

طريقة تجميع عددية لحل بعض معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية- التفاضلية

الدكتور سليمان محمد محمود*

الدكتور نضال ابراهيم حسن**

محسن محمود***

(تاريخ الإيداع 2022 /8/28 – تاريخ النشر 2022 /11/17)

□ ملخص □

نقدم في هذا البحث تقنية تجميع عددية لإيجاد الحل العددي لمعادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية ومعادلات فولتيرا-فريدهولم التفاضلية التكاملية الخطية. تعتمد الطريقة المقترحة على إنشاء كثيرات حدود من الدرجة n كتقريب لدالة حل المسألة، ثم استخدام $n+1$ نقطة تجميع تحقق شروط المسألة، نحصل عليهم كأصفار لكثيرة حدود تشيبيتشيف $T_{n+1}(x)$ أو كثيرة حدود ليجندر $L_{n+1}(x)$. تم تحديد دالة الخطأ المققطع للطريقة المقترحة وإثبات التناسق. قمنا باختبار فعالية الطريقة المقترحة بحل خمس مسائل لمعادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية و التفاضلية التكاملية ، حيث تشير نتائج المقارنات العددية لطريقتنا مع طرائق أخرى إلى أهمية النتائج التي تم التوصل إليها.

الكلمات المفتاحية: كثيرات حدود ليجندر، كثيرات حدود تشيبيتشيف، معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية- التفاضلية ، الخطأ المققطع الكلي، التناسق.

* أستاذ في قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

E-mail: Suliman_mmm@yahoo.com

** أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم- جامعة طرطوس- سورية.

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير)- قسم الرياضيات - كلية العلوم- جامعة طرطوس - طرطوس - سورية.

Numerical Collocation Method for Solving some of Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations

Dr.Suliman M. Mahmood*

Dr. Nidal E. Hassan**

Mohsen Mahmoud***

(Received 28/8/2022.Accepted 17/11/2022)

□ABSTRACT □

In this paper, we present a numerical collocation technique to find the numerical solutions of linear Volterra-Fredholm integro-equations and Volterra-Fredholm integro-differential equations. The proposed method is based on the creation of polynomials of degree n as an approximation of the problem solving function, and with the use of $n+1$ collocation points that fulfills the conditions of the problem, we get them as zeros of Chebyshev polynomial or Legendre polynomial. The truncated error function of the proposed method is defined and consistency is proven. The effectiveness of the proposed method is tested by solving four problems of the Volterra-Fredholm integro-equations and Volterra-Fredholm integro-differential equations. The numerical results of our method and comparisons with others' methods indicate the importance of the results obtained.
Keywords: Legendre Polynomials, Chebyshev Polynomials, Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations, Global Truncation Error, Consistence.

* Prof., Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

** Prof., Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tartous Universty, Tartous, Syria.

*** Postgraduate student, Depart. of Mathematics, Tartous Universty, Tartous, Syria.

1- مقدمة Introduction

حظيت المعادلات المتكاملة في العقود الماضية ومازالت حتى الآن تحظى باهتمام كبير من الباحثين والمهتمين، نظراً لأنها تظهر في العديد من مجالات العلوم والهندسة وتلعب دوراً مهماً في نمذجة ظواهر الحياة الواقعية في مجالات العلوم المختلفة. طور الباحثون طرائق كثيرة لإيجاد الحلول العددية والتقريبية لمعادلات فريدهولم و معادلات فولتيرا التكاملية، ولكن في الأعوام الأخيرة ، كان هناك اهتمام متزايد بالمعادلات التكاملية التي تظهر فيها تكاملات فولتيرا و فريدهولم في نموذج واحد يدعى معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية أو معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية -التفاضلية. تلعب معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية دوراً مهماً في العديد من فروع التحليل الدالي الخطي وغير الخطي وتطبيقاتها في نظرية الهندسة والميكانيكا، الفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء والاقتصاد. وهذا النمط من المعادلات المذكورة عادة ما يصعب حلها تحليلياً بالطرائق التقليدية، لذلك يلجأ الباحثون لتطوير طرائق وخوارزميات عددية لإيجاد الحل العددي أو التقريبي لها. سنقدم في هذا البحث طريقة تجميع عددية لحل نموذجين من المعادلات، النموذج الأول هو معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية الخطية الآتية:

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt \quad (1)$$

النموذج الثاني هو معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية- التفاضلية الخطية الآتية:

$$u'(x) + q(x)u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt$$

$$u(a) = \alpha_0 \quad (2)$$

حيث $a \leq x \leq b$ و $a \leq t \leq b$ و $K_i : [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i=1,2$) دالتين مستمرتين تدعيا نواتي المعادلة التكاملية لفولتيرا وفريدهولم على الترتيب، و $f(x)$, $q(x)$ دوال مستمرة على المجال $[a,b]$ و λ_1, λ_2 ثوابت لها دلالات فيزيائية، و $u \in C[a,b]$ دالة الحل المجهولة يطلب تعيينها.

دراسات سابقة:

قدم الباحثون طرائق عددية كثيرة لإيجاد الحلول العددية لنمطي معادلات فولتيرا-فريدهولم (1)-(2)، نذكر منهم:
طبق Hendi and Albugami في [10] عام 2010 طريقة جالركين لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية.

أوجد Dastjerdi and Ghaini في [7] عام 2012 تقنية عددية تستخدم طريقة المربعات الصغرى وكثيرات حدود تشيبيتشيف لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية. قدم Chen and Jiang في [5] عام 2012 طريقة منشور تايلور لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية. قدم Al-Jarrah and Lin في [2] عام 2013 طرائق الاستيفاء ودوال الموجة لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية. قدم Mustafa and Muhammad في

[16] عام 2014 طريقة عددية تعتمد على كثيرات حدود لاغرانج وصيغة لاغرانج المعدلة لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية من المرتبة الأولى. قدم Mirzaee and Hadadiyan في [15] عام 2016 طريقة تعتمد على دوال موجيات (Wavelet) نبضية لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية. قام Deepmala وآخرون عام 2017 في [8] باستخدام كثيرات حدود تشيبيتشيف لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى. أوجد Shiralashetti and Mundewadi في [17] عام 2017 طريقة عددية تعتمد على موجيات هار المتعامدة لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية غير الخطية. درس Zainidin وآخرون في [18] عام 2017 التقارب لطريقة اضطراب الهوموتوبي المعدلة مطبقة لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية من المرتبة m . درس Mirzaee and Samadyar في [14] عام 2018 تقارب طريقة تجميع بكثيرات حدود برنشتاين مطبقة لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية المختلطة. قدم Esmaeili وآخرون في [9] عام 2020 طريقة عددية تعتمد على دوال زائدية القطع ولها خصائص تعامدية استخدمت لحل لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية.

