

## طريقة عددية هجينة لإيجاد حل تقريبي لمسائل القيم الابتدائية من المرتبة الأولى

الدكتورة منال حسين \*

الدكتور وسيم بلال \*\*

وسيم وسوف \*\*\*

(تاريخ الإيداع 2022 /8/7 – تاريخ النشر 2022 /11/17)

### □ ملخص □

تم في هذا البحث تطوير طريقة عددية تعتمد على إجراء تعديل على طريقة عددية شهيرة لحل مسائل القيم الابتدائية وهي طريقة هيون عن طريق تهجينها مع طريقة (contraharmonic Mean) من اجل تحسين كفاءتها.

يتضمن البحث دراسة الاتساق والاستقرار وتحديد دالة الخطأ المطلق ومقارنة نتائج الطريقة مع طريقة هيون ومع طرائق عددية أخرى معدلة مهجنة مع طريقة (contraharmonic Mean) ايضاً؛ مع رسم مناطق الاستقرار التي تحدها الطريقة.

تم اختبار الطريقة المقدمة على ثلاثة مسائل قيمة ابتدائية حيث تبين المقارنات أن الطريقة المقدمة فعالة وتعطي نتائج جيدة.

**الكلمات المفتاحية:** الطريقة العددية الهجينة، مسائل القيم الابتدائية ، خطأ الاقتران المحلي، الاستقرار، الإتساق.

\* مدرس في قسم الرياضيات -كلية العلوم -جامعة طرطوس -سوريا

\*\* مدرس في قسم العلوم الاساسية -كلية الهندسة الطبية- جامعة الأندلس الخاصة للعلوم الطبية - سوريا

\*\*\*طالب دراسات عليا (ماجستير)-قسم الرياضيات -كلية العلوم - جامعة طرطوس- سوريا

## Hybrid Numerical Method For Finding Approximate Solution To The First-Order Initial Value Problems

Dr. Manal Hussein \*

Dr. Wassim Bilal \*\*

Wassem Wassouf \*\*\*

(Received 7/8/2022.Accepted 17/11/2022)

### □ABSTRACT □

In this research, a numerical method that relies on a modification to a famous numerical method for solving initial value problems was developed, which is Heun's method, by hybridizing it with the contraharmonic mean method in order to improve its efficiency.

In this study, consistency and stability were proved, the absolute error function determined, and the results of this method were compared with Heun's method and with other modified numerical methods that were hybrid with the contraharmonic mean method as well, the stability regions defined by the method are also plotted.

The presented method was tested on three initial value problems where comparisons show that the presented method is effective and gives good results.

**Keywords:** Hybrid Numerical Method, Initial Value Problems (IVPs), Local Truncation Error (LTE), Stability, Consistency.

---

\*Teacher, Depart of Mathematics, Faculty of Science, Tartous Universty, Syria.

\*\* Teacher, Depart of Basic Sciences, Faculty of Medical Engineering, Al Andalus Private Universty For Medical Sciences ,Tartous, Syria.

\*\*\*Postgraduate student (master), Depart of Mathematics, Faculty of Science, Tartous Universty, Tartous, Syria.

## 1-مقدمة:

اهتم العديد من الباحثين بدراسة المعادلات التفاضلية وحلولها بمختلف أشكالها وأصنافها لكونها تلعب دوراً كبيراً في تفسير الظواهر الطبيعية في حياتنا كما تستخدم أيضاً بشكل كبير في الفيزياء والكيمياء والاقتصاد وغيرها؛ إذ إن أغلب هذه الظواهر يمكن توصيفها بمعادلات تفاضلية عادية أو جزئية. [4]

تتوفر طرائق تحليلية مختلفة لحل هذه المعادلات ولكن في بعض الحالات لا توفر لنا تلك الطرائق التحليلية السابقة حلاً عندما تكون المعادلة التفاضلية غايةً في الصعوبة والتعقيد لذلك تم اللجوء الى استخدام الطرائق العددية والتي تعتبر أداة مهمة جداً للحصول على حل للمعادلات المعقدة بسهولة وسرعة كبيرة بمساعدة لغات البرمجة الحاسوبية. [5]

قام العديد من الباحثين بتطوير تقنيات عددية للحصول على حلول للمعادلات التفاضلية العادية، يتم انشاء وتطوير هذه التقنيات العددية بأساليب تهدف الى الحصول على دقة واستقرار واتساق أفضل [6] ، ويتم من وقت لآخر إجراء بعض التغييرات في الطرائق العددية للحصول على أداء أفضل وفقاً لاحتياجاتنا.

ركزت بعض الدراسات العلمية الحديثة على إجراء تعديلات على الطرائق العددية الخاصة بحل المعادلات التفاضلية العادية والتي يمكن أن يعبر عنها كمسائل قيم ابتدائية من المرتبة الأولى بالشكل:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ; \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{and} \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

قدم الباحثون مؤخراً العديد من الأبحاث التي تقترح طرائق عددية هجينة لحل مسائل القيم الابتدائية ذات الشكل (1).

فعلى سبيل المثال، طوّر DJ Evans and N Yaacob في عام 1995 طريقة جديدة من الدرجة الرابعة من نوع Runge–Kutta باستخدام المتوسط Heronian [1]. وقدم DJ Evans and AR Yaakub في عام 1996 طريقة رانج-كوتا الجديدة الموزونة من الدرجة الخامسة ذات 5 مراحل لحل المسائل من النمط (1) [2]. وقدم H Ramos في عام 2007 خوارزمية صريحة غير قياسية مناسبة لحل أنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية وتحديدًا المعادلات الصلبة، والمعادلات المضطربة [3]. كما اقترح MA Akanbi في عام 2010 تطويراً لطريقة أولير من المرتبة الثالثة لحل المسألة من النمط (1) [5]. وقدم SO Ayinde and EA Ibijola في عام 2015 طريقة عددية جديدة لحل مسألة القيمة الابتدائية من النمط (1) وتم الحصول على مخطط تكاملي عددي جديد مناسب لحل المعادلات المتذبذبة والاسية [7].

