذٍ:

يمكن إيجاد مستوي فاصل بينهما بحيث تقعان في جهتين مختلفتين منه .

بإستخدام مبرهنة الفصل توصلنا إلى المبرهنة الرئيسية في هذا البحث والتي يمكن صياغتها بالشكل الآتي:

مبرهنة(٢):

إذا كانت x_0 نقطة قصوى صغرى للدالة $f_0(x)$ مع الشروط:

$$f_i(x) \leq 0, i \in I^- = \{0, \ldots\ldots m\}$$
$$f_i(x) = 0, i \in I = \{1, \ldots\ldots m\}, x \in M$$

وتتحقق الشروط الآتية:

1)الدوال $f_i, i \in \{0\} \cup I^-$ لها تقريب محدب أعلى $h(\bar{x}, x_0)$ في النقطة x_0 .

2)الدوال $f_i i \in I$ لها تدرجات مستمرة.

3)يوجد في النقطة x_0 مخروط الأتجاهات المماسة المحدب $K_M(x_0)$ للمجموعة M

وإذا كان L الفضاء الخطي المولد ب $K_M(x_0)$ حيث $L = LinK_M(x_0)$ أصغر فضاء جزئي خطي يحوي $K_M(x_0)$

L_0 فضاء جزئي خطي ويحوي مجموعة المتجهات $\bar{x} = \mu\bar{x}_0 + \sum_{j=1}^{m} \delta_i e_j, \mu, \delta_j \in R$

عندئذ توجد :

$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ بحيث يتحقق:

- المجموعة $\Omega = \left\{ \bar{x} = \bar{x}_0 + \sum_{j=1}^{m} \delta_j e_j, |\delta_j| < \varepsilon_1, j = 1.......m \right\}$ محتواة في $K_M(x_0)$.
- توجد دالة $\Psi(\bar{x})$ معرفة من أجل كل $\bar{x}_0 \in L_0$ صغيرة بما فيه الكفاية قابلة للمفاضلة مستمرة في مجموعة تعريفها بحيث

$$\Psi(\bar{x}) = \bar{x} + r(\bar{x}),$$
$$x_0 + \Psi(\bar{x}) \in M, \forall \bar{x} \in Q, \|\bar{x}\| < \varepsilon_2 :$$
$$\frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \to 0, x \to 0, \bar{x} \in L_0$$

حيث المجموعة $Q = Con\Omega = \left\{ \bar{x}, \bar{x} + \mu\left(\bar{x}_0 + \sum_{j=1}^{m} \delta_j e_j \right), \mu \geq 0, |\delta_j| \leq \varepsilon_1 \right\}$

4) إذا كان $\bigcap_{i \in \{0\} \cup \bar{I}} domh_i(\bullet, x_0) \cap K_M(x_o) \neq \phi$

للوصول إلى النتيجة الأساسية في هذا البحث يلزمنا التمهيدتين الآتيتين:

تمهيدية(2):[10]

لتكن $l_i(x), i = 1.....m$ دوال خطية معرفة على الفضاء الجزئي $L \subseteq X$ عندئذ:

أما أن توجد أعداد a_i ليست جمعيها معدومة بحيث يتحقق:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i l_i(x) = 0, x \in L....................(1)$$

أوتوجد المتجهات

$$e_j \in L,\ j=1......m,\ L_i(e_j)=\delta_{ij}=\begin{Bmatrix}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{Bmatrix}..(2)$$

الإثبات: لتكن الدالة المتجهية $(l_1,.......l_i(x),......l_m(x))=l(x)\in R^m$ وليكن $A=l(L)$ صورة الفضاء L وفق l إذا كانت $A=R^m$ فإن أي متجهه $y\in R^m$ يوضع بالشكل $Y=l(x), x\in L$

وفي حالة خاصة إذا كانت $q_j\in R^m$ أشعة واحدة فإن من أجل $q_j^i, i=1......m$ يكون $q_j^i=\delta_{ij}$ وتوجد

$$q_j=l(e_j)$$

المتجهات $e_j\in L$ حيث

$$l_i(e_j)=\delta_{ij}=\begin{Bmatrix}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{Bmatrix}$$

تمهيدية(3):[10]

