مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (4) 2022
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

تمثيل كوشي – بومبيو التكاملي في رُبع قرص الواحدة

محمد أحمد سمره*

(تاريخ الإيداع 27/7/ 2022 – تاريخ النشر 11/9/ 2022)

□ ملخّص □

في هذا البحث قمنا بتعيين صيغة كوشي – بومبيو التكامليّة في رُبع قرص الواحدة من المستوي العقدي، وذلك لحل مسألة شوارتز الحدية في هذه المنطقة ، من خلال تعديل صيغة كوشي – بومبيو التكاملية المعرفة في قرص الواحدة ، الموجودة مسبقاً وذلك باستخدام مبدأ الانعكاس حول حدود المنطقة المدروسة المتمثّلة بقوس دائري و قطعتين مستقيمتين، حيث استخدمنا ثماني نقاط لإيجاد التمثيل التكاملي المطلوب، أربع نقاط منها تقع داخل دائرة الواحدة ،أما النقاط الأربع الباقية فهي تقع خارج دائرة الواحدة.

كلمات مفتاحية: صيغة كوشي – بومبيو التكاملية ، التمثيل التكاملي ، مسألة شوارتز ، مبدأ الانعكاس .

---

* طالب ماجستير– قسم الرياضيات – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا
البريد الالكتروني: amermematibash@gmail.com

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (4) 2022
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

The Cauchy – Pompeiu's Representation Formula In Quarter Unit Disk

Mohammad Ahmad Samra*

(Received 27/7/2022.Accepted 11/9/2022)

□ABSTRACT □

In this research , we found the integral Cauchy – Pompeiu's formula in quarter unit disc of the complex plain , for solving the boundary Schwarz problem in this domain , by editing the integral Cauchy – Pompeiu's formula in the unit disc by using reflection principle around boundary of the domain represented by a circular arc and two straight segments, we used eight points to find the required integrative representation , four of these points lie within a circle, the remaining four points are outside the unit disc.
Keywords: Integral Cauchy- pompeiu's formula , Integral's representation , Schwartz's problem , reflection principle .

* Master Student – Mathematics Department – Tishreen University – Lattakia - Syria
Email: amermematibash@gmail.com

مقدمة ودراسة مرجعيّة:

إنّ العديد من المسائل الفيزيائية (كهربائية و مغناطيسية و ميكانيكية و ...) غالباً ما تؤول إلى معادلات تفاضلية مع شروط حدية ، من هنا تنبع أهمية حل المسائل الحدية في مختلف الاختصاصات ، قُدمت حلول ضمنية لبعض مسائل القيم الحدية التقليدية (مثل ديريخليه ، نيومان و شوارتز وغيرها) لبعض المناطق الخاصة

- قام الباحثين H.Begehr,T.Vaitekhovich عام (٢٠٠٩) بحل مسألة شوارتز في نصف قرص الواحدة D والحلقة R [1] .
- قام الباحث H.Begehr عام (٢٠١٤) بحل مسألة شوارتز الحدّية ،في المنطقة lune [2] ، التي تنشأ من تقاطع دائرتين غير مشتركتين في المركز ،وذلك من خلال تعيين دالة غرين في هذه المنطقة وتعديل صيغة كوشي بومبيو التكاملية لتمثيل حل المسألة.
- قام الباحث B.shupeyeva عام (٢٠١٦) بحل مسألة شوارتز في النصف العلوي للمسدس[٣].

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في أن صيغة كوشي – بومبيو التكاملية في المنطقة $D \subset \mathbb{C}$ ، تُساعد في تعيين حل مسألة شوارتز الحديّة الآتية:

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = f & in\ D \\ Re(w) = \gamma & on\ \partial D \end{cases}$$

ويهدف البحث إلى:

- تعيين صيغة كوشي – بومبيو التكاملية في رُبع قرص الواحدة من المستوي العقدي
$$Q_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1 , 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2} \right\}$$
- استخدام صيغة كوشي – بومبيو التكاملية في Q_1 لحل مسألة شوارتز في هذه المنطقة .

طرائق البحث ومواده:

يعتمد هذا البحث على الاستفاده من مفاهيم وأساسيات التحليل الدّالي و التمثيل التكاملي ويستند بشكل أساسي على تعديل صيغة كوشي – بومبيو التكاملية المعرّفة على منطقة نظاميّة كيفية D ، لتتلاءم مع رُبع قرص الواحد في المستوي العقدي .