طور Amiri وآخرون في [4] عام 2020 طريقة التجميع الطيفية مع دوال مثلثية منقطعة لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية غير الخطية. أوجد Al-Saif and Ameen في [3] عام 2020 طريقة تجميع تعتمد على كثيرات حدود مطبقة مع نقاط تجميع لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية المختلطة.

درس Ahmad في [1] عام 2021 معد التقارب لطريقة تعتمد على دوال block pulse مطبقة لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية المختلطة. طبق Hou وآخرون في [11] عام 2021 طريقة اضطراب الهوموتوبي للحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية التفاضلية. قدم Darania and ishbin في [6] عام 2022 طرائق تجميع متعددة الخطوة باستخدام كثيرات حدود لاغرانج لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية غير الخطية.

درس Mahmoud وآخرون في [12-13] طرائق شرائحية لحل معادلات فوليترا وفريدهولم التفاضلية التكاملية.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا الموضوع إلى إيجاد تقنية تجميع عددية فعالة لإيجاد الحل العددي لنموذجين من المعادلات التكاملية، الأول هو معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية والثاني معادلات فولتيرا-فريدهولم التفاضلية-التفاضلية. تعد هذه الأنماط نماذج صعبة ومعقدة الحل بالطرائق التقليدية المألوفة، لهذا حظيت مؤخرا باهتمام الباحثين في مجالات التحليل العددي لأنها تلعب دورًا مهمًا في العديد من فروع التحليل الدالي الخطي وغير الخطي وتطبيقاتها في نظرية الهندسة والميكانيكا، الفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء والاقتصاد.

طرائق البحث ومواده: Methodology

يقع موضوع البحث ضمن مجال التحليل العددي بشكل خاص ويندرج تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية. تعتمد طرائق البحث على نظرية المعادلات، والخوارزميات العددية ولغات البرمجة وعلوم الحاسوب. ولذلك فإن التقنيات العددية المستخدمة هي خوارزميات عددية تهدف لحل نماذج من المعادلات التكاملية-التفاضلية وتنفيذ هذه الخوارزميات بإحدى لغات البرمجة، وهنا نستخدم لغة البرمجة عالية المستوى Mathematica الإصدار 11.

كثيرات حدود ليجندر [19] Legendre Polynomials

تعطى كثيرات حدود ليجندر من الدرجات $n=0,1,2,\dots$ كالآتي:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0,1,2,\dots; \quad x \in [-1,1]$$

تأخذ كثيرات حدود ليجندر قيمها في المجال $[-1,1]$ وتتمتع ببعض المزايا الهامة وهي دوال مكتبية

معرفة بلغة Mathematica كالآتي: **LegendreP[n, x]**.

كثيرات حدود تشيبشيف [19] Chebyshev Polynomials

تعطى كثيرات حدود تشيبشيف من الدرجات $n=0,1,2,\dots$ كالآتي:

$$T_n(x) = \text{Cos}[n \text{Cos}^{-1}x], \quad n = 0,1,2,\dots; \quad x \in [-1,1]$$

تأخذ قيمها في المجال $[-1,1]$ ولتبسيط عملية الحساب نجري تغييراً للمتحوّل فنضع $\theta = \text{Cos}^{-1}x$,

ف نجد أن $x = \text{cos } \theta$ وبالتالي $T_n(x) = \text{Cos}(n\theta)$ ومنة ينتج لدينا ببساطة:

$$T_2(x) = \text{Cos}(2\theta) = 2\text{cos}^2 \theta - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \text{Cos}(3\theta) = 4\text{cos}^3 \theta - 3\text{Cos} \theta = 4x^3 - 3x$$

وتعطى كدوال مكتبية في لغة Mathematica كالآتي **ChebyshevT[n, x]**.

بعض أهم الخواص:

الخاصة 1: كثيرات حدود تشيبشيف $T_n(x)$ دوال فردية إذا كانت n أعداد فردية وتكون دوال زوجية إذا

كانت n أعداد زوجية.

الخاصة 2: كثيرات حدود تشيبشيف تحقق العلاقة التكرارية:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1,2,\dots$$

الخاصة 3: كثيرة الحدود $T_n(x)$ تملك n صفراً حقيقياً متناظراً في المجال $[-1,1]$ تعطى بالعلاقة

الآتية:

$$x_k = \text{cos} \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1,2,\dots,n$$

الخاصة 4: كثيرات حدود تشيبشيف متعامدة مثلى مثلى مع دالة الوزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ في

المجال $[-1,1]$ ويتحقق الآتي:

$$\int_{-1}^1 w(x) T_i(x) T_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j & \text{تعامد} & -a \\ \pi/2, & \text{if } i = j \neq 0 & & -b \\ \pi, & \text{if } i = j = 0 & & -c \end{cases}$$

الخاصة 5: كثيرات حدود تشيبشيف متعامدة مثلى مثلى في الحالة المنفصلة، ويتحقق ما يلي:

$$\sum_{k=0}^n T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j & \text{تعامد} & -a \\ (n+1)/2, & \text{if } i = j \neq 0 & & -b \\ n+1, & \text{if } i = j = 0 & & -c \end{cases}$$

حيث $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi$, $k = 1, 2, \dots, n+1$ هي أصفار كثيرة الحدود $T_{n+1}(x)$.

جدول (1): أصفار كثيرات حدود ليجندر وتشبيثشيف من الدرجة 11.

$T_{11}(x)$ أصفار كثيرة حدود تشبيثشيف		$L_{11}(x)$ أصفار كثيرة حدود ليجندر	
-0.989821	0.989821	-0.978229	0.978229
-0.909632	0.909632	-0.887063	0.887063
-0.75575	0.75575	-0.730152	0.730152
-0.540641	0.540641	-0.519096	0.519096
-0.281733	0.281733	-0.269543	0.269543
0		0	

النتائج والمناقشة: Results and Discussion

نقوم بإنشاء كثيرات حدود من الدرجة n كتقريب لدالة حل المسألة (1) وتعريف نقاط تجميع تحقق شروط المسألة وعددها يساوي عدد المعاملات المجهولة بكثيرة الحدود المذكورة. ثم نقوم بإنشاء كثيرات حدود من الدرجة $n+1$ واختيار نقاط التجميع الموافقة بحيث تتحقق شروط المسألة (2). ثم نقدر دالة الخطأ المقتطع لهذا التقريب، وتم إجراء اختبار الطريقة بحل عدة مسائل ومقارنة نتائج طريقتنا مع نتائج طرائق أخرى.

