مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (2) 2023
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (2) 2023

تذبذب المعادلات التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد اعتماداً على متراجحات تفاضلية من المرتبة الأولى

د. محمد معلا *
قمر سالم **

(تاريخ الإيداع ١٢/١٩ / 2022 – تاريخ النشر ٦/ 7/ 2023)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث الى دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، وذلك من حيث ارتباطها مع متراجحات تفاضلية من المرتبة الأولى، وصلنا إلى نتائج بالاعتماد على الشكل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد حيث $\beta > \alpha$.

كلمات مفتاحية: فوق خطية – التذبذب –متراجحة تفاضلية –الحد المحايد.

*دكتور – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.
** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (2) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (2) 2023

r Differential Equations Of Second Order With A Neutral Term Depending On Differential Inequality Of First Order

Dr. Mohammad Moalla*

Qamar Salem**

(Received 19/12/2022.Accepted 6/7/2023)

This research aims to study the oscillation of the super-linear differential equation of the seconed-order with a neutral term, in terms of its association with differential inequalities of first order. We reached results based on the general form of the differential equation of second order with a neutral term, where $\beta > \alpha$.

Keywords: super-linear – Oscillation – differential inequality - neutral term.

*Doctor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.

**Postgraduate Student (Master), Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous , Syria.

مقدمة

المعادلات التفاضلية هي قوالب رياضية لمعظم الحوادث التي تحصل في الطبيعة و تحمل كل معادلة في طياتها جميع صفات الحادثة التي تمثلها، إضافة إلى ذلك تقدم المعادلات التفاضلية مقدمة متوازنة و شاملة للمفاهيم و التقنيات المطلوبة لحل المشكلات التي تحتوي على وظائف غير معروفة لمتغيرات متعددة، إذ إن أغلب الظواهر الفيزيائية و الحيوية يتم نمذجتها باستخدام المعادلات التفاضلية لتظهر بصورة معادلة تفاضلية و من ثم حلها أو معرفة خصائص هذا الحل، وأهم هذه الخصائص السلوك التذبذبي لحلول هذه المعادلة، فدراسة السلوك التذبذبي عولج منذ أكثر من مئة وخمسين عاماً ويعد شتورم (Sturm) هو أول من وضع حجر الأساس لذلك الفرع من علوم الرياضيات فمع مرور الزمن حصلت تطورات واسعة في هذا الموضوع، وتوسعت الدراسات لتشمل أنواعاً مختلفة من المعادلات منها المعادلات التفاضلية فوق الخطية حيث لقيت في السنوات الأخيرة اهتماماً بالغاً من قبل الكثيرين لما لها أهمية وتطبيقات في العديد من مسائل الفيزياء و البيولوجيا و الاقتصاد.

تم تطوير النظرية النوعية للمعادلات التفاضلية فوق الخطية خلال العقود الماضية ومازالت ابحاثها مستمرة حيث أن المعادلات التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية هي تعميم للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية.

الشكل العام للمعادلة التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية: [5]

$$(a(t)(x'(t))^{\alpha})' + q(t)f\big(x(t)\big) = 0$$

حيث $\beta, \alpha > 1$; $f\big(x(t)\big) = |x(t)|^{\beta} sgn\, x(t)$، و $a(t) \in C([t_0,\infty),\mathcal{R}^+)$ ، و $q(t) \in C([t_0,\infty),\mathcal{R})$; $t_0 \geq 0$ ، و $f \in C(\mathcal{R},\mathcal{R})$.

تعطى المعادلة التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد[1]:

$$\big(r(t)|z'(t)|^{\alpha-1} z'(t)\big)' + q(t)\big|x\big(\sigma(t)\big)\big|^{\beta-1} x\big(\sigma(t)\big) = 0 \quad (1)$$

$$Z(t) = x(t) + p(t)x\big(\tau(t)\big)\,;\, q \in C([t_0,\infty))$$

$$p,r,\sigma,\tau \in C^1([t_0,\infty))$$

يقال عن الحل $x(t)$ أنه متذبذب إذا كان يأخذ عدد لانهائي من الأصفار على مجال ما I، كما يقال عن الحل $x(t)$ أنه غير متذبذب إذا كان يأخذ عدد منته من الأصفار على مجال ما I .