التعاريف الأساسية:

نحتاج لإنجاز هذا البحث إلى بعض التعاريف الأساسية وبعض النتائج التي تساعدنا في دراسة مسألة البحث وإيجاد حل لها .

تعريف (1) المنطقة النظاميّة Regular Domain [4]:

تُدعى المنطقة $D \subset \mathbb{C}$ ، منطقة نظامية إذا كانت مفتوحة ومحدودة و حدودها منحنٍ أملس أو اجتماع منتهٍ لمنحنيات ملساء، وموجّه بعكس عقارب الساعة.

نذكر أمثلةً للمناطق النظامية : الدائرة ، القرص الدائري ، السطوح المستوية (نصف الدائرية ، نصف الحلقية ، المثلثية والمستطيلية الشكل وماشابههما)

صيغة كوشي – بومبيو التكاملية Cauchy – Pompeiu's representation formula [4]:

لتكن $D \subset \mathbb{C}$ منطقة نظامية ، ولتكن $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};\mathbb{C})$ دالّة ما، عندئذٍ لكل $z \in D$ و $\zeta = \xi + i\eta$ تُمثّل الدالة $w = w(z)$ بإحدى الصيغتين:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\bar{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}}$$

ملحوظة:

عندما $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}$ ، تصبح صيغتا كوشي – بومبيو السابقتين على النحو الآتي:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

$$0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\bar{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}}$$

ومنه ، يمكننا صياغة مبرهنة كوشي – بومبيو التكاملية بشكل آخر [2] ، على النحو الآتي:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} w(z) & ; \ z \in D \\ 0 & ; \ z \notin \overline{D} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\bar{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}} = \begin{cases} w(z) & ; \ z \in D \\ 0 & ; \ z \notin \overline{D} \end{cases}$$

تعريف (٢) مسألة شوارتز الحديّة The Schwartz's problem [5]:

تُعرّف مسألة شوارتز الحدية في منطقة نظامية D بالشكل الآتي:

$$\partial_{\bar{z}} w(z) = f(z) \quad , z \in D \, , f \in L_p(D;\mathbb{C}) \, , p > 2$$

$$[Rew](t) = \rho(t) \quad , t \in \partial D \, , \rho \in C(\partial D;\mathbb{R})$$

ملحوظة: تُعدّل صيغة كوشي – بومبيو التكاملية من منطقة إلى أُخرى، لتحقيق الشرط الحدّي لمسألة شوارتز.

النتائج والمناقشة:

يُعرّف رُبع قرص الواحدة بالشكل الآتي:

$Q_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1 \, , \mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z > 0\}$ ولنفرض:

$\partial_1 Q_1$ للقطعة المستقيمة $[0,1]$

$\partial_2 Q_1$ للقوس $[1,i]: \tau \to e^{\tau i}$ ، حيث $\tau \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$\partial_3 Q_1$ للقطعة المستقيمة $[i,0]$

سنستخدم طريقة الانعكاس ، لتعديل صيغة كوشي – بومبيو التكاملية ، وتعريفها في المنطقة Q_1 .

نفرض $z,\zeta \in Q_1$ ، حيث $z \neq \zeta$ ، إنّ انعكاس z بالنسبة للقطعة المستقيمة $\partial_3 Q_1$ يعطي $-\bar{z}$ ، ومنه يكون انعكاس z و $-\bar{z}$ بالنسبة لمحور الفواصل هما $\bar{z}$ و $-z$ على الترتيب .