وطوّر B FalodunS Fadugba and في عام 2017 مخططاً جديداً من خطوة واحدة لحل مسائل القيم الابتدائية من النمط (1) واستخدم في تطويره مزيجاً من توابع الاستيفاء وسلسلة تايلور [8]. وقدم BF Etin and Osa في عام 2018 طريقة جديدة هجينة لـ رانج-كوتا من الدرجة الرابعة بناءً على التركيبة الخطية للمتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي لحل مسائل القيم الابتدائية من المرتبة الأولى (IVPs) [9]. واقترح T Aliya, AA Shaikh and S Qureshi في عام 2018 طريقة عددية غير خطية هجينة جديدة من المرتبة الثانية لحل مسائل القيم الابتدائية من النمط (1) بالاعتماد على طريقة Fatunla وطريقة أولير المحسنة [10]. وفي عام 2020 قدم AH Worki طريقة جديدة لحل المسائل من النمط (1) بالاعتماد على طريقة أولير المعدلة وطريقة

Contraharmonic Mean [12]. وفي عام 2020 قدم MA Solangi, AA Sanghahi T Ram , طريقة جديدة لحل المسائل من النمط (1) بالاعتماد على طريقة النقطة الوسطى وطريقة Contraharmonic Mean [13].

## 2- أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى تطوير طريقة عددية فعالة عن طريق التهجين بين طريقتين عدديتين كل منهما من المرتبة الثانية وهما طريقة هيون Heun's Method وطريقة Contraharmonic Mean Method لإيجاد الحل العددي لبعض مسائل القيم الابتدائية في المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى نظراً لأهمية هذه المعادلات الكبيرة ولكثرة استخداماتها في التطبيقات العلمية الحديثة وانتشارها الواسع. كما نهدف إلى دراسة الاستقرار والاتساق والخطأ المطلق للطريقة المقدمه لضمان الدقة والفعالية في الحلول العددية التي سنحصل عليها. كما ويتجلى هدفنا بشكل أساسي في دعم وتطوير البحث العلمي، وتزويد الباحثين وطلاب الدراسات العليا بمعلومات إضافية من الناحيتين النظرية والتطبيقية.

## 3- طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث بشكل أساسي وكبير على تقنيات التحليل العددي والخوارزميات والبرمجة، وكذلك بعض المفاهيم في المعادلات التفاضلية. كما تم الاطلاع على بعض الطرائق الحديثة والتقنيات العددية المذكورة في المراجع العلمية الحديثة التي تطرقت لحل مسائل من الأنماط المطروحة.

## 4- الطريقة الهجينة المقدمه:

استنتج الطريقة العددية الهجينة المستخدمة في حل المسائل من النمط (1).

إن طريقة هيون هي طريقة معدلة عن طريقة أويلر الشهيرة لحل المعادلات التفاضلية عددياً وهي طريقة من المرتبة الثانية وتعطى صيغتها بالشكل التالي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left[ f(x_n, y_n) + 3f \left( x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n) \right) \right] \quad (2)$$

أما طريقة Contraharmonic Mean من المرتبة الثانية تعطى بالعلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ \frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1 + K_2} \right] \quad (3)$$

حيث:  $K_1 = f(x_n, y_n)$  and  $K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1)$

يمكن كتابة العلاقة (2) بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + hK \quad (3)$$

$$K = \left[ \frac{1}{4}f(x_n, y_n) + \frac{3}{4}f \left( x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n) \right) \right]$$

والعلاقة (3) بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + hR$$

بحيث:

$$R = \left[ \frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1 + K_2} \right]$$

والآن نقوم باستبدال الحد  $f(x_n, y_n)$  والحد  $f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right)$  الموجودان في العلاقة (2) بكل من  $K$  و  $R$  على الترتيب فتصبح العلاقة بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[K + 3R] \quad (4)$$

وبإصلاح العلاقة (4) تصبح بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3h}{4} \left[ \frac{1}{3}K + \frac{[K_1^2 + K_2^2]}{[K_1 + K_2]} \right] \quad (5)$$

العلاقة (5) تمثل طريقتنا العددية الهجينة الناتجة لحل المسائل من النمط (1).

### 5- دراسة استقرار الطريقة المقدمية:

إن دالة الاستقرار للطريقة العددية المقدمية يمكن الحصول عليها باستخدام اختبار Dahlquist الآتي

: [13]

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y_n; y(x_0) = y_0; \lambda \in \mathbb{C}$$

بتطبيق هذا الاختبار على طريقتنا الهجينة المعطاة بالعلاقة (5)، نحصل على الآتي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3h}{4} \left[ \left( \frac{1}{12}\lambda y_n + \frac{1}{4}\lambda(y_n + \frac{2}{3}h\lambda y_n) \right) + \frac{(\lambda y_n)^2 + [\lambda(y_n + h\lambda y_n)]^2}{(\lambda y_n) + [\lambda(y_n + h\lambda y_n)]} \right]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3h}{4} \left[ \left( \frac{1}{12}\lambda y_n + \frac{1}{4}\lambda y_n + \frac{1}{6}\lambda^2 h y_n \right) + \frac{\lambda^2 y_n^2 + \lambda^2 (y_n + h\lambda y_n)^2}{2\lambda y_n + \lambda^2 h y_n} \right]$$

وبالإصلاح نجد أن:

$$y_{n+1} = y_n \left[ 1 + \frac{1}{4}\lambda h + \frac{1}{8}(\lambda h)^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{\lambda h}{2 + \lambda h} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{(\lambda h)^2}{2 + \lambda h} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{(\lambda h)^3}{2 + \lambda h} \right) \right]$$