طريقة الحل التجميعية:

لنأخذ كثيرة حدود من الدرجة n الآتية:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (4)$$

حيث a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) معاملات حقيقية مجهولة يطلب تعيينها لتكون $p(x)$ تقريب لدالة حل المسألة (1). نعوض كثيرة الحدود (4) في المسألة (1):

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i - \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t) \sum_{i=0}^n a_i t^i dt - \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t) \sum_{i=0}^n a_i t^i dt = f(x) \quad (5)$$

وبإجراء المكاملة على كثيرات الحدود التقريبية تتحول (5) إلى معادلة تتضمن $n+1$ مجهولاً a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) ولحساب هذه المجهول نستخدم $n+1$ نقطة تجميع وهم أصفار كثيرة حدود ليجندر $L_{n+1}(x)$ أو أصفار كثيرة حدود تشبيثشيف $T_{n+1}(x)$ ، وهي نقاط معلومة وعددها يساوي عدد المجهول، لنرمز لهذه النقاط بـ c_i ($i = 0, 1, \dots, n$)، حيث $-1 < c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < 1$ وبتعويض نقاط التجميع في المعادلة (5) نحصل على جملة معادلات خطية في المجهول a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) وهي من الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} r_{0,0} a_0 + r_{0,1} a_1 + \dots + r_{0,n} a_n &= f_0 \\ r_{1,0} a_0 + r_{1,1} a_1 + \dots + r_{1,n} a_n &= f_1 \\ &\vdots \\ r_{n,0} a_0 + r_{n,1} a_1 + \dots + r_{n,n} a_n &= f_n \end{aligned} \quad (6)$$

ويمكن إعادة كتابتها بالشكل المصفوفي كالآتي:

$$R A = F$$

حيث

$$R = \begin{bmatrix} r_{0,0} & r_{0,1} & \cdots & r_{0,n} \\ r_{1,0} & r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n,0} & r_{n,1} & \cdots & r_{n,n} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

وبحل جملة المعادلات (6) نحصل على متجهة المجاهيل $A = R^{-1}F$ وبالتعويض في كثيرة الحدود

(4) نحصل على كثيرة الحدود التقريبية للمسألة (1) وبالتالي نحصل على الحل العددي للمسألة (1):

$$p(x_i), i = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{حيث } h = (b - a) / N, x_i = a + ih, i = 1, 2, \dots, N$$

تطبيق الطريقة على المسألة الثانية:

نظراً لوجود المشتق في المسألة (2)، نستخدم كثيرة حدود أعلى بدرجة من كثيرة الحدود المعطاة بالعلاقة

(4) كتقريب لدالة حلها كالتالي:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i \quad (7)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ x نحصل على:

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (i) a_i x^{i-1} \quad (8)$$

وبتعويض (7) و(8) في المسألة (2) ينتج لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (i) a_i x^{i-1} + q(x) \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t) \sum_{i=0}^{n+1} a_i t^i dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t) \sum_{i=0}^{n+1} a_i t^i dt$$

$$u(a) = \alpha_0 \quad (9)$$

بأسلوب مشابه تتحول المعادلة (9) إلى معادلة تتضمن $n+1$ مجهولاً $a_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$ ، أما

$a_0 = u(0)$ فهو معلوم غالباً من شروط البدء.

ولحساب هذه المجاهيل نستخدم أيضاً $n+1$ نقطة تجميع $c_i (i = 0, 1, \dots, n)$ كما في المسألة (1)،

وبتعويض نقاط التجميع في المعادلة (9) نحصل على جملة معادلات خطية في المجاهيل

$a_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$ لها الشكل:

$$D A = B \quad (10)$$

حيث

$$D = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,n+1} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n+1,1} & d_{n+1,2} & \cdots & d_{n+1,n+1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix},$$

وبحل جملة المعادلات (10) نحصل على متجهه المجهول $A = D^{-1}B$ وبتعويض قيم المتجهه A في كثيره الحدود (7) نحصل على كثيره الحدود التقريبية للمسألة (2) وتنتج لدينا متتالية الحل العددي:

$$p(x_i), i = 1, 2, \dots, N$$

$$. h = (b - a) / N, x_i = a + ih, i = 1, 2, \dots, N$$

تحديد دالة الخطأ والاتساق:

نختبر الطريقة التجميعية المقترحة بتطبيقها على مسالة اختبار من نمط المسألة (1) الآتية:

$$u(x) = (2 - e) + \int_0^x u(t)dt + \int_0^1 u(t)dt$$

و حلها الدقيق هو دالة أسية $u(x) = \exp(x)$.

نستخدم لأجل المسألة (1) كثيره حدود من الدرجة العاشرة:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$$

وبتعويض كثيره الحدود بمسألة الاختبار وإجراء التكامل نحصل على المعادلة:

$$\begin{aligned} & -1 + a_0(1 - x) + a_1\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + a_2\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) + a_3\left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right) + a_4\left(x^4 - \frac{x^5}{5}\right) + \\ & a_5\left(x^5 - \frac{x^6}{6}\right) + a_6\left(x^6 - \frac{x^7}{7}\right) + a_7\left(x^7 - \frac{x^8}{8}\right) + a_8\left(x^8 - \frac{x^9}{9}\right) + a_9\left(x^9 - \frac{x^{10}}{10}\right) + \\ & a_{10}\left(x^{10} - \frac{x^{11}}{11}\right) = 0 \end{aligned}$$

وهنا نحتاج إلى إحدى عشرة نقطة تجميع $c_i (i = 0, 1, \dots, 10)$ عددها يساوي عدد مجاهيل كثيره الحدود وهذه

النقاط موجودة في الجدول (1)، وبتعويض كل نقطة من نقاط التجميع في المعادلة أعلاه بدلا عن x نحصل على جملة

المعادلات الخطية المعطاة بالشكل (6) كالآتي:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - c_0 & (2 - c_0)c_0 & c_0^2 - \frac{c_0^3}{3} & c_0^3 - \frac{c_0^4}{4} & \cdots & c_0^{10} - \frac{c_0^{11}}{11} \\ 1 - c_1 & (2 - c_1)c_1 & c_1^2 - \frac{c_1^3}{3} & c_1^3 - \frac{c_1^4}{4} & \cdots & c_1^{10} - \frac{c_1^{11}}{11} \\ 1 - c_2 & (2 - c_2)c_2 & c_2^2 - \frac{c_2^3}{3} & c_2^3 - \frac{c_2^4}{4} & \cdots & c_2^{10} - \frac{c_2^{11}}{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 - c_{10} & (2 - c_{10})c_{10} & c_{10}^2 - \frac{c_{10}^3}{3} & c_{10}^3 - \frac{c_{10}^4}{4} & \cdots & c_{10}^{10} - \frac{c_{10}^{11}}{11} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبطلها نحصل على المجاهيل:

$$a_0 = 1., a_1 = 1., a_2 = 0.5, a_3 = \frac{1}{6}, a_4 = \frac{1}{24}, a_5 = \frac{1}{120}, a_6 = \frac{1}{6!},$$

$$a_7 = \frac{1}{7!}, a_8 = \frac{1}{8!}, a_9 = \frac{1}{9!}, a_{10} = \frac{1}{10!}$$