يقال عن المعادلة التفاضلية أنها متذبذبة إذا كانت جميع حلولها متذبذبة على مجال ما I وفيما عدا ذلك نقول أنها غير متذبذبة.

في أبحاث سابقة تمت دراسة المعادلة التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد حيث $\alpha = \beta$ وهذه بعض النتائج والدراسات السابقة:

في عام 1985 أثبت Grammatikopoulos وآخرون في [2] أن $\int^{\infty} q(s)(1 - p(s-\sigma))ds = \infty$ تضمن تذبذب المعادلة ذات الحد المحايد مع مراعاة الشرط $0 \leq p(t) \leq 1$، وفي عام 1987 تم تحسين هذه النتيجة وتعميمها من قبل مؤلفين آخرين نذكر Grace و Lalli اللذان درسا تذبذب المعادلة الآتية [3]

$$r(t)[x(t) + p(t)x(t-\tau)]')' + q(t)f(x(t-\sigma)) = 0$$

وفقاً للشرط $\int^{\infty} \frac{ds}{r(s)} = \infty$ ، $\frac{f(x)}{x} \geq k$، وقدموا بعض المعايير الهامة التي تضمن تذبذب المعادلة، وفي عام 2008 أسس Xu و Xia تذبذب المعادلة[4]

$0 \le p(t) < \infty,$ بشرط ،$(x(t)+p(t)x(t-\tau))'' + q(t)\, f(x(t-\sigma)) = 0$
$q(t) \ge M > 0$

في عام 2011 درس Dzurina و Baculikovd [5]المعادلة التفاضلية ذات الحد المحايد

$$(r(t)\left[x(t)+p(t)x\big(\tau(\sigma)\big)\right]')' + q(t)x(\sigma(t)) = 0$$

عام 2013 قام الباحثون (Jozef Dzurina – Blanka Baculikova – Tongxing Li)

بدراسة تذبذب المعادلة (١) ، وفق شروط ومتراجحات تفاضلية من المرتبة الأولى كما يلي:

1) بإخذ $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$عندئذٍ إذا كانت المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$$(y(t) + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\tau_0}\, y(\tau(t)))' + \frac{1}{2^{\alpha-1}} Q_1(t) y(\sigma(t)) \le 0$$

لا تملك حل موجب بالتالي (١) متذبذبة.

٢) بإخذ $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$ بالإضافة إلى $\tau(t) \ge t$عندئذٍ إذا كانت المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$$w'(t) + \frac{\tau_0}{2^{\alpha-1}(\tau_0 + {p_0}^{\alpha})} Q_1(t) w(\sigma(t)) \le 0$$

لا تملك حل موجب بالتالي (١) متذبذبة.

٣) بإخذ $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$ بالإضافة إلى $\sigma(t) \le \tau(t) \le t$ عندئذٍ إذا كانت المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$$w'(t) + \frac{\tau_0}{2^{\alpha-1}(\tau_0 + {p_0}^{\alpha})} Q_1(t) w(\tau^{-1}(\sigma(t))) \le 0$$

لا تملك حل موجب بالتالي (١) متذبذبة.

عام ٢٠١٩ درس Mohammad Moalla و آخرون حالة خاصة لتذبذب المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد وهي المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد مع $p \ge ٢$ ، و توصلوا إلى معايير تحدد فيما إذا كانت هذه المعادلة متذبذبة أم لا [6]، ثم درسوا تذبذب المعادلة التفاضلية نصف خطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد والأعظمي، وقدموا معايير تساعد في تحديد فيما إذا كانت هذه المعادلة متذبذبة [7]، كما قدموا في عام ٢٠٢٠ دراسة لتذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتأخر [8].