وبفرض  $Z = \lambda h$  تصبح دالة الاستقرار بالشكل:

$$\Psi(Z) = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \left[ 1 + \frac{1}{4}Z + \frac{1}{8}Z^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{Z}{2 + Z} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{Z^2}{2 + Z} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{Z^3}{2 + Z} \right) \right]$$

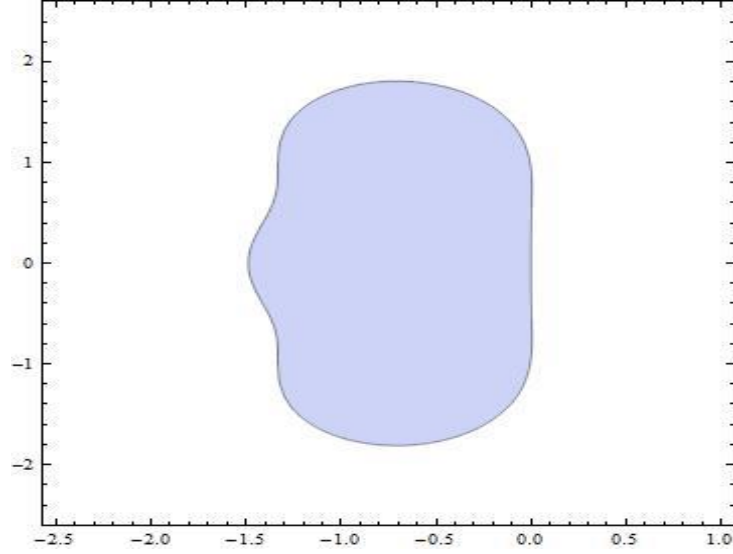
وبعد الاختزال يصبح بالشكل:

$$\Psi(Z) = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}Z + \frac{7}{8}Z^2 - \frac{3}{2 + Z}$$

وتكون طريقتنا المقدمية مستقرة عندما:  $|\Psi(Z)| \leq 1$

وباستخدام لغة البرمجة Mathematica نرسم الشكل (1) الذي يمثل منطقة استقرار طريقتنا المقدمية بحيث

تكون الطريقة مستقرة في المنطقة المظلمة.



الشكل (1)

### 6- إثبات اتساق الطريقة المقدمه:

تكون الصيغة العددية لطريقة ما متسقة مع مسألة القيمة الابتدائية من النمط (1) إذا كانت تكتب

بالشكل التالي [11]:

$$y_{n+1} = y_n + h \varphi(x_n, y_n, h) \quad (6)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) \quad \text{بحيث يكون}$$

نلاحظ في حالتنا أنه وبمقارنة العلاقة (5) مع العلاقة (6) نجد أن:

$$\varphi(x_n, y_n, h) = \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{3} K + \left[ \frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1 + K_2} \right] \right]$$

$$\varphi(x_n, y_n, h) = \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} f(x_n, y_n) + \frac{3}{4} f \left( x_n + \frac{2}{3} h, y_n + \frac{2}{3} h f(x_n, y_n) \right) \right) + \left[ \frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1 + K_2} \right] \right]$$

ونجد من خلال حساب النهاية:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x_n, y_n, h)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} f(x_n, y_n) + \frac{3}{4} f \left( x_n + \frac{2}{3} h, y_n + \frac{2}{3} h f(x_n, y_n) \right) \right) + \left[ \frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1 + K_2} \right] \right]$$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x_n, y_n, h) \\ &= \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{12} f(x_n, y_n) + \frac{1}{4} f(x_n, y_n) \right. \\ & \quad \left. + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_n, y_n)^2 + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))^2}{f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))} \right] \right] \\ \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x_n, y_n, h) &= \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{12} f(x_n, y_n) + \frac{1}{4} f(x_n, y_n) + \left[ \frac{2 f(x_n, y_n)^2}{2 f(x_n, y_n)} \right] \right] \\ &= \frac{3}{4} \left[ \frac{16}{12} f(x_n, y_n) \right] = f(x_n, y_n) \end{aligned}$$

وهذا يعني أن الطريقة الهجينة المقدمة متسقة.

### 7- تحليل خطأ الاقتران المحلي للطريقة المقدمية:

يعرف خطأ الاقتران المحلي  $LTE$  لطريقة ما بأنه قيمة منشور تايلور عند النقطة  $x_{n+1}$  مطروحاً منه

القيمة  $y_{n+1}$  الناتجة عن تلك الطريقة أي أن:

$$LTE = y(x_{n+1}) - y_{n+1} \quad (7)$$

إن خطأ الاقتران المحلي  $LTE$  يعطى بالعلاقة الآتية [10]:

$$LTE = Ch^{q+1} y^{(q+1)}(x) + O(h^{q+2})$$

حيث  $C$  يمثل ثابت الخطأ و  $q$  مرتبة تقارب الطريقة.

إن قيمة منشور تايلور عند النقطة  $x_{n+1}$  تعطى بالشكل [13]:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + O(h^4) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) = y(x_n + h) &= y(x_n) + h f + \frac{h^2}{2!} (f_x + f f_y) \\ &+ \frac{h^3}{3!} (f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f f_y^2 + f_x f_y) + O(h^4) \end{aligned} \quad (9)$$

بحيث  $f(x_n, y_n) = f$

أما قيمة المنشور عند  $K_1$  و  $K_2$  المعرفة في العلاقة (5) عند نشرها بالعلاقة (8) تكون كما يلي [13]:

$$\begin{aligned} K_1 &= f \\ K_2 &= f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \\ &= f + h (f_x + f f_y) + \frac{h^2}{2!} (f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy}) + O(h^3) \end{aligned}$$