وبالتالي دالة الحل التقريبي لمسألة الاختبار تكون:

$$p(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \dots + \frac{1}{10!}x^{10}$$

وبإيجاد منشور تايلور لدالة حل مسألة الاختبار $u(x)=\exp(x)$ حول x_{i-1} مع الاكتفاء بعشرة حدود:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{10} \frac{(x-x_{i-1})^k}{k!} u^{(k)}(x_{i-1}) + O(h^{11})$$

حيث إن $h = x_i - x_{i-1} = (b-a)/N$

و بحساب الخطأ المقتطع كفرق بالقيمة المطلقة بين الحل الدقيق والحل التقريبي ينتج لدينا:

$$|p(x_i) - u(x_i)| = \frac{h^{11}}{39916800} M$$

حيث $M = \text{Max} |u^{(11)}(\xi)|$, $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$

و $x_i = a + ih, i = 1, 2, \dots, N$ ونجد تطابق بين كثيرة الحدود التقريبية $p(x)$ ودالة الحل الدقيق

$u(x)=\exp(x)$ حتى الدرجة العاشرة، وبالتالي فإن:

$$\text{Max}_i |p(x_i) - u(x_i)| = N \frac{h^{11}}{39916800} M = (b-a) \frac{h^{10}}{39916800} M$$

ومنه

$$|p(x) - u(x)| = C h^{10}, \quad \forall x \in [a, b], \quad C \in R$$

حيث $C = (b-a) \frac{M}{39916800}$ وبالتالي فالطريقة متسقة ومرتبطة تقاربها هي العاشرة.

خوارزمية الطريقة التجميعية المقترحة: Algorithm of collocation Method

المدخلات: [a, b] مجال الحل، إدخال كثيرة الحدود من الدرجة $n=10$ لأجل المسألة (1)، كثيرة

الحدود من الدرجة $n=11$ لأجل المسألة (2)، N نقاط التجزئة لمجال حل المسألة .

الخطوة (1): نطبق كثيرة الحدود (4) على المسألة (1)، و نطبق كثيرتي الحدود (7) - (8) على

المسألة (2).

الخطوة (2): نحدد $n+1$ نقطة تجميع: وهم أصفار كثيرة حدود ليجنر $L_{11}(x)$ أو أصفار كثيرة

حدود تشيبيتشيف $T_{11}(x)$ معلومة في الجدول (1) ونعوضهم في المعادلة (5) لأجل المسألة (1)، أو

المعادلة (9) المسألة (2).

الخطوة (3): نحل جملة المعادلات $RA = F$ لأجل المسألة (1)، أو نحل جملة المعادلات

$DA = B$ لأجل المسألة (2).

الخطوة (4): نعوض متجهة الحل A في كثيرة الحدود التقريبية (4) لأجل المسألة (1) أو في كثيرة

الحدود التقريبية (7) لأجل المسألة (2).

الخطوة (5): نحسب طول الخطوة $(h = (b - a) / (N))$ ، ونطبع قيمة متتالية الحل العددي

$$p(x_i), i=1,2,\dots,N$$

$$. x_i = a + ih, i = 1, 2, \dots, N \text{ حيث}$$

Numerical Tests: اختبارات عددية

نختبر الطريقة التجميعية المقترحة بحل خمس مسائل اختبار مختلفة من نمط المسائل المدروسة ونقارن النتائج التي توصلنا إليها مع نتائج لطرائق وخوارزميات في مراجع أخرى ، نستخدم لغة البرمجة Mathematica لتنفيذ الخوارزمية المقترحة والحصول النتائج العددية والرسوم البيانية.

المثال (1): لنأخذ معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية الآتية [9,2020]:

$$u(x) = -\frac{2}{5}x^7 - \frac{5}{4}x^4 + x^3 - \frac{59}{20}x + 1 + \int_0^x (2x^2t + 1)u(t)dt + \int_0^1 x(t+1)u(t)dt$$

$$. u(x) = x^3 + 1 \text{ مع الحل الدقيق}$$

نطبق خوارزمتنا المقترحة على المثال (1) بإنشاء كثيرة حدود من الدرجة العاشرة بحسب الخوارزمية، وحلها باستخدام أصفار كثيرة حدود ليجندر $L_{11}(x)$ كنقاط تجميع، ثم إعادة حلها باختيار أصفار كثيرة حدود تشيبيتشيف $T_{11}(x)$ وهذه الاصفار معلومة في الجدول (1). نضع في الجدول (2) مقارنات الخطأ المطلق لطريقتنا مع طريقة Esmaeili في [9] . ونرسم في الأشكال (3)-(1) الحل التقريبي مع الحل الدقيق والخطأ المطلق في الحل التقريبي باستخدام نقاط تجميع ليجندر ونقاط تجميع تشيبيتشيف على الترتيب.

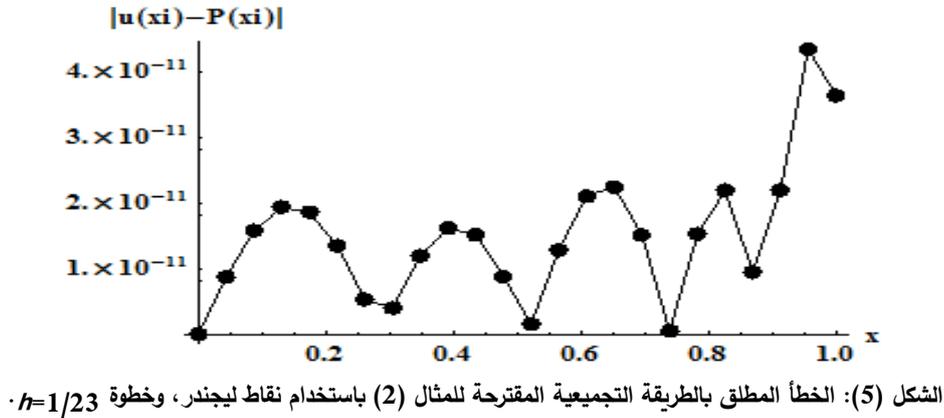
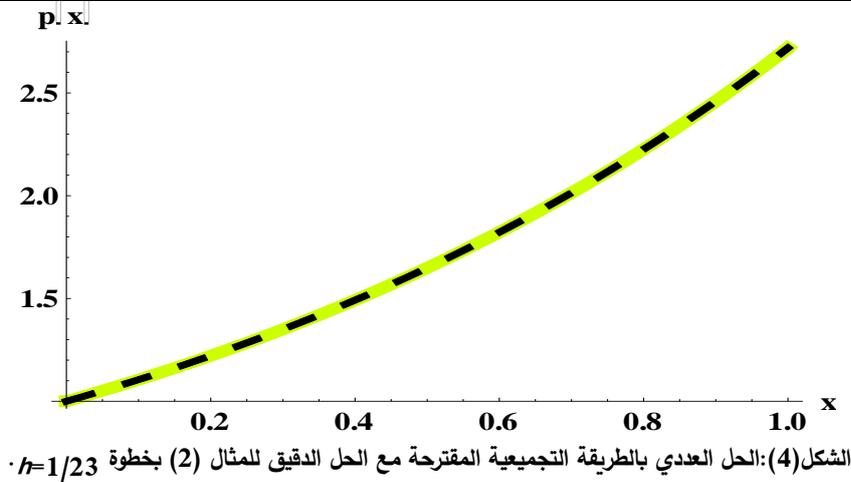
الجدول (2): مقارنات الأخطاء المطلقة في الحل العددي لخوارزمتنا مع طريقة Esmaeili في [9]