إنّ انعكاس النقاط الآتية:

$$z\,,-\bar{z}\,,-z\,,\bar{z}$$

بالنسبة لقوس دائرة الواحدة $\mathbb{D}$ يعطي على الترتيب النقاط الآتية:

$$\frac{1}{\bar{z}}\,,-\frac{1}{z}\,,-\frac{1}{\bar{z}}\,,\frac{1}{z}$$

مبرهنة 1: كل دالّة $w \in C^1(Q_1;\mathbb{C}) \cap C(\overline{Q_1};\mathbb{C})$ تُمثّل بالشكل الآتي:

$$w(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}}\left\{\operatorname{Re}[w(\zeta)].\left[\frac{\zeta^2+z^2}{\zeta^2-z^2}+\frac{\zeta^2z^2+1}{z^2\zeta^2-1}\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{2}{\pi}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}}\operatorname{Im}[w(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$+\frac{2}{\pi i}\int_1^0\operatorname{Re}[w(it)].\left[\frac{t}{t^2+z^2}+\frac{tz^2}{z^2t^2+1}\right]dt$$

$$+\frac{2}{\pi i}\int_0^1\operatorname{Re}[w(t)].\left[\frac{t}{t^2-z^2}+\frac{tz^2}{z^2t^2-1}\right]dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}\left\{w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]-\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}.\left[\frac{2\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2-z^2}+\frac{2\bar{\zeta}z^2}{z^2\bar{\zeta}^2-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

البرهان:

نطبّق مبرهنة كوشي – بومبيو على النقاط الآتية:

$$z\,,-\bar{z}\,,-z\,,\bar{z},\frac{1}{\bar{z}}\,,-\frac{1}{z}\,,-\frac{1}{\bar{z}}\,,\frac{1}{z}$$

مع ملاحظة أنّ جميع النقاط السابقة تقع خارج Q_1 ، باستثناء z فهي تنتمي إلى Q_1 ، فنجد:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1}w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\quad\ldots.(1)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1}w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-\bar{z}}-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\bar{z}}\quad\ldots.(2)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1}w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+z}-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+z}\quad\ldots.(3)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1}w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+\bar{z}}-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+\bar{z}}\quad\ldots.(4)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1}w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-\frac{1}{z}}-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\frac{1}{z}}\quad\ldots.(5)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1}w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-\frac{1}{\bar{z}}}-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\frac{1}{\bar{z}}}\quad\ldots.(6)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1}w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{1}{z}}-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+\frac{1}{z}}\quad\ldots.(7)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1}w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{1}{\bar{z}}}-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+\frac{1}{\bar{z}}}\quad\ldots.(8)$$

بجمع (1) و (3) من جهة ، و بجمع (2) و (4) من جهة أخرى نجد:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1} w(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}d\xi d\eta \quad \dots.(1')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1} w(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2-\bar{z}^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2-\bar{z}^2}d\xi d\eta \quad \dots.(2')$$

بجمع (5) و (7) من جهة ، وبجمع (6) و (8) من جهة أخرى نجد:

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1} w(\zeta).\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}d\xi d\eta \quad \dots.(3')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1} w(\zeta).\frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2\zeta^2-1}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2\zeta^2-1}d\xi d\eta \quad \dots.(4')$$

بجمع $(1')$ و $(3')$ من جهة، وبجمع $(2')$ و $(4')$ من جهة أخرى نجد:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1} w(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]d\zeta$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]d\xi d\eta \quad \dots.(1'')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1} w(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-\bar{z}^2}+\frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2\zeta^2-1}\right]d\zeta$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-\bar{z}^2}+\frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2\zeta^2-1}\right]d\xi d\eta \quad \dots.(2'')$$

يُمكننا صياغة $(1'')$ بالشكل الآتي:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\ 0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}} w(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]d\zeta$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_1^0 w(it).\left[\frac{2t}{t^2+z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2+1}\right]dt$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 w(t).\left[\frac{2t}{t^2-z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2-1}\right]dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]d\xi d\eta \dots.(*)$$

بأخذ مرافق طرفي $(2'')$ ينتج الآتي:

$$0=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_1} \overline{w(\zeta)}.\left[\frac{2\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2-z^2}+\frac{2\bar{\zeta}z^2}{z^2\bar{\zeta}^2-1}\right]d\bar{\zeta}$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1} \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}.\left[\frac{2\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2-z^2}+\frac{2\bar{\zeta}z^2}{z^2\bar{\zeta}^2-1}\right]d\xi d\eta \quad \dots.(3'')$$

وبإعادة صياغة الناتج $(3'')$ نحصل على:

$$0=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}}\overline{w(\zeta)}.\left[\frac{2}{\zeta^2z^2-1}+\frac{2z^2}{\zeta^2-z^2}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_1^0\overline{w(\iota t)}.\left[\frac{2t}{t^2+z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2+1}\right]dt$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\overline{w(t)}.\left[\frac{2t}{t^2-z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2-1}\right]dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}.\left[\frac{2\bar\zeta}{\bar\zeta^2-z^2}+\frac{2\bar\zeta z^2}{z^2\bar\zeta^2-1}\right]d\xi d\eta\ \ldots.(**)$$