وقيمة المنشور عند  $K$  تكون تحسب بشكل مشابه وهي:

$$\begin{aligned} K &= \left[ \frac{1}{4} f(x_n, y_n) + \frac{3}{4} f \left( x_n + \frac{2}{3} h, y_n + \frac{2}{3} hf(x_n, y_n) \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} f + \frac{3}{4} \left[ f + \frac{2}{3} h (f_x + f f_y) + \frac{2 h^2}{9} (f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy}) \right] + O(h^3) \\ &= f + \frac{1}{2} h (f_x + f f_y) + \frac{h^2}{6} (f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy}) + O(h^3) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}K + R = \frac{4}{3}f + \frac{2}{3}h(f_x + ff_y) \quad (10)$$

$$+ h^2 \left( \frac{11}{36}f_{xx} + \frac{11}{18}ff_{xy} + \frac{11}{36}f^2f_{yy} + \frac{1}{4}ff_y^2 + \frac{1}{2}f_xf_y + \frac{1}{4}\frac{f_x^2}{f} \right) + O(h^3)$$

الآن وبتعويض العلاقة (10) في العلاقة (5) نحصل على:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{1}{2}h^2(f_x + ff_y) \quad (11)$$

$$+ h^3 \left( \frac{11}{48}f_{xx} + \frac{11}{24}ff_{xy} + \frac{11}{48}f^2f_{yy} + \frac{3}{16}ff_y^2 + \frac{3}{8}f_xf_y + \frac{3}{16}\frac{f_x^2}{f} \right) + O(h^4)$$

الآن وبتعويض العلاقتين (11) و (9) في العلاقة (7) نحصل على خطأ الاقتطاع المحلي بالشكل:

$$LTE = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$LTE = h^3 \left( -\frac{1}{16}f_{xx} - \frac{1}{8}ff_{xy} - \frac{1}{16}f^2f_{yy} - \frac{1}{48}ff_y^2 - \frac{5}{24}f_xf_y - \frac{3}{16}\frac{f_x^2}{f} \right) + O(h^4) \quad (12)$$

العلاقة (12) تمثل الخطأ في طريقتنا الهجينة المقدمة وتبين أن الطريقة المقدمة متقاربة من المرتبة

الثانية.

## 8- النتائج العددية والمناقشة:

تمت مناقشة الحلول العددية بطريقة هيون Heun's Method وطريقة أولير المعدلة Modified Euler's Method والتي يرمز لها ب (MEM) والطريقة العددية الهجينة المقدمة في [12] والطريقة العددية الهجينة المقدمة في [13] وطريقتنا العددية الهجينة المقترحة لثلاثة مسائل قيم ابتدائية من النمط (1) وحساب الأخطاء المطلقة وتم تقديم الجداول والرسوم البيانية لهذه الحلول والاختفاء باستخدام لغة البرمجة MATLAB.

**المسألة (1):** إيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$y' = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{80}; \quad y(0) = 1; \quad x \in [0,1]$$

$$y = \frac{20}{1+19e^{-\frac{x}{4}}} \quad \text{والتي تقبل الحل الدقيق}$$

نعرض في الجدول (1) الحلول العددية للمسألة (1) بالطرائق المذكورة بخطوة  $h = 0.1$  مع الحل الدقيق للمسألة ونعرض في الجدول (2) الأخطاء المطلقة الناتجة عن الطرائق العددية السابقة للمسألة (1) بنفس الخطوة.



الجدول (1): الحلول العددية للمسألة (1) بخطوة  $h = 0.1$

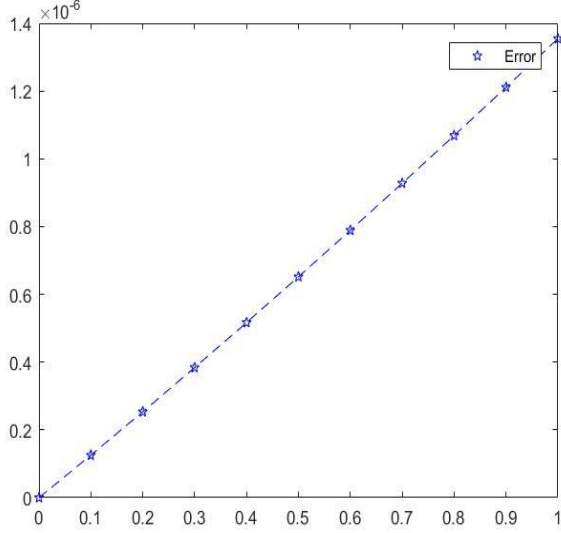
$x_n$	Heun's Method	(MEM) Method	Hybrid Method In [12]	Hybrid Method In [13]	Our Hybrid Method	Exact Solution
0.1	1.0240169	1.0240168	1.0240183	1.0240184	1.0240191	1.0240190
0.2	1.0485788	1.0485786	1.0485817	1.0485818	1.0485832	1.0485830
0.3	1.0736966	1.0736962	1.0737009	1.0737012	1.0737033	1.0737029
0.4	1.0993811	1.0993806	1.0993870	1.0993874	1.0993902	1.0993897
0.5	1.1256436	1.1256429	1.1256510	1.1256515	1.1256551	1.1256545
0.6	1.1524951	1.1524943	1.1525042	1.1525048	1.1525093	1.1525085
0.7	1.1799472	1.1799462	1.1799579	1.1799586	1.1799640	1.1799630
0.8	1.2080112	1.2080101	1.2080237	1.2080246	1.2080308	1.2080297
0.9	1.2366989	1.2366976	1.2367132	1.2367142	1.2367213	1.2367201
1.0	1.2660220	1.2660205	1.2660381	1.2660393	1.2660473	1.2660459