ضمن تحقق الفرضتين(2)و(3) عندئذٍ إما أن توجد

$$\sum_{i\in I}a_i\langle \bar{x},\ f_i'(x_0)\rangle=0,\ \sum_{i\in I}|a_i|=1,\ \forall\bar{x}\in L,\ L=LinK_M(x_0)$$

وأما من أجل $\bar{x}_0\in K_M(x_0),\ \bar{x}_0\neq 0$ يحقق الشرط $\langle\bar{x},\ f_i'(\bar{x}_0)\rangle=0, i=1.......m$

توجد دالة $r_0(M)\in X$ معرفة من أجل كل القيم الصغيرة $\mu\geq 0$ بحيث يكون :

$$x_0+\mu\bar{x}_0+r_0(\mu)\in M$$

$$f_i(x_0+\mu\bar{x}_0+r_0(\mu))=0, i=1......m, \frac{r_0(\mu)}{\mu}\to 0, \forall\mu\downarrow 0$$

عندئذ: توجد الأعداد $y_i^*, i\in\{0\}\cup I^-\cup I$ **بحيث يكون** :

$$\sum_{i\in\{0\}\cup I^-}y_i^*h(\bar{x},x_0)+\sum_{i\in I}y_i^*\langle\bar{x},\ f'(x_0)\rangle\geq 0$$

$$\forall\bar{x}\in K_M(x_0)\cap\left(\bigcap_{i\in\{0\}\cup I^-}domh_i(\bullet,x_0)\right)$$

عندئذٍ:

$$y_i^*\geq 0, \forall i\in\{0\}\cup I^-$$
$$y_i^*=0, \forall i\in I^-,$$
$$I_0^-=\{i\in I^-,\ f_i(x_0)<0\}$$

نعود الآن للأثبات المبرهنة (٢) .

الأثبات :إذا كان

$\sum a_i\langle\bar{x},\ f_i'(x_0)\rangle=0........(1)$ فأن المبرهنة محققة

من أجل $i\in I$ نضع $y_i^*=a_i$ أما قيم y_i^* الأخرى نختارها تساوي الصفر .

بفرض الشرط (١) غير محقق عندها ندخل الرموز الآتية:

$$\bar{J}=\{0\}\cup\left(\bar{I}\setminus\bar{I}_0\right), J=\bar{J}\cup I$$
$$K=K_M\left(x_0\right)\cap\left(\bigcap_{i\in\{0\}\cup\bar{I}} domh_i\left(\bullet, x_0\right)\right)$$
$$i\in\{0\}\cup\bar{I}$$

حيث bقيم الأدلة في J ولنعرف المجموعة p بالشكل الآتي :

$$P\subseteq R^b, \bar{y}\subseteq p\Leftrightarrow\exists\bar{x}\in K, \bar{y}_i>h_i\left(\bar{x}, x_0\right), i\in\bar{J}$$
$$y_i=\left\langle\bar{x}, f_i'\left(x_0\right)\right\rangle, i\in I$$

h_iمحدبة وبالتالي L محدبة وغير خالية.

لتكن المجموعة $N=\left\{\bar{y}\in R^b, \bar{y}_i\leq 0, i\in\bar{J}, g_i=0, i\in I\right\}$ ولنبرهن أن N,P غير متقاطعتين.

لنفرض جدلاً أنه يوجد شعاع $\bar{y}_0\in P\cap N$ وشعاع $\bar{x}_0\in K$ بحيث :

$$h_i\left(x_0^-, x_0{}^-\right)\leq y_i^-\leq 0, i\in J$$
$$\left\langle x_0^-, f_i'\left(x_0\right)\right\rangle>0, i\in I \qquad (2)$$

بما أن $\bar{x}_0\in K, K\subseteq K_M\left(x_0\right)$ فإن $\bar{x}_0\in K_M\left(x_0\right)$.