حيث:

$$|\zeta|=1\Rightarrow\ \zeta.\bar\zeta=1\ ,d\bar\zeta=-\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$
$$\mathrm{Im}(\zeta)=0\Rightarrow\zeta=\bar\zeta=t$$

بطرح $(**)$ من $(*)$ نحصل على:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}}\left\{w(\zeta).\left[\frac{2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta^2z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]+\overline{w(\zeta)}.\left[\frac{2z^2}{\zeta^2-z^2}+\frac{2}{\zeta^2z^2-1}\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_1^0\left\{w(it).\left[\frac{2t}{t^2+z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2+1}\right]\right.$$
$$\left.+\overline{w(\iota t)}.\left[\frac{2t}{t^2+z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2+1}\right]\right\}dt$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\left\{w(t).\left[\frac{2t}{t^2-z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2-1}\right]+\overline{w(t)}.\left[\frac{2t}{t^2-z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2-1}\right]\right\}dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}\left\{w_{\bar\zeta}(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]\right.$$
$$\left.-\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}.\left[\frac{2\bar\zeta}{\bar\zeta^2-z^2}+\frac{2\bar\zeta z^2}{z^2\bar\zeta^2-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

نعوض $w(\zeta)=\mathrm{Re}[w(\zeta)]+i\mathrm{Im}[w(\zeta)]$ في المساواة السابقة نجد:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}}\left\{\left[\mathrm{Re}[w(\zeta)]+i\mathrm{Im}[w(\zeta)]\right].\left[\frac{2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta^2z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{Re}[w(\zeta)]-i\mathrm{Im}[w(\zeta)]\right].\left[\frac{2z^2}{\zeta^2-z^2}+\frac{2}{\zeta^2z^2-1}\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_1^0\left\{\left[\mathrm{Re}[w(it)]\quad+i\mathrm{Im}[w(it)]\right].\left[\frac{2t}{t^2+z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2+1}\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{Re}[w(it)]-i\mathrm{Im}[w(it)]\right].\left[\frac{2t}{t^2+z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2+1}\right]\right\}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\left\{\left[\mathrm{Re}[w(t)]+i\mathrm{Im}[w(t)]\right].\left[\frac{2t}{t^2-z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2-1}\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{Re}[w(t)]-i\mathrm{Im}[w(t)]\right].\left[\frac{2t}{t^2-z^2}+\frac{2tz^2}{z^2t^2-1}\right]\right\}dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}\left\{w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]\right.$$
$$\left.-\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}.\left[\frac{2\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2-z^2}+\frac{2\bar{\zeta}z^2}{z^2\bar{\zeta}^2-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

وبصياغة العلاقة السابقة ينتج :

$$w(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}}\left\{\mathrm{Re}[w(\zeta)].\left[\frac{\zeta^2+z^2}{\zeta^2-z^2}+\frac{\zeta^2z^2+1}{z^2\zeta^2-1}\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{2}{\pi}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}}\mathrm{Im}[w(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{2}{\pi i}\int_1^0\mathrm{Re}[w(it)].\left[\frac{t}{t^2+z^2}+\frac{tz^2}{z^2t^2+1}\right]dt$$
$$+\frac{2}{\pi i}\int_0^1\mathrm{Re}[w(t)].\left[\frac{t}{t^2-z^2}+\frac{tz^2}{z^2t^2-1}\right]dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}\left\{w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]-\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}.\left[\frac{2\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2-z^2}+\frac{2\bar{\zeta}z^2}{z^2\bar{\zeta}^2-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

وهو المطلوب.