الجدول (2): الأخطاء الناتجة عن الحلول العددية للمسألة (1) بخطوة  $h = 0.1$

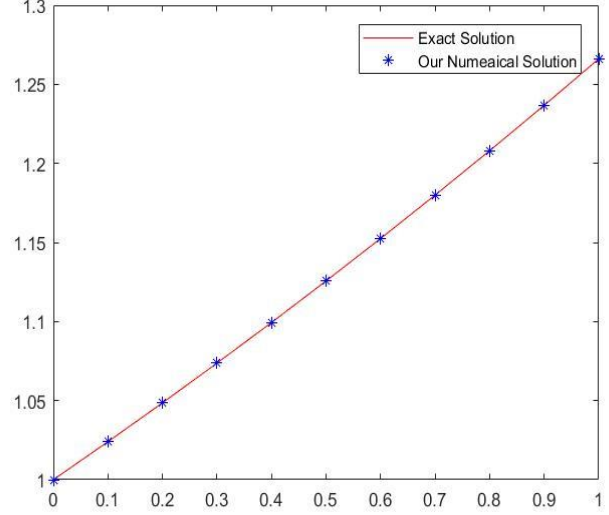
$x_n$	Error By Heun's Method	Error By (MEM) Method	Error By Hybrid Method In [12]	Error by Hybrid Method In [13]	Error By Our Hybrid Method
0.1	2.00988 E-6	2.12739 E-6	6.45079 E-7	5.56944 E-7	1.25456 E-7
0.2	4.09985 E-6	4.34294 E-6	1.31918 E-6	1.13686 E-6	2.53478 E-7
0.3	6.27165 E-6	6.64878 E-6	2.02315 E-6	1.7403 E-6	3.83958 E-7
0.4	8.527 E-6	9.04705 E-6	2.75785 E-6	2.36781 E-6	5.16778 E-7
0.5	1.08676 E-5	1.15399 E-5	3.52416 E-6	3.01994 E-6	6.51805 E-7
0.6	1.32952 E-5	1.41295 E-5	4.32297 E-6	3.69726 E-6	7.88893 E-7
0.7	1.58115 E-5	1.6818 E-5	5.15519 E-6	4.40031 E-6	9.27881 E-7
0.8	1.84182 E-5	1.96076 E-5	6.02173 E-6	5.12965 E-6	1.0686 E-6
0.9	2.11168 E-5	2.25004 E-5	6.92352 E-6	5.88583 E-6	1.21085 E-6
1.0	2.39091 E-5	2.54985 E-5	7.8615 E-6	6.6694 E-6	1.35443 E-6

الشكل (2) : يمثل الرسم البياني للحل الدقيق للمسألة (1) مع الحل العددي بطريقتنا عند  $h = 0.1$

الشكل (3): يمثل الرسم البياني للخطأ المطلق للمسألة (1) في الحل العددي عند  $h = 0.1$



الشكل (3)



الشكل (2)

نعرض في الجدول (3) مقارنات لأكبر الأخطاء المطلقة على كامل مجال الحل العددي للمسألة (1) بالطرائق المذكورة سابقاً

الجدول (3) : مقارنة أكبر الأخطاء المطلقة للمسألة (1)

Method \ h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
Heun's Method	2.3909 E-5	6.02714 E-6	1.5130 E-6	3.79053 E-7	9.48617 E-8
(MEM)	2.5498 E-5	6.43117 E-6	1.6149 E-6	4.04622 E-7	1.01267 E-7
Hybrid Method In [12]	7.8615 E-6	1.9482 E-6	4.8482 E-7	1.20923 E-7	3.0195 E-8
Hybrid Method In [13]	6.6694 E-6	1.64517 E-6	4.0843 E-7	1.01746 E-7	2.53908 E-8
Our Hybrid Method	1.3544 E-6	3.94302 E-7	1.0568 E-7	2.73191 E-8	6.94261 E-9

المسألة (2): إيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$y' = 1 - y^2 ; \quad y(0) = 0 ; \quad x \in [0,1]$$

والتي تقبل الحل الدقيق  $y = \tanh x$

نعرض في الجدول (4) الحلول العددية للمسألة (2) بالطرائق المذكورة بخطوة  $h = 0.1$  مع الحل الدقيق للمسألة ونعرض في الجدول (5) الأخطاء المطلقة الناتجة عن الطرائق العددية السابقة للمسألة (2) بنفس الخطوة.

الجدول (4): الحلول العددية للمسألة (2) بخطوة  $h = 0.1$

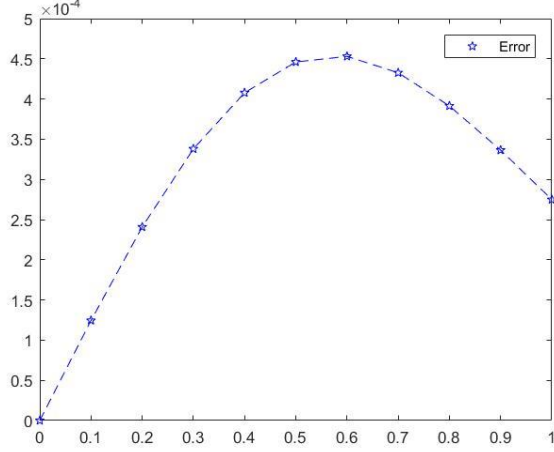
$x_n$	Heun's Method	(MEM) Method	Hybrid Method In [12]	Hybrid Method In [13]	Our Hybrid Method	Exact Solution
0.1	0.0996666	0.0995012	0.0995012	0.0996262	0.0995435	0.09966799
0.2	0.1973598	0.1970470	0.1970470	0.1972909	0.1971345	0.19737532
0.3	0.2912601	0.2908380	0.2908380	0.2911857	0.2909746	0.29131261
0.4	0.3798322	0.3793516	0.3793516	0.3797815	0.3795411	0.37994896
0.5	0.4619105	0.4614265	0.4614265	0.4619132	0.4616711	0.46211716
0.6	0.5367345	0.5362973	0.5362973	0.5368152	0.5365965	0.53704956
0.7	0.6039361	0.6035852	0.6035852	0.6041106	0.6039351	0.60436778
0.8	0.6634911	0.6632517	0.6632517	0.6637651	0.6636454	0.66403677
0.9	0.7156505	0.7155335	0.7155335	0.7160199	0.7159615	0.71629787
1.0	0.7608644	0.7608680	0.7608680	0.7613174	0.7613193	0.76159415