ينتج من العلاقة الأولى و(2)إن $\bar{x}_0\neq 0$ و $h_i\left(\bullet, x_0\right)=0$

وينتج من العلاقة الثانية و(2) إنه توجد الدالة $r_0\left(M\right)$ $\frac{r_0\left(M\right)}{r}\to 0, \forall r\downarrow 0$, والتي من أجلها تتحقق :

$$x_0+\mu\bar{x}_0+r_0\left(\mu\right)\in M$$
$$f_i\left(x_0+\mu\bar{x}_0+r_0\left(\mu\right)\right)=0, i\in I.(3)$$

حسب التمهيدية (٢) يكون لدينا

$$\lim_{\mu\downarrow 0} Sup\frac{f_i\left(x_0+\mu\bar{x}_0+r_0\left(\mu\right)\right)-f_i\left(x_0\right)}{\mu}\leq h_i\left(\bar{x}_0, x_0\right)<0$$

أي من أجل قيم صغيرة بما فيه كفاية $\mu>0$ يكون :

$$f_i\left(x_0+\mu\bar{x}_0+r_0\left(\mu\right)\right)\leq f_i\left(x_0\right)+\frac{1}{2}\mu h_i\left(\bar{x}_0, x_0\right), i\in J^{-1}$$

وبما أن $0>h_i\left(\bar{x}_0, x_0\right), \forall i\in\bar{J}$ عندئذ من أجل قيم صغيرة بمافيه الكفاية ل $\mu>0$ يكون :

$$f_0\left(x_0+\mu\bar{x}_0+r_0\left(\mu\right)\right)<f_0\left(x_0\right)$$
$$f_i\left(x_0+\mu\bar{x}_0+r_0\left(\mu\right)\right)<0, i\in\bar{I}\setminus\bar{I}_0 (4)$$

المقادير $h_i\left(\bar{x}_0, x_0\right), i\in\bar{I}_0$ محدودة لأن $\bar{x}_0\in K$ و $K\subseteq domh_i\left(\bullet, x_0\right)$ لذلك يكون:

$$\lim_{\mu\to 0} Sup\frac{f_i\left(x_0+\mu\bar{x}_0+r_0\left(\mu\right)\right)-f_i\left(x_0\right)}{\mu}\leq h_i\left(\bar{x}_0, x_0\right)$$

نستنتج من هنا إن المتراجحة

$$f_i\left(x_0 + \mu\bar{x}_0 + r_0(\mu)\right) \le f_i(x_0) + \mu\left(h_i(\bar{x}_0, x_0) + \varepsilon\right) < 0.(5)$$

عندما $i \in I_0$ فهي محققة من أجل أي $\varepsilon > 0$وقيم صغيرة ل $\mu > 0$ ذلك لأن $f_i(x_0) \prec 0, \forall i \in \bar{I}_0$ بمطابقة العلاقات(٣)و(٤)و(٥) نجد أنه توجد النقاط مختلفة عن x_0 والتي فيها قيم $f_0(x)$ وجميع الشروط المطابقات والمتراجحات محققة وهذا يناقض كون x_0 نقطة قصوى صغرى .

وأستناداً إلى مبرهنة الفصل يوجد شعاع $y^* \in R^b$ بحيث:

$$\left\langle \bar{y}, y^* \right\rangle \ge \left\langle \bar{y}_i, y^* \right\rangle \forall \bar{y} \in P, \bar{y}_i \in N$$

$$\sum_{i\in J} \bar{y}_i y_i^* + \sum_{i\in I} \bar{y}_i y_i^* = \sum_{i\in J^{-1}} y_i^{-1} y_i^* + \sum_{i\in I} y_i^{-1} y_i^* ..(6)$$

$$\bar{y} \in P, \bar{y}_i \in N \Rightarrow y_i^* \ge 0, i \in \{0\} \cup \left(\bar{I} \setminus \bar{I}_0\right)$$

ليكن $\bar{x} \in K$ن نجعل في العلاقة $\bar{y}_i \to h_i(\bar{x}, x_0), \forall i \in \bar{J}$ (***)

نضع من أجل $\bar{y}_i = \langle \bar{x}, f_i'(x_0) \rangle, i \in I$ فنحصل على :

$$\sum_{i\in \bar{J}} y_i^* h_i(\bar{x}, x_0) + \sum_{i\in I} y_i^* \langle \bar{x}, f_i'(x_0) \rangle \ge 0, \forall \bar{x} \in K$$

نختار $y_i^* = 0, \forall i \in I_0^-$ فنحصل على العلاقة:

$$\sum_{i\in\{0\}\cup \bar{I}} y_i^* h_i(\bar{x}, x_0) + \sum_{i\in I} y_i^* \langle \bar{x}, f_i'(x_0) \rangle \ge 0$$

$$\bar{x} \in K, y_i^* \ge 0, i \in \{0\} \cup \bar{I}$$

$$y_i^* = 0, i \in I_0^-$$

وهو المطلوب .