نلاحظ أن جميع الدراسات السابقة ركزت على دراسة تذبذب المعادلات التفاضلية فوق الخطية ذات الحد المحايد وفق معايير معينة لكن القليل من الدراسات قد تعمقت في دراسة تذبذب المعادلات التفاضلية فوق الخطية من حيث ارتباطها مع متراجحات تفاضلية من المرتبة الأولى بالرغم من وجود تطبيقات مهمة لهذه المعادلات في المسائل الفيزيائية والبيولوجية ومسائل الاقتصاد، إضافة إلى أنه في دراسات سابقة تمت دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد من حيث ارتباطها مع متراجحات تفاضلية من المرتبة الأولى حيث $\alpha = \beta$، في بحثنا هذا سوف نقوم بدراسة هذا المعادلة ولكن من حيث $\beta > \alpha$.

أهمية البحث وأهدفه

إن لهذا البحث أهمية كبيرة في العديد من المسائل الفيزيائية و البيولوجية و مسائل الاقتصاد، و نهدف في بحثنا هذا دراسة المعادلة التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد من حيث ارتباطها مع متراجحات تفاضلية من المرتبة الأولى حيث $\beta > \alpha$.

طرائق البحث وموارده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية لذلك فأن التقنيات المستخدمة تعتمد بشكل أساسي على طرائق الدراسة التحليلية للمعادلة التفاضلية.

النتائج والمناقشة

بفرض لدينا المعادلة التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد من الشكل:

$$\left(r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)\right)'+q(t)\left|x\left(\sigma(t)\right)\right|^{\beta-1}x\left(\sigma(t)\right)=0 \quad (1)$$

$$Z(t):=x(t)+p(t)x\left(\tau(t)\right);\, q\in C([t_0,\infty))$$

$$p,r,\sigma,\tau\in C^1([t_0,\infty))$$

سنقدم أولاً بعض الفرضيات والتمهيديات التي سوف نحتاجها لإثبات صحة المبرهنات الموجودة في هذا البحث

١- $\beta>\alpha>1$

٢- $0\le p(t)\le p_0<\infty$

٣- $q(t)>0$

٤- $r(t)>0$

٥- $\tau'(t)\ge\tau_0>0$

٦- $\sigma(t)$غير متناقص و$\sigma(t)<t, \lim_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty$

٧- $R(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r^{1/\alpha}(s)}ds$ و $\lim_{t\to\infty}R(t)=\infty$

موضوعة ١:[9]

ليكن لدينا المتراجحة $y'(t)+p(t)y(\tau(t))\le 0$، وكان الشرط التالي $\lim_{t\to\infty}\int_{\tau(t)}^{t}p(s)ds>\frac{1}{e}$ محقق عندئذٍ فإن المتراجحة لا تملك حل موجب.

تمهيدية ١:

من أجل $t>T$، إذا كان $x(t)>0$ حل للمعادلة (1) و$z(t)>0$ عندئذٍ التابع zيحقق:

$z'(t)>0, (r(t)(z'(t))^{\alpha})'<0$.

البرهان:

نفرض $x(t)>0$ حل للمعادلة (1)عندئذٍ لدينا $\left(r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)\right)'=-q(t)x\left(\sigma(t)\right)^{\beta}<0$

بالتالي إما $r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)>0$، أو أنه يوجد t_1 يحقق $r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)<0$ من أجل $t>t_1$، فإذا كان $r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)<0$، عندئذ يوجد عدد موجب M يحقق $r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)\le -M<0$لدينا $z'(t)<0 \Leftarrow |z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)=-(-z'(t))^{\alpha}$، ومنه $-r(t)(-z'(t))^{\alpha}\le -M$، ومنه $(-z'(t))^{\alpha}\ge\frac{M}{r(t)}$ وبالتالي $-z'(t)\ge\frac{M^{1/\alpha}}{r(t)^{1/\alpha}}$، نكامل من t_1 الى t

فنحصل على $z(t) \leq z(t_1) - M^{1/\alpha} \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r(s)^{1/\alpha}} ds \to -\infty \ ; t \to \infty$، وهذا يتعارض مع $z(t) > 0$ وبالتالي $r(t)|z'(t)|^{\alpha-1} z'(t) > 0$ *وبالتالي* $z'(t) > 0$.