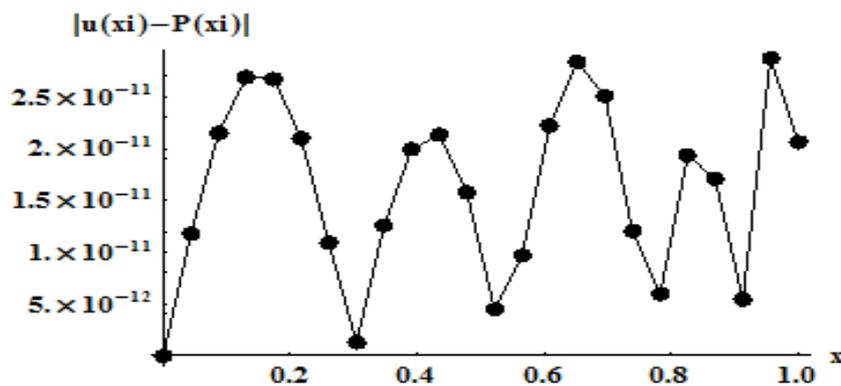
x	الخطأ المطلق لطريقة Esmaeili في [9]	الخطأ المطلق للطريقة المقترحة	
		نقاط تشيبيتشيف	نقاط ليجندر
0.0625	2.8883 E-03	4.878654 E-17	1.66589 E-16
0.1875	2.8887 E-03	6.5120986 E-17	2.11201 E-16
0.3125	2.8898 E-03	2.345127 E-16	2.22045 E-16
0.4375	2.8917 E-03	2.32467 E-16	2.58065 E-16
0.5625	2.8953 E-03	4.541258 E-16	3.52045 E-16
0.6875	2.9053 E-03	4.509134 E-16	6.66134 E-16
0.8125	2.9556 E-03	2.260915 E-16	1.11022 E-15
0.9375	2.9530 E-03	4.5013538 E-16	2.88658 E-15
1.0	-----	4.5167834 E-16	4.88498 E-15

نطبق خوارزمتنا على المثال (2) بإنشاء كثيرة حدود من الدرجة العاشرة، وحلها باستخدام أصفار كثيرة الحدود $L_{11}(x)$ ، ثم إعادة حلها باختيار أصفار $T_{11}(x)$. نضع في الجدول (3) مقارنات أكبر الأخطاء المطلقة لطريقتنا مع طريقة المربعات الصغرى وكثيرات حدود تشيبيشيف في [7]. ونرسم في الأشكال (6)-(4) الحل التقريبي مع الحل الدقيق والخطأ المطلق في الحل التقريبي باستخدام نقاط تجميع ليجندر ونقاط تجميع تشيبيشيف على الترتيب.

الجدول (3): مقارنات أكبر الأخطاء المطلقة في الحل العددي لخوارزمتنا مع الطريقة في [7].

أكبر الأخطاء المطلقة لطريقة المربعات الصغرى مع كثيرات حدود تشيبيشيف [7]		أكبر الأخطاء المطلقة لطريقتنا المقترحة	
		نقاط تشيبيشيف	نقاط ليجندر
$N=23$	$8.0 \text{ E}-7$	$2.84257 \text{ E}-11$	$3.63047\text{E}-11$





الشكل (6): الخطأ المطلق بالطريقة التجميعية المقترحة للمثال (2) باستخدام نقاط تسيبتشيف، وخطوة $h=1/23$.

المثال (3): لنأخذ معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية الآتية [6, 2022]:

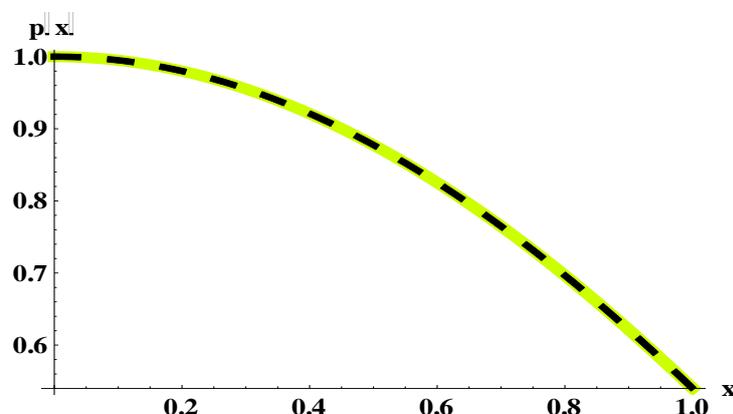
$$u(x) = f(x) + \int_0^x (x^2 + t + 2)u(t)dt + \int_0^1 (x^2 + t^2 + 1)u(t)dt,$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(2 - 2\pi + 2x - \pi x^2 - 2(-1 + 4x + x^2 + 2x^3)\text{ArcTan}x + \text{Log}(4) + x^2\text{Log}(4) + 2(2 + x^2)\text{Log}(1 + x^2))$$

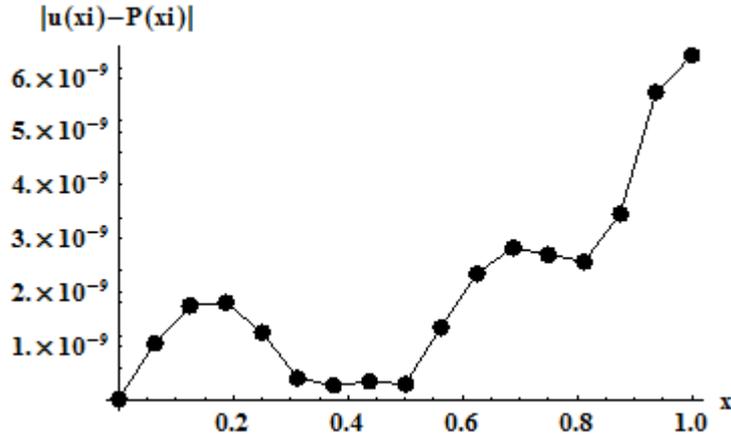
مع الحل الدقيق $u(x) = \arctan(x)$

نطبق طريقتنا على المثال (3) بإنشاء كثيرة حدود من الدرجة 10، وحلها باستخدام أصفار كثيرة الحدود $L_{11}(x)$ ، ثم إعادة حلها باختيار أصفار $T_{11}(x)$. نضع في الجدول (4) مقارنات أكبر الأخطاء المطلقة لطريقتنا مع طريقة التجميع متعددة الخطوة في [6]. ونرسم في الأشكال (9)-(7) الحل التقريبي مع الحل الدقيق والخطأ المطلق في الحل التقريبي باستخدام نقاط تجميع ليجندر ونقاط تجميع تسيبتشيف على الترتيب. الجدول (4): مقارنات أكبر الأخطاء المطلقة في الحل العددي لخوارزمتنا مع طريقة التجميع متعددة الخطوة في [6]