النتائج والتوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى النتائج الآتية:

❖ إذا كانت $M=\{x: f_i(x)=0, i\in I\}$ وكانت $x_0\in M$ والتدرجات $f_i'(x_0)$ مستقلة خطياً عندئذٍ: $K_M(x_0)=\{\bar{x},\langle \bar{x}, f_i'(x_0)\rangle=0, i\in I\}$ هي مخروط الأتجاهات المماسة.

❖ تم تعميم الشروط اللازمة للقيمة القصوى وهنا ميزنا الحالتين الآتيتين:

١) شروط المسألة معطاة بمجموعة أختيارية حيث حصلنا في هذه الدراسة على النتيجة الآتية:

إذا كانت x_0 نقطة قصوى صغرى للدالة f على المجموعة M ليست محدبة بالضرورة و $h(\bar{x},x_0)$ التقريب المحدب الأعلى للدالة f في النقطة x_0 فإذا كان :

$$\operatorname{int} domh(\bullet,x_0)\cap K_M(x_0)\neq\Phi$$

عندئذٍ:

$$\partial f(x_0)\cap K_M^*(x_0)\neq\Phi$$

٢) شروط مسألة معطاة بدلالة مطابقات ومتراجحات :

$$f_i(x)\leq 0, i\in\bar{I}$$
$$f_i(x)=0, i\in I, x\in M$$

تم في هذه الدراسة التوصل إلى النتيجة الرئيسية الآتية :

إذا كانت x_0 نقطة قصوى صغرى للدالة f_0 مع الشروط :

$$f_i(x)\leq 0, i\in\bar{I}, i\in I, x\in M$$

عندئذٍ:

توجد الأعداد $y_i^*, i\in\{0\}\cup\bar{I}\cup I$ بحيث يكون :

$$\sum_{i\in\{0\}\cup I} y_i^* h_i(\bar{x},x_0)+\sum y_i^*\langle\bar{x}, f_i'(x_0)\rangle\geq 0$$
$$\forall\bar{x}\in K_M(x_0)\cap\left(\cap_{i\in\{0\}\cup\bar{I}}\ domh_i(\bullet,x_0)\right)$$

في هذه الحالة يكون:

$$y_i^*\geq 0, \forall i\in\{0\}\cup\bar{I}$$

حيث:

$$y_i^*=0, i\in\bar{I}_0$$
$$,\bar{I}_0=\{i\in\bar{I}, f_i(x_0)<0\}$$

التوصيات:

نوصي بتعميم ودراسة الشروط اللازمة للقيمة القصوى الصغرى من أجل شروط معطاة بدلالة دوال متعددة المتحولات.

المراجع:

[1] -R.COMINETTI and J.PONET,*Tangent Sets of Order one and Tow to Positive Coues of Some Functional Spaces*1997.
[2] – J.*Bor Wein and aslewis convex analysis and nonhiner optimization*,New York2000.
[3] –*Calculate conversions and optimization methods Andrif*,Tsirolwf Moskoo2001.
[4] – A.V.Aruty ,V.*Jacimovic,and F.Pereira,Second order necessary conditions for Optimal impulsive control problems*;Journal of Dynamical and Control Systems 9 (2003),131-153.
[5] – F.Clarke,*necessary conditions in dynamice optimization.Memoirs of the Ame*r. Math.Soc.no816.vol.173.2005.
[6]- Notes on sufficient conditions for extrema Francis J.*Narcowich department of mathematics taxas A*,M university January 2006.
[7] - R. Cominetti , *metric regularity, tangent sets and second order optimality* No. 822 .vol.176.2008.
[8]-Vohra R,alinear *programming apprich.cambridge university pre*ss ,New York, NY,USA(2011).
[9]-L.Einkmmer,A.Ostermann/,*Convergence analysis of a discontinuous Galerkin Poisson equation siam number* ,anal .52(2)(2014)757-778.
[10]-*Nvidia cufft library*..https:/developer.nvidia.com/cufft(last retrieved November11.2014).