الجدول (5): الأخطاء الناتجة عن الحلول العددية للمسألة (2) بخطوة  $h = 0.1$

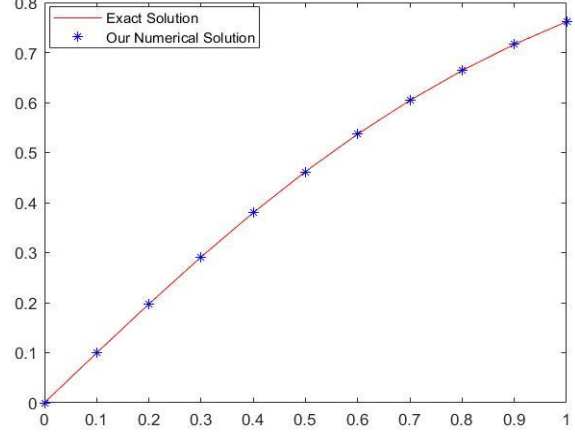
$x_n$	Error By Heun's Method	Error By (MEM) Method	Error By Hybrid Method In [12]	Error By Hybrid Method In [13]	Error By Our Hybrid Method
0.1	1.32796 E-6	1.67995 E-4	1.66738 E-4	4.17383 E-5	1.24444 E-4
0.2	1.55083 E-5	3.40643 E-4	3.28266 E-4	8.4394 E-5	2.40782 E-4
0.3	5.24865 E-5	5.15985 E-4	4.74603 E-4	1.26896 E-4	3.37988 E-4
0.4	1.16778 E-4	6.89677 E-4	5.97321 E-4	1.6746 E-4	4.07799 E-4
0.5	2.0664 E-4	8.55215 E-4	6.90683 E-4	2.03945 E-4	4.46062 E-4
0.6	3.15016 E-4	1.00498 E-3	7.52209 E-4	2.34327 E-4	4.53024 E-4
0.7	4.31665 E-4	1.13166 E-3	7.8258 E-4	2.57123 E-4	4.32655 E-4
0.8	5.45631 E-4	1.22958 E-3	7.85013 E-4	2.71624 E-4	3.9134 E-4
0.9	6.47319 E-4	1.29547 E-3	7.64356 E-4	2.77917 E-4	3.36405 E-4
1.0	7.29767 E-4	1.32878 E-3	7.2616 E-4	2.76744 E-4	2.74871 E-4

الشكل (4): يمثل الرسم البياني للحل الدقيق للمسألة (2) مع الحل العددي بطريقتنا عند  $h = 0.1$

الشكل (5): يمثل الرسم البياني للخطأ المطلق للمسألة (2) في الحل العددي عند  $h = 0.1$



الشكل (5)



الشكل (4)

نعرض في الجدول (6) مقارنات لأكبر الأخطاء المطلقة على كامل مجال الحل العددي للمسألة (2) بالطرائق المذكورة سابقاً

الجدول (6) : مقارنة أكبر الأخطاء المطلقة للمسألة (2)

Method \ h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
Heun's Method	7.29767 E-4	1.74549 E-4	4.2669 E-5	1.0548 E-5	2.62218 E-6
(MEM)	1.32878 E-3	3.15732 E-4	7.6957 E-5	1.89976 E-5	4.71947 E-6
Hybrid Method In [12]	7.85013 E-4	1.91726 E-4	4.7299 E-5	1.17428 E-5	2.9254 E-6
Hybrid Method In [13]	2.77917 E-4	7.26692 E-5	1.8495 E-5	4.65868 E-6	1.16867 E-6
Our Hybrid Method	4.53024 E-4	1.11846 E-4	2.7752 E-5	6.91076 E-6	1.72407 E-6

المسألة (3): إيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$y' = \frac{y}{4} - \frac{\sin x}{80} y^2 ; y(0) = 1 ; x \in [0,1]$$

$$y = - \frac{e^{\frac{x}{4}}}{-\frac{86}{85} + \frac{1}{85} e^{\frac{x}{4}} (\cos x - \frac{\sin x}{4})}$$

والتي تقبل الحل الدقيق

نعرض في الجدول (7) الحلول العددية للمسألة (3) بالطرائق المذكورة بخطوة  $h = 0.1$  مع الحل الدقيق للمسألة ونعرض في الجدول (8) الأخطاء المطلقة الناتجة عن الطرائق العددية السابقة للمسألة (3) بنفس الخطوة.

الجدول (7): الحلول العددية للمسألة (3) بخطوة  $h = 0.1$

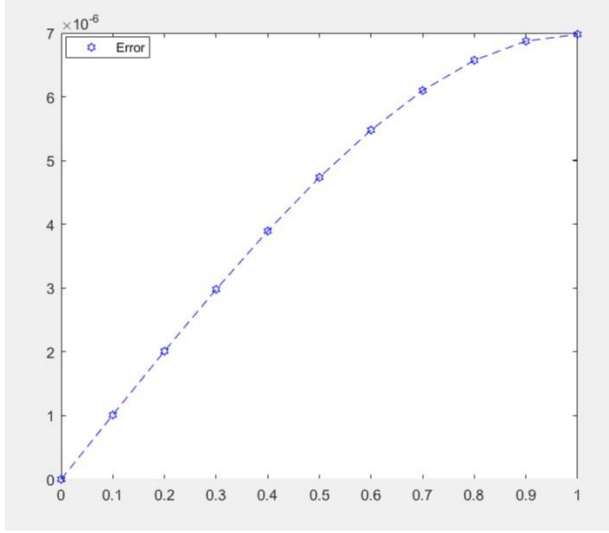
$x_n$	Heun's Method	(MEM) Method	Hybrid Method In [12]	Hybrid Method In [13]	Our Hybrid Method	Exact Solution
0.1	1.0252479	1.0252469	1.0252482	1.0252489	1.0252490	1.0252500
0.2	1.0509961	1.0509942	1.0509966	1.0509981	1.0509983	1.0510003
0.3	1.0772455	1.0772427	1.0772463	1.0772485	1.0772489	1.0772518
0.4	1.1039978	1.1039942	1.1039991	1.1040018	1.1040024	1.1040063
0.5	1.1312561	1.1312517	1.1312578	1.1312612	1.1312620	1.1312668
0.6	1.1590246	1.1590196	1.1590271	1.1590308	1.1590320	1.1590375
0.7	1.1873094	1.1873040	1.1873128	1.1873169	1.1873186	1.1873247
0.8	1.2161187	1.2161131	1.2161233	1.2161276	1.2161298	1.2161364
0.9	1.2454629	1.2454572	1.2454688	1.2454732	1.2454761	1.2454830
1.0	1.2753549	1.2753494	1.2753626	1.2753668	1.2753705	1.2753775