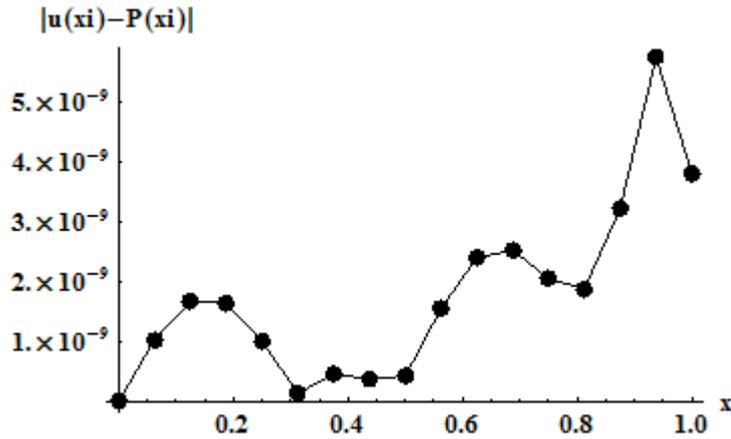
أكبر الأخطاء بطريقتنا التجميع متعددة الخطوة [6]		أكبر الأخطاء المطلقة لطريقتنا المقترحة	
		نقاط تسيبتشيف	نقاط ليجندر
$N=16$	4.36 E-9	5.7544 E-9	6.42089 E-9



الشكل (7):الحل العددي بالطريقة التجميعية المقترحة مع الحل الدقيق للمثال (3) بخطوة $h=1/16$.



الشكل (8): الخطأ المطلق بالطريقة التجميعية المقترحة للمثال (3) باستخدام نقاط ليجندر، وخطوة $h=1/16$.



الشكل (9): الخطأ المطلق بالطريقة التجميعية المقترحة للمثال (3) باستخدام نقاط تسيبتشيف، وخطوة $h=1/16$.

المثال (4): لتأخذ معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الآتية [18, 2017]:

$$u'(x) + xu(x) = f(x) + \int_0^x (1+xt)u(t)dt + \int_0^1 (x-t)u(t)dt,$$

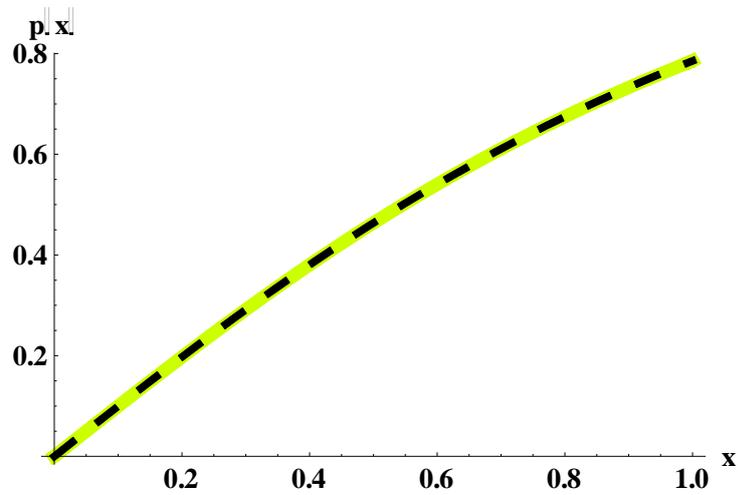
$$f(x) = 1 + x - x\cos[1] + (-1+x)\cos[x] - \sin[1] - x\sin[1] - \sin[x]$$

مع الحل الدقيق $u(x) = \cos(x)$.

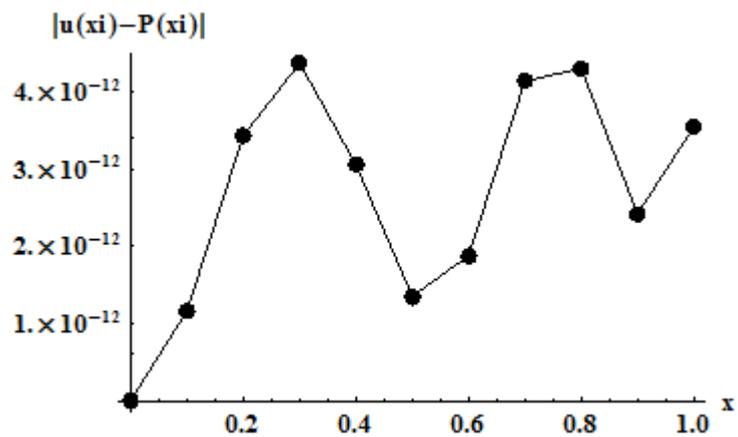
نطبق طريقتنا على المثال (4) بإنشاء كثيرة حدود من الدرجة 11، وحلها باستخدام أصفار $L_{11}(x)$ ، ثم إعادة حلها باختيار أصفار $T_{11}(x)$. نضع في الجدول (5) مقارنات أكبر الأخطاء المطلقة لطريقتنا مع طريقة تقريبات لاغرانج في [16] وطريقة تجميع متعددة الخطوة في [18]. ونرسم في الأشكال (10)-(12) الحل التقريبي مع الحل الدقيق والخطأ المطلق في الحل التقريبي باستخدام نقاط تجميع ليجندر ونقاط تجميع تسيبتشيف على الترتيب.

الجدول (5): مقارنات أكبر الأخطاء المطلقة في الحل العددي لخوارزمتنا مع طريقة التجميع متعددة الخطوة

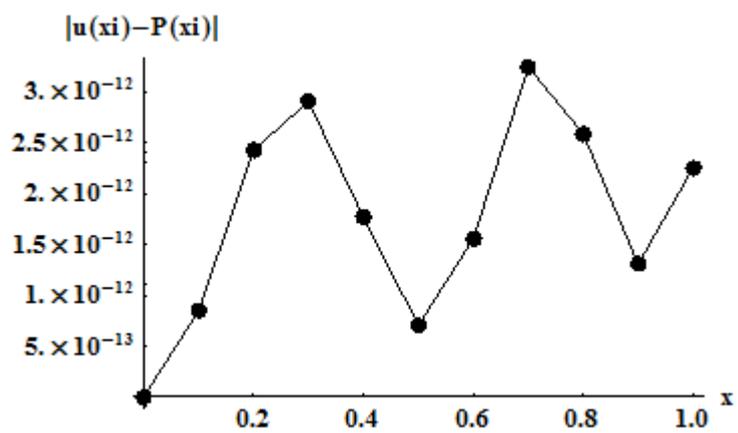
طريقة تقريبات لاغرانج [16].	أكبر الأخطاء لطريقة تجميع متعددة الخطوة [18]	أكبر الأخطاء المطلقة لطريقتنا المقترحة	
		نقاط ليجندر	نقاط تسيبتشيف
3.071380039187E-09	1.9355063 E-11	3.24563 E-12	4.312 E-12



الشكل (10): الحل العددي بالطريقة التجميعية المقترحة مع الحل الدقيق للمثال (4) بخطوة $h=1/10$.