تمهيدية ٢:

بفرض $x_1, x_2 \in R$، إذا كان $x_1, x_2 \geq 0$ فإن العلاقة الآتية محققة:

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha \geq \frac{1}{2^{\alpha-1}} (x_1 + x_2)^\alpha$$

البرهان:

إذا كانت $x_1 = 0$ أو $x_2 = 0$ فإن العلاقة محققة والتمهيدية صحيحة. أما إذا كانت $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ عندئذٍ لدينا $f(x) = x^\alpha; \alpha \geq 1, x \in (0, \infty)$ بالتالي من تعريف f :

$$(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \geq 0 \ \forall x > 0$$

وبالتالي كون x^α دالة محدبة فمن تعريف الدالة المحدبة ينتج لدينا $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ومنه:

$$(\frac{x_1 + x_2}{2})^\alpha \leq \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x_1 + x_2)^\alpha}{2^{\alpha-1}} \leq x_1^\alpha + x_2^\alpha$$

مبرهنة ١:

ليكن $\tau o \sigma = \sigma o \tau$، بفرض المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$$(y(t) + \frac{{p_0}^\alpha}{\tau_0} \ y(\tau(t)))' + \frac{1}{2^{\beta-1}} Q_1(t) y^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(t)) \leq 0$$

لا تملك حل موجب، عندئذٍ المعادلة (1) متذبذبة.

البرهان:

بفرض $x(t) > 0$ حل للمعادلة (1) عندئذٍ من الفرض $\tau o \sigma = \sigma o \tau$ فإن التابع Z يحقق:

$$z\left(\sigma(t)\right) = x\left(\sigma(t)\right) + p\left(\sigma(t)\right) x\left(\tau\left(\sigma(t)\right)\right)$$

باستخدام التمهيدية ٢ والفرضيات نجد:

$$z^\alpha\left(\sigma(t)\right) = (x\left(\sigma(t)\right) + p\left(\sigma(t)\right) x(\tau\left(\sigma(t)\right)))^\alpha$$

$$\leq 2^{\alpha-1}\left(x^\alpha\left(\sigma(t)\right) + {p_0}^\alpha x^\alpha\left(\sigma\left(\tau(t)\right)\right)\right) \quad (2)$$

وباستخدام التمهيدية ١ نجد:

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' + q(t) x^\beta\left(\sigma(t)\right) = 0 \quad (3)$$

نبدل كل t بـ $\tau(t)$ فنجد $\frac{1}{\tau'(t)} \left[r\left(\tau(t)\right)\left(z'\left(\tau(t)\right)\right)^\alpha\right]' + q\left(\tau(t)\right) x^\beta\left(\sigma\left(\tau(t)\right)\right) = 0$

باستخدام الفرضيات نجد

$$\Rightarrow 0 = \frac{{p_0}^\alpha}{\tau'(t)} \left(r\left(\tau(t)\right)\left(z'\left(\tau(t)\right)\right)^\alpha\right)' + {p_0}^\alpha q\left(\tau(t)\right) x^\beta\left(\sigma\left(\tau(t)\right)\right)$$

$$\geq \frac{{p_0}^\alpha}{\tau_0} \left(r\left(\tau(t)\right)\left(z'\left(\tau(t)\right)\right)^\alpha\right)' + {p_0}^\alpha q\left(\tau(t)\right) x^\beta\left(\sigma\left(\tau(t)\right)\right) \quad (4)$$