الجدول (8): الأخطاء الناتجة عن الحلول العددية للمسألة (3) بخطوة  $h = 0.1$

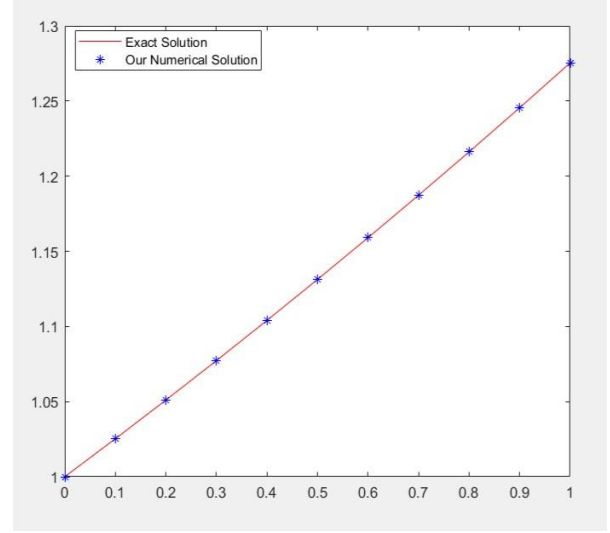
$x_n$	Error By Heun's Method	Error By (MEM) Method	Error By Hybrid Method In [12]	Error by Hybrid Method In [13]	Error By Our Hybrid Method
0.1	2.07166 E-6	3.07349 E-6	1.86578 E-6	1.11122 E-6	1.01147 E-6
0.2	4.17564 E-6	6.13964 E-6	3.71471 E-6	2.23443 E-6	2.01125 E-6
0.3	6.31372 E-6	9.17910 E-6	5.52357 E-6	3.36219 E-6	2.97945E-6
0.4	8.48878 E-6	1.21725 E-5	7.26804 E-6	4.48689 E-6	3.89491 E-6
0.5	1.07049 E-5	1.51005 E-5	8.92303 E-6	5.60083 E-6	4.73536 E-6
0.6	1.29673E-5	1.79448 E-5	1.04629 E-5	6.69626 E-6	5.47762 E-6
0.7	1.52826 E-5	2.06877 E-5	1.18619 E-5	7.76543 E-6	6.09775 E-6
0.8	1.76587 E-5	2.33130 E-5	1.30942 E-5	8.80063 E-6	6.57121 E-6
0.9	2.01048 E-5	2.58064 E-5	1.41344 E-5	9.79420 E-6	6.87295 E-6
1.0	2.26316 E-5	2.81557 E-5	1.49576 E-5	1.07385 E-5	6.97755 E-6

الشكل (6) : يمثل الرسم البياني للحل الدقيق للمسألة (3) مع الحل العددي بطريقتنا عند  $h = 0.1$

الشكل (7): يمثل الرسم البياني للخطأ المطلق للمسألة (3) في الحل العددي عند  $h = 0.1$



الشكل (7)



الشكل (6)

نعرض في الجدول (9) مقارنات لأكبر الأخطاء المطلقة على كامل مجال الحل العددي للمسألة (2) بالطرائق المذكورة سابقاً

الجدول (9) : مقارنة أكبر الأخطاء المطلقة للمسألة (3)

Method \ h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
Heun's Method	2.26316 E-5	5.6949 E-6	1.42838 E-6	3.57678 E-7	8.94925 E-8
(MEM)	2.81557 E-5	7.1129 E-6	1.78755 E-6	4.48060 E-7	1.12162 E-7
Hybrid Method In [12]	1.49576 E-5	3.75452 E-6	9.40485 E-7	2.35351 E-7	5.88663 E-8
Hybrid Method In [13]	1.07385 E-5	2.68148 E-6	6.69908 E-7	1.67415 E-7	4.18457 E-8
Our Hybrid Method	6.97755 E-6	1.72083 E-6	4.27156 E-7	1.06401 E-7	2.65513 E-8

تبين الجداول (1) و (2) و (3) أن طريقتنا الهجينة المقدمة تعطي أفضل حل ممكن للمسألة (1) من بين الطرائق السابقة وذلك لأنها تعطي خطأً مطلقاً أقل على كامل مجال الحل وذلك من أجل كل قيمة مدروسة ل  $h$ .

ويوضح الشكل (2) مدى تقارب الحل العددي بطريقتنا المقدمة مع الحل الدقيق للمسألة (1)

والشكل (3) يوضح كيفية تغير الخطأ المطلق للحل العددي للمسألة (1) بطريقتنا المقدمة حيث يبين الشكل ان الخطأ يكون أعظماً في نهاية المجال المعطى للحل العددي.