مبرهنة ٢: إن حل مسألة شوارتز الحدّية في Q_1 (رُبع قرص الواحدة) :

$$\begin{cases} w_{\bar{z}}=f & in\ Q_1\\ Re[w]=\gamma & on\ \partial Q_1\\ \gamma(0)=\gamma(i)=\gamma(1)=0 \end{cases}$$

يُعطى وفق الصيغة الآتية :

$$w(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}}\left\{\gamma(\zeta).\left[\frac{\zeta^2+z^2}{\zeta^2-z^2}+\frac{\zeta^2z^2+1}{z^2\zeta^2-1}\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}+ic$$
$$+\frac{2}{\pi i}\int_1^0\gamma(\zeta).\left[\frac{t}{t^2+z^2}+\frac{tz^2}{z^2t^2+1}\right]dt$$
$$+\frac{2}{\pi i}\int_0^1\gamma(\zeta).\left[\frac{t}{t^2-z^2}+\frac{tz^2}{z^2t^2-1}\right]dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}\left\{f(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]-\overline{f(\zeta)}.\left[\frac{2\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2-z^2}+\frac{2\bar{\zeta}z^2}{z^2\bar{\zeta}^2-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

وذلك بشرط :

$$f\in L_p(Q_1;\mathbb{C})\ ,\qquad \gamma\in C(\partial Q_1;\mathbb{C})$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Im}\left[w\left(e^{i\theta}\right)\right]d\theta=c$$

البرهان:

وجدنا من مبرهنة كوشي – بومبيو التكاملية المعدّلة في Q_1 بأنّ كل دالّة $w \in C^1(Q_1;\mathbb{C}) \cap C(\overline{Q_1};\mathbb{C})$ تُمثّل بالشكل الآتي:

$$w(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\ 0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}} \left\{\mathrm{Re}[w(\zeta)].\left[\frac{\zeta^2+z^2}{\zeta^2-z^2}+\frac{\zeta^2z^2+1}{z^2\zeta^2-1}\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{2}{\pi}\int_{\substack{|\zeta|=1\\ 0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}} \mathrm{Im}[w(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$+\frac{2}{\pi i}\int_1^0 \mathrm{Re}[w(it)].\left[\frac{t}{t^2+z^2}+\frac{tz^2}{z^2t^2+1}\right]dt$$

$$+\frac{2}{\pi i}\int_0^1 \mathrm{Re}[w(t)].\left[\frac{t}{t^2-z^2}+\frac{tz^2}{z^2t^2-1}\right]dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{Q_1}\left\{w_{\bar\zeta}(\zeta).\left[\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}+\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}\right]-\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}.\left[\frac{2\bar\zeta}{\bar\zeta^2-z^2}+\frac{2\bar\zeta z^2}{z^2\bar\zeta^2-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

بتعويض الشروط الحدية لمسألة شوارتز غير المتجانسة في الصيغة السابقة وبملاحظة أن :

$$\frac{2}{\pi}\int_{\substack{|\zeta|=1\\ 0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}}} \mathrm{Im}[w(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2i}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Im}\left[w\left(e^{i\theta}\right)\right]d\theta = ic$$

نحصل على المطلوب.

النتائج والتوصيات :

في هذا البحث توصلنا إلى :

- إيجاد تمثيل كوشي بومبيو التكاملي في المنطقة Q_1 .
- حل مسألة شوارتز في Q_1 باستخدام التمثيل التكاملي السابق .

كما نوصي بمتابعة البحث من خلال :

- إيجاد تمثيل كوشي بومبيو التكاملي في مناطق جديدة .
- حل مسألة شوارتز في هذه مناطق جديدة حدودها عبارة عن أقواس دوائر وقطع مستقيمة باستخدام التمثيل التكاملي السابق.

المراجع:

[1] H.Begehr, T.Vaitekhovich, *Harmonic boundary value problems in half disc and half ring, Functiones et Approximatio,* 40.2,(2009), pp.251-282.

[2] Begehr, H., Vaitekhovich, T.: *Schwarz problem in lens and lune.* Complex Var. Ell. Eq., **59**(1), 76–84 (2014).

[3] B.Shupeyeva, *Dirichlet Problem for Complex Poisson Equation in a Half Hexagon Domain,* Journal of Complex Analysis,(2016).

[4] Shupeyeva, B.: *Some Basic Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations in Quarter Ring and Half Hexagon*, Ph.D. thesis, FU Berlin,(2013).

[5] Y.F.Wang, Y.J.Wang, *Schwarz-type problem of nonhomogeneous Cauchy-Riemann equation on a triangle,* J.Math.Anal.Appl.(2011).