بالجمع بين العلاقات (3) و (4) نجد $q(t)x^{\beta}(\sigma(t))+p_0{}^{\alpha}q(\tau(t))x^{\beta}\left(\sigma(\tau(t))\right)$، بفرض أن $Q(t)=\min\{q(t),q(\tau(t))\},\ \ Q_1(t)=Q(t)(R(\sigma(t))-R(t_1))^{\beta}$، بالتالي يتحقق لدينا

$$q(t)x^{\beta}(\sigma(t))+p_0{}^{\alpha}q(\tau(t))x^{\beta}\left(\sigma(\tau(t))\right)\geq Q(t)(x^{\beta}(\sigma(t))+p_0{}^{\alpha}x^{\beta}\left(\sigma(\tau(t))\right)$$
$$\geq\frac{1}{2^{\beta-1}}Q(t)(\,x(\sigma(t))+p_0{}^{\alpha}x(\sigma(\tau(t))))^{\beta}\geq\frac{1}{2^{\beta-1}}Q(t)z^{\beta}(\sigma(t))\quad(5)$$

بالجمع بين (3) و (4) و(5) نحصل على:

$$0\geq(r(t)(z'(t))^{\alpha})'+\frac{p_0{}^{\alpha}}{\tau_0}((r(\tau(t))(z'(\tau(t)))^{\alpha})'+\frac{1}{2^{\beta-1}}Q(t)z^{\beta}(\sigma(t))\quad(6)$$

من التمهيدية ١ نجد أن $y(t)$ متناقص وبالتالي نحصل على:

$$z(\sigma(t))\geq z(\sigma(t))-z(t_1)$$
$$=\int_{t_1}^{\sigma(t)}\frac{1}{r^{1/\alpha}(s)}(\,r(s)(z'(s))^{\alpha})^{1/\alpha}\ ds\geq y^{1/\alpha}(\sigma(t))\int_{t_1}^{\sigma(t)}\frac{1}{r^{1/\alpha}(s)}\,ds$$
$$=y^{1/\alpha}(\sigma(t))\big(R(\sigma(t))-R(t_1)\big)\quad(7)$$

بتعويض (٧) في (٦) ، وبفرض $Q_1(t)=Q(t)\big(\,R(\sigma(t))-R(t_1)\big)^{\beta}$ نحصل على $\left(y(t)+\frac{p_0{}^{\alpha}}{\tau_0}y(\tau(t))\right)'+\frac{1}{2^{\beta-1}}Q_1(t)y^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(t))\leq 0$، ومما سبق نجد أن y هو حل موجب للمتراجحة وهذا يناقض الفرض بالتالي (1) متذبذبة.

مبرهنة ٢:

ليكن $\tau o\sigma=\sigma o\tau$ و $\tau(t)\geq t$، بفرض المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية :

$$w'(t)+\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+p_0{}^{\alpha})}\ Q_1(t)w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(t))\leq 0\quad(8)$$

لا تملك حل موجب، عندئذٍ المعادلة (1) متذبذبة.

البرهان:

بفرض $x(t)>0$ حل للمعادلة (1) ولدينا من التمهيدية ١ أن y متناقص فهو يحقق:

$$\left(y(t)+\frac{p_0{}^{\alpha}}{\tau_0}y(\tau(t))\right)'+\frac{1}{2^{\beta-1}}Q_1(t)y^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(t))\leq 0$$

بالمطابقة مع (8) نجد $w(t)=y(t)+\frac{p_0{}^{\alpha}}{\tau_0}y(\tau(t))$ ، ولدينا من الفرض $\tau(t)\geq t$ بالتالي: $w(t)\leq y(t)(1+\frac{p_0{}^{\alpha}}{\tau_0})$ مما سبق نجد w حل موجب للمتراجحة (8)، وهذا تناقض مع الفرض بالتالي المتراجحة (8) لا تملك حل موجب و (1) متذبذبة.

نتيجة ١:

ليكن $\tau o\sigma=\sigma o\tau$ و $\tau(t)\geq t$ عندئذٍ إذا كان الشرط الآتي: $\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\sigma(t)}^{t}Q_1(s)ds>\frac{2^{\beta-1}(\tau_0+p_0{}^{\alpha})}{\tau_0 e}$ محقق بالتالي (1) متذبذبة.