الشكل (11): الخطأ المطلق بالطريقة التجميعية المقترحة للمثال (4) باستخدام نقاط ليجندر، وخطوة $h=1/10$.



الشكل (9): الخطأ المطلق بالطريقة التجميعية المقترحة للمثال (4) باستخدام نقاط تسبيتشيف، وخطوة $h=1/10$.

المثال (5): لتأخذ معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الآتية [8, 2017]:

$$u'(x) = f(x) + \int_0^x \cos(x+t)u(t)dt + \int_0^1 \text{Exp}(x-t)u(t)dt,$$

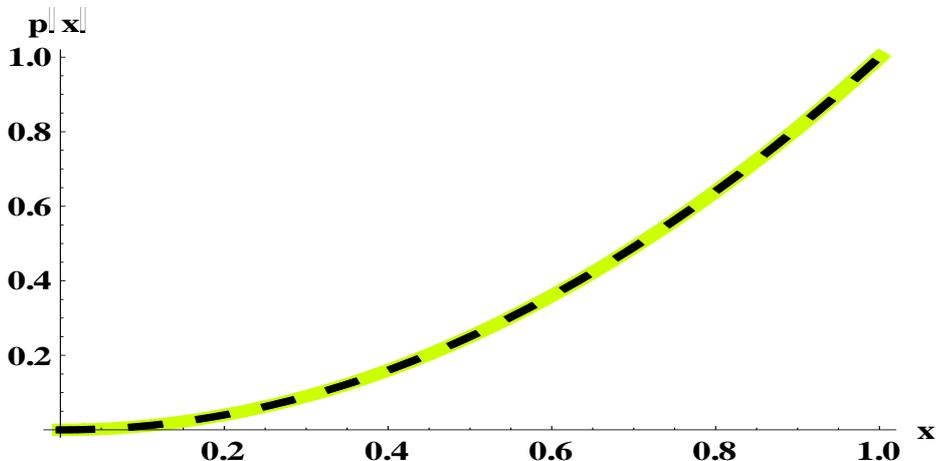
$$f(x) = -2 + 2e^{-x} + 4x - x^2 - 2\text{Cos}[1+x] - 2\text{Sin}[x] + \text{Sin}[1+x]$$

مع الحل الدقيق $u(x) = x^2$

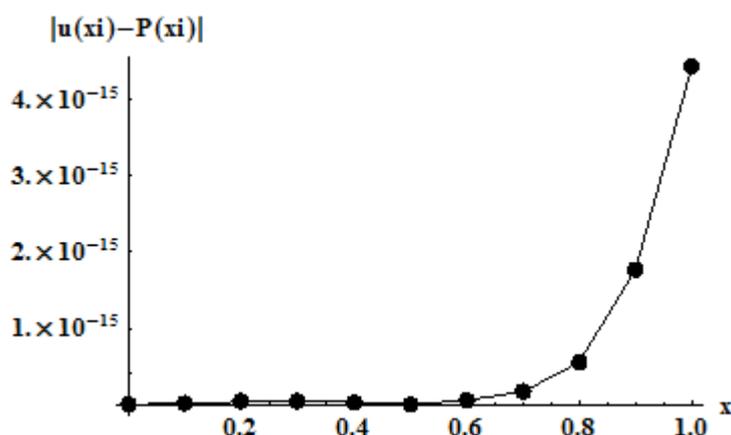
نطبق طريقتنا على المثال (5) بإنشاء كثيرة حدود من الدرجة 11، وحلها باستخدام أصفار $L_{11}(x)$ ، ثم إعادة حلها باختيار أصفار $T_{11}(x)$. نضع في الجدول (6) مقارنات الأخطاء المطلقة لطريقتنا مع طريقة تجميع تشيبتشف في [8] ونرسم في الأشكال (15)-(13) الحل التقريبي مع الحل الدقيق والخطأ المطلق في الحل التقريبي باستخدام نقاط تجميع ليجندر ونقاط تجميع تشيبتشف على الترتيب.

الجدول (6): مقارنات الأخطاء المطلقة في الحل العددي لخوارزمتنا مع طريقة تجميع تشيبتشف [8]

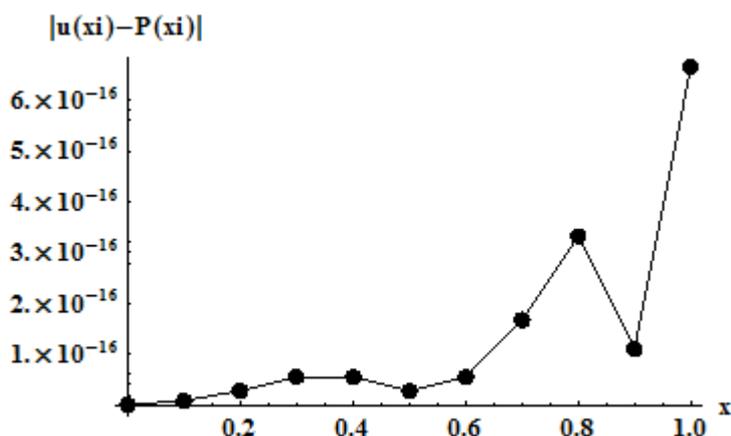
x	Chebyshev Collocation Method [8]	أكبر الأخطاء المطلقة لطريقتنا المقترحة	
		نقاط تشيبتشف	نقاط ليجندر
0.1	3.7764 E-15	8.67362 E-18	1.04083 E-17
0.2	4.2889 E-15	2.77556 E-17	3.46945 E-17
0.3	4.8711 E-15	5.55112 E-17	4.16334 E-17
0.4	5.5788 E-15	5.55112 E-17	2.77556 E-17
0.5	6.2727 E-15	2.77556 E-17	1.007427 E-17
0.6	7.0499 E-15	5.55112 E-17	5.664398 E-17
0.7	7.8825 E-15	3.33067 E-16	1.66533 E-16
0.8	8.9928 E-15	3.33067 E-16	5.664398 E-16
0.9	9.8809 E-15	1.11022 E-16	1.77636 E-15
1.0	1.0880 E-14	6.66134 E-16	4.44089 E-15



الشكل (13): الحل العددي بالطريقة التجميعية المقترحة مع الحل الدقيق للمثال (5) بخطوة $h=1/10$.