وتبين من الجداول (4) و (5) و (6) أن طريقتنا الهجينة المقدمة لا تقدم أفضل دقة على طول مجال الحل للمسألة (2) حيث تتفوق بعض الطرائق عليها عند بعض القيم في مجال الحل من حيث وجود خطأ مطلق أقل وهذا منطقي الى حدٍ ما لأنها من المرتبة الثانية والطرائق الأخرى من المرتبة الثانية أيضاً ولكنها تظهر انضباطاً أفضل في الحل وتتفوق بشكل واضح بالخطأ الأعظمي الموضح في الجدول (6) حيث تقدم أقل خطأ مطلق أعظمي من بين الطرائق المقدمة ولا تتفوق عليها أي طريقة ما عدا الطريقة الهجينة المقدمة في [13]. ويوضح الشكل (4) مدى تقارب الحل العددي بطريقتنا المقدمة مع الحل الدقيق للمسألة (2). والشكل (5) يوضح كيفية تغير الخطأ المطلق للحل العددي للمسألة (2) بطريقتنا المقدمة حيث يبين الشكل ان الخطأ يبدأ بالتزايد ويكون أعظماً في منتصف المجال المعطى للحل العددي تقريباً وتحديداً عند القيمة 0.6 ويعاود بعدها في الانخفاض حتى نهاية المجال.

تبين الجداول (7) و (8) و (9) أن طريقتنا الهجينة المقدمة تعطي أفضل حل ممكن للمسألة (3) من بين الطرائق السابقة وذلك لأنها تعطي خطأً مطلقاً أقل على كامل مجال الحل وذلك من أجل كل قيمة مدروسة ل  $h$ .

ويوضح الشكل (6) مدى تقارب الحل العددي بطريقتنا المقدمة مع الحل الدقيق للمسألة (1) والشكل (7) يوضح كيفية تغير الخطأ المطلق للحل العددي للمسألة (1) بطريقتنا المقدمة حيث يبين الشكل ان الخطأ يكون أعظماً في نهاية المجال المعطى للحل العددي.

#### 10- الاستنتاجات والتوصيات:

تم تقديم طريقة عددية هجينة لحل مسائل القيم الابتدائية في المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى تعتمد على التهجين بين طريقتين عدديتين هما Heun's Method و Contraharmonic Mean Method وبينت الدراسة التحليلية أن الطريقة متناسقة ومستقرة على منطقة تم رسمها من المستوي العددي ومتقاربة من المرتبة الثانية كما اشارت النتائج العددية الى فعالية الطريقة ودقتها المقبولة وتقاربها الكبير من الحل التحليلي على مجال الحل ولاحظنا من خلال الدراسة العددية تفوق طريقتنا على العديد من الطرائق الأخرى التي لها نفس مرتبة التقارب.

ونوصي بالآتي:

أولاً: استخدام الطريقة المقدمة لحل مسائل القيم الابتدائية من المرتبة الأولى، ومحاولة تطويرها للحصول على نتائج أفضل وأخطاء أقل.

ثانياً: العمل على تطوير طرائق عددية أخرى من مراتب أعلى للحصول على دقة أعلى في الحل.

ثالثاً: استخدام أسلوب التهجين في تطوير الطرائق العددية لما له من سهولة في التطبيق ويجمع بين خصائص الطريقتين الهجيتين أو المستخدمتين في التهجين.

## 11- المراجع:

- [1]. Evans, David J., and Nazeeruddin Yaacob. "A fourth order Runge-Kutta method based on the Heronian mean formula." *International Journal of Computer Mathematics* 58.1-2 (1995): 103-115.
- [2]. Evans, David J., and A. R. Yaakub. "A new fifth order weighted runge kutta formula." *International journal of computer mathematics* 59.3-4 (1996): 227-243.
- [3]. Ramos, Higinio. "A non-standard explicit integration scheme for initial-value problems." *Applied Mathematics and Computation* 189.1 (2007): 710-718.
- [4]. Ochoche, Abraham. "Improving the improved modified Euler method for better performance on autonomous initial value problems." *Leonardo Journal of Sciences* 12 (2008): 57-66.
- [5]. Akanbi, Moses A. "Third order Euler method for numerical solution of ordinary differential equations." *ARPJ. Eng. Appl. Sci* 5 (2010): 42-49.
- [6]. Qureshi, S., A. A. Shaikh, Z.U.N. Memon, and M.S. Chandio, (2014), Analysis of Accuracy, Stability, Consistency and Convergence of an Explicit Iterative Algorithm. *Mathematical Theory and Modeling*. 4 (1): 1-10
- [7]. SO, Ayinde, and E. A. Ibijola. "A new numerical method for solving first order differential equations." *American journal of applied mathematics and statistics* 3.4 (2015): 156-160.
- [8]. Fadugba, S., and B. Falodun. "Development of a new one-step scheme for the solution of initial value problem (IVP) in ordinary differential equations." *International Journal of Theoretical and Applied Mathematics* 3.2 (2017): 58-63.
- [9]. Etin-Osa, Bazuaye Frank. "A New 4 th Order Hybrid Runge-Kutta Methods for Solving Initial Value Problems (IVPs)." *Pure and Applied Mathematics Journal* 7.6 (2018): 78-87.
- [10]. Aliya, Tasneem, A. Ali Shaikh, and Sania Qureshi. "Development of a nonlinear hybrid numerical method." *Advances in Differential Equations and Control Processes* 19.3 (2018): 275-285.
- [11]. Kandhro, Muhammad Daud, Asif Ali Shaikh, and Sania Qureshi. "A new third order iterative integrator for Cauchy problems." *J. Appl. Environ. Biol. Sci* 8.7 (2018): 26-35.
- [12]. Workie, Abushet Hayalu. "New modification on Heun's method based on contraharmonic mean for solving initial value problems with high efficiency." *Journal of Mathematics* 2020 (2020).
- [13]. Ram, Tulja, Muhammad Anwar Solangi, and Ali Asghar Sanghah. "A hybrid numerical method with greater efficiency for solving initial value problems." *Mathematical Theory and Modeling* 10.2 (2020).