البرهان:

من المبرهنة (٢) بفرض أن (1)غير متذبذبة بالتالي المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$w'(t)+\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\ Q_1(t)w^{\frac{\beta}{\alpha}}\big(\sigma(t)\big)\le 0$ تملك $w(t)>0$ يحققها، وبالتالي

$w'(t)+\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\ Q_1(t)w\big(\sigma(t)\big)\le w'(t)+\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\ Q_1(t)w^{\frac{\beta}{\alpha}}\big(\sigma(t)\big)\le 0$،

ولدينا $w(t)$ متناقص و $w^{\frac{\beta}{\alpha}}>w$ و $\sigma(t)<t$،بالتالي حسب الموضوعة ١ نجد $\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\sigma(t)}^{t}\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}Q_1(s)ds\le\frac{1}{e}$، ومنه $\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\sigma(t)}^{t}Q_1(s)ds\le\frac{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}{\tau_0 e}$، وهذا تناقض بالتالي (١) متذبذبة.

مبرهنة ٣:

ليكن $\tau o\sigma=\sigma o\tau$ و $\sigma(t)\le\tau(t)\le t$، بفرض المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$$w'(t)+\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\ Q_1(t)w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(t)))\le 0\quad(9)$$

لا تملك حل موجب، عندئذٍ المعادلة (1) متذبذبة.

البرهان:

بفرض $x(t)>0$ حل للمعادلة (1) ولدينا من التمهيدية ١ أن y متناقص فهو يحقق:

$$\left(y(t)+\frac{{p_0}^{\alpha}}{\tau_0}y\big(\tau(t)\big)\right)'+\frac{1}{2^{\beta-1}}Q_1(t)y^{\frac{\beta}{\alpha}}\big(\sigma(t)\big)\le 0\quad(10)$$

بالمطابقة بين (9) و (10) نجد $w(t)=y(t)+\frac{{p_0}^{\alpha}}{\tau_0}y\big(\tau(t)\big)$ ولدينا من الفرض $\tau(t)\le t$ بالتالي نجد $w(t)\le y\big(\tau(t)\big)(1+\frac{{p_0}^{\alpha}}{\tau_0})$ مما سبق نجد w حل موجب للمتراجحة (9) وهذا تناقض مع الفرض بالتالي (1) متذبذبة.

نتيجة ٢: ليكن $\tau o\sigma=\sigma o\tau$ و $\sigma(t)\le\tau(t)\le t$ عندئذٍ إذا كان الشرط الآتي:

$$\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\tau^{-1}(\sigma(t))}^{t}Q_1(s)ds>\frac{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}{\tau_0 e}$$

محقق بالتالي (1) متذبذبة.

البرهان:

من المبرهنة (٣) و بفرض أن المعادلة (1) غير متذبذبة بالتالي المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$w'(t)+\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\ Q_1(t)w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(t)))\le 0$ تملك $w(t)>0$ يحققها وبالتالي

$$w'(t)+\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\ Q_1(t)\ w(\tau^{-1}(\sigma(t)))$$
$$\le w'(t)+\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\ Q_1(t)w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(t)))\le 0$$

، حيث لدينا $w(t)$ متناقص $w^{\frac{\beta}{\alpha}}>w$ و $\sigma(t)\le\tau(t)\le t$ ، بالتالي حسب الموضوعة ١ نجد $\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\tau^{-1}(\sigma(t))}^{t}\frac{\tau_0}{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}Q_1(s)ds\le\frac{1}{e}$ ، ومنه $\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\tau^{-1}(\sigma(t))}^{t}Q_1(s)ds\le\frac{2^{\beta-1}(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}{\tau_0 e}$ ،

وهذا تناقض بالتالي (١) متذبذبة.

مبرهنة ٤:

ليكن $(\sigma^{-1}(t))' \geq \sigma_0 > 0$، بفرض المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية :

$$\left(\frac{y(\sigma^{-1}(t))}{\sigma_0} + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\, \tau_0} y\big(\sigma^{-1}(\tau(t))\big)\right)' + \frac{1}{2^{\beta-1}} K_1(t) y^{\frac{\beta}{\alpha}}(t) \leq 0 \quad (11)$$

لا تملك حل موجب، عندئذٍ المعادلة (1) متذبذبة.