الشكل (14): الخطأ المطلق بالطريقة التجميعية المقترحة للمثال (5) باستخدام نقاط ليجندر، وخطوة $h=1/10$.



الشكل (15): الخطأ المطلق بالطريقة التجميعية المقترحة للمثال (5) باستخدام نقاط تسيبتشيف، وخطوة $h=1/10$.

الاستنتاجات والتوصيات: Recommendations and Conclusions

تم في هذا البحث إنشاء كثيرات حدود مع نقاط تجميع كثيرات حدود ليجندر وتشبثشيف وتم اختيار نقاط التجميع بحيث تتحقق شروط المسألة، وتم تطبيق هذه التقريبات لحل نموذجين من المعادلات التفاضلية التفاضلية نمط تظهر فيه تكاملات فولتيرا وفريدهولم في نموذج واحد. تم اختبار الطريقة بتنفيذها لحل خمس مسائل اختبار محلولة في مراجع مختلفة، وتمت مقارنات نتائج طريقتنا مع نتائج الطرائق الآتية: طريقة التجميع متعددة الخطوة [6]، طريقة المربعات الصغرى مع كثيرات حدود تشبثشيف [7]، طريقة تجميع تشبثشيف [8]، طريقة Esmaeili في [9]، طريقة تقريبات لاغرانج [16]، وطريقة تجميع متعددة الخطوة [18]. إذا تشير نتائج المقارنات لنتائجنا مع نتائج الطرائق الأخرى التي تمت المقارنات معها إلى تفوق خوارزمتنا من حيث الدقة العددية على معظم هذه الطرائق وتقارب الحل العددي من الحل الدقيق على كامل مجال الحل.

نظرا لنجاح الطريقة التجميعية مع نقاط تجميع كثيرات حدود ليجندر و كثيرات حدود تشبثشيف في إيجاد الحل العددي لمعادلات فولتيرا-فريدهولم التفاضلية-التفاضلية في الحالة الخطية. فنترح تطوير الخوارزمية المقترحة لإيجاد الحل العددي لمعادلات فولتيرا-فريدهولم التفاضلية-التفاضلية في الحالة غير الخطية ونوصي

باستخدام خوارزميتنا لحل معادلات فولتيرا - فريدهولم التكاملية ومعادلات فولتيرا فريدهولم التكاملية - التفاضلية في الحالة الخطية.

المراجع (References)

1. AHMAD A., *Numerical Solution of Mixed Linear Volterra-fredholm Integral Equations By Modified Block Pulse Functions*. Journal Riset dan Aplikasi Matematika, Vol. 5 No. 1 (2021) pp. 1-9.
2. Al-JARRAH Y., En-Bing Lin, *Numerical Solution of Fredholm-Volterra Integral Equations by Using Scaling Function Interpolation Method*. *Applied Mathematics*, (2013), 4, 204-209.
3. Al-SAIF, N. S. M. and A. Sh. Ameen, *Numerical Solution of Mixed Volterra- Fredholm Integral Equation Using the Collocation Method*. Open Access, Baghdad Science Journal, 17 (3), (2020) 849-853.
4. AMIRI S., M. Hajipour , D. Baleanu, *A spectral collocation method with piecewise trigonometric basis functions for nonlinear Volterra–Fredholm integral equations*. *Applied Mathematics and Computation*. Vol.370, No.1, (2020), 1-13.
5. CHEN Z., W. Jiang, *An approximate solution for a mixed linear Volterra–Fredholm integral equation*. *Applied Mathematics Letters* 25 (2012) 1131–1134.
6. Darania P. and S. Pishbin, *On the Numerical Solutions for Nonlinear Volterra-Fredholm Integral Equations*. *Bol. Soc. Paran. Mat.*, Vol. (40), 3, (2022), 1–11.
7. DASTJERDI H. L., F.M. M. Ghaini, *Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations by moving least square method and Chebyshev polynomials*. *Applied Mathematical Modelling* 36 (2012) 3283–3288.
8. DEEPMALA, V. N. Mishra, H. Marasi, H. Shabanian and M. N. Sahlan, *Solution of Voltra-Fredholm Integro-Differential Equations using Chebyshev Collocation Method*, *Global Journal of Technology & Optimization*, Vol. 8, No 1, 2017, pp.1-4.
9. ESMAEILI H. M. Rostami, V. Hooshyarbakhsh, *Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equation via hyperbolic basis functions*, *Int J Numer Model El*. 2020;1–11.
10. HENDI F.A., A.M. Albugami, *Numerical solution for Fredholm–Volterra integral equation of the second kind by using collocation and Galerkin methods*. *Journal of King Saud University (Science)* , (2010) 22, 37–40.
11. HOU J., J. Niu, M. Xu and W. Ngolo, *A New Numerical Method to Solve Nonlinear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations*. *Mathematical Modelling and Analysis*. Vol. 26, No. 3, (2021) 469-478.
12. MAHMOUD S. M., S. Enjroo, and Hasan, Daher, *Numerical Algorithm for Solving of Volterra- Fredholm Integro-Differential Equations*, *Tishreen University Journal Research-Basic Science Series* : Vol. (42) No. (5) 2020.
13. MAHMOUD S. M; ENJROO S.; DAHER H. N. *Numerical Solutions of linear Volterra Integro-Differential Equations of second kind by Spline collocation Function*, *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series* Vol. (14) No. (3), 2019, pp. 127-142.
14. MIRZAE F., N. Samadyar, *Convergence of 2D-orthonormal Bernstein collocation method for solving 2D-mixed Volterra–Fredholm integral equations*. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, Vol.172(3), (2018), 631-641.
15. MIRZAE F., E. Hadadiyan, *Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations via modification of hat functions*. *Applied Mathematics and Computation* 280 (2016) 110-123.

16. MUSTAFA M. M. and A. M. Muhammad, *Numerical Solution of Linear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations Using Lagrange Polynomials*. Mathematical Theory and Modeling, Vol.4, No.9, 2014
17. SHIRALASHETTI S.C., R.A. Mundewadi, *Numerical Solution of Nonlinear Volterra-Fredholm Integral Equations Using Haar Wavelet Collocation Method*. Bulletin of Mathematical Sciences and Applications Vol. 18, (2017) pp 50-59.
18. ZAINIDIN K. Eshkuvatov, F. S. Zulkarnain, Z. Muminov, N. M. A. N. Long, Convergence of modified homotopy perturbation method for Fredholm-Volterra integro-differential equation of order m . *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences. Special Issue on Some Advances in Industrial and Applied Mathematics* (2017) 340-345.
19. ZAROWSKI C. J., *An Introduction to Numerical Analysis for electrical and computer Engineers*. New Jersey, Wiley, 2004, 605 Pages.