البرهان:

بفرض $x(t) > 0$ حل للمعادلة (1) باشتقاق المعادلة (1) لـ σ^{-1}وباستخدام الشرط $(\sigma^{-1}(t))' \geq \sigma_0 > 0$ نجد:

$$0 = \frac{1}{(\sigma^{-1}(t))'} (r(\sigma^{-1}(t))(z'(\sigma^{-1}(t)))^{\alpha})' + q(\sigma^{-1}(t))x^{\beta}(t)$$

$$\geq \frac{1}{\sigma_0} (r(\sigma^{-1}(t))z'(\sigma^{-1}(t)))^{\alpha})' + q(\sigma^{-1}(t))x^{\beta}(t) \quad (12)$$

وبما أن $\sigma o \tau = \tau o \sigma$ و $(\sigma^{-1}(t))' \geq \sigma_0$ و $\tau'(t) \geq \tau_0$ ينتج لدينا:

$$0 = \frac{1}{(\sigma^{-1}(\tau(t)))'} (r(\sigma^{-1}\big(\tau(t)\big))(z'(\sigma^{-1}(\tau(t))))^{\alpha})' + q(\sigma^{-1}(\tau(t)))x^{\beta}(\tau(t))$$

$$\geq \frac{1}{\sigma_0 \tau_0} (r(\sigma^{-1}(t))(z'(\sigma^{-1}(t)))^{\alpha})' + q(\sigma^{-1}(\tau(t)))x^{\beta}(\tau(t)) \quad (13)$$

بضرب (*13*) ب ${p_0}^{\alpha}$ وبجمعها مع (*12*) نحصل على:

$$0 \geq \frac{1}{\sigma_0} (r((\sigma^{-1}(t))(z'(\sigma^{-1}(t)))^{\alpha})' + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\, \tau_0} (r(\sigma^{-1}\big(\tau(t)\big))(z'(\sigma^{-1}(\tau(t))))^{\alpha})'$$
$$+ q(\sigma^{-1}(t))x^{\beta}(t) + {p_0}^{\alpha} q(\sigma^{-1}(\tau(t)))x^{\beta}(\tau(t)) \quad (14)$$

باستخدام التمهيدية (٢) وبفرض أن $k(t) = \min\{q(\sigma^{-1}(t)), q(\sigma^{-1}(\tau(t))\}$ ينتج لدينا

$$q(\sigma^{-1}(t))x^{\beta}(t) + {p_0}^{\alpha} q(\sigma^{-1}(\tau(t)))x^{\beta}(\tau(t)) \geq \frac{k(t)}{2^{\beta-1}} [x(t) + p_0\, x(\tau(t))]^{\beta}$$
$$\geq \frac{k(t)}{2^{\beta-1}} z^{\beta}(t) \quad (15)$$

بالجمع بين (١٤) و (١٥) نجد

$$0 \geq (\frac{1}{\sigma_0} y(\sigma^{-1}(t)) + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\, \tau_0} y(\sigma^{-1}(\tau(t))))' + \frac{k(t)}{2^{\beta-1}} z^{\beta}(t) \quad (16)$$

من التمهيدية (١) لدينا y متناقص بالتالي نحصل على:

$$z(t) \geq z(t) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r^{1/\alpha}(s)} (\, r(s)(z'(s))^{\alpha})^{1/\alpha}\ ds \geq y^{1/\alpha}(\sigma(t)) \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r^{1/\alpha}(s)}\ ds$$
$$= y^{1/\alpha}(t)\big(R(t) - R(t_1)\big)$$

بالتعويض في (16) نحصل على

$$(\frac{1}{\sigma_0} y\big(\sigma^{-1}(t)\big) + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\, \tau_0} y(\sigma^{-1}(\tau(t))))' + \frac{k(t)}{2^{\beta-1}} (R\big(\sigma(t)\big) - R(t_1))^{\beta} y^{\frac{\beta}{\alpha}}(t) \leq 0$$

وبفرض $k_1(t) = k(t)(R(t) - R(t_1))^{\beta}$، بالتالي ينتج لدينا أن y هو حل موجب للمتراجحة

$$\left(\frac{y(\sigma^{-1}(t))}{\sigma_0}+\frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\,\tau_0}y\big(\sigma^{-1}(\tau(t))\big)\right)'+\frac{1}{2^{\beta-1}}K_1(t)y^{\frac{\beta}{\alpha}}(t)\le 0$$

وهذا يتناقض مع الفرض بالتالي (1) متذبذبة.

مبرهنة ٥:

ليكن $0<\sigma_0\le\left(\sigma^{-1}(t)\right)'$ و $\sigma(t)\le\tau(t)\le t$ ، بفرض المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$$w'(t)+\frac{\sigma_0\,\tau_0}{{p_0}^{\alpha}+\tau_0}\,\frac{1}{2^{\beta-1}}k_1(t)w^{\frac{\beta}{\alpha}}\left(\tau^{-1}\big(\sigma(t)\big)\right)\le 0 \qquad (17)$$

لا تملك حل موجب، عندئذٍ المعادلة (1) متذبذبة.

البرهان:

بفرض $x(t)>0$ حل للمعادلة (1) ، ولدينا من التمهيدية ١ y متناقص فهو يحقق:

$$\left(\frac{y(\sigma^{-1}(t))}{\sigma_0}+\frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\,\tau_0}y\big(\sigma^{-1}(\tau(t))\big)\right)'+\frac{1}{2^{\beta-1}}K_1(t)y^{\frac{\beta}{\alpha}}(t)\le 0$$

بالمطابقة مع (17) نجد$\big(\big)$ $w(t)=\frac{y(\sigma^{-1}(t))}{\sigma_0}+\frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\tau_0}y\big(\sigma^{-1}(\tau(t))\big)$ ، ولدينا من الفرض $\tau(t)\le t$، بالتالي

$y(t)\ge\frac{\sigma_0\,\tau_0}{{p_0}^{\alpha}+\tau_0}w\big(\tau^{-1}\big(\sigma(t)\big)\big)$ وهذا يكافئ $w(t)\le y\big(\sigma^{-1}\big(\tau(t)\big)\big)\big(\frac{1}{\sigma_0}+\frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\tau_0}\big)$،

مما سبق نجد أن w هو حل موجب للمتراجحة (17) وهذا يتناقض مع الفرض بالتالي المتراجحة (17) لا تملك حل موجب و المعادلة (1) متذبذبة.

نتيجة ٣:

بفرض $0<\sigma_0\le\left(\sigma^{-1}(t)\right)'$ و $\sigma(t)\le\tau(t)\le t$ ،عندئذٍ إذا كان الشرط الآتي:

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\tau^{-1}(\sigma(t))}^{t}K_1(s)ds>\frac{2^{\beta-1}({p_0}^{\alpha}+\tau_0)}{\sigma_0\tau_0 e}$$

محقق بالتالي (1) متذبذبة.

البرهان:

من المبرهنة (٥) بفرض أن (1)غير متذبذبة بالتالي المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$w'(t)+\frac{\sigma_0\tau_0}{(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\frac{1}{2^{\beta-1}}\,K_1(t)w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(t)))\le 0$ تملك $w(t)>0$ يحققها، بالتالي لدينا

$w'(t)+\frac{\sigma_0\tau_0}{(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\frac{1}{2^{\beta-1}}\,K_1(t)w(\tau^{-1}(\sigma(t)))\le$

$w'(t)+\frac{\sigma_0\tau_0}{(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\frac{1}{2^{\beta-1}}\,K_1(t)w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(t)))\le 0$، حيث $w(t)$ متناقص و $w^{\frac{\beta}{\alpha}}>w$ و $\sigma(t)\le\tau(t)\le t$ ، بالتالي حسب الموضوعة ١ لدينا

$\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\tau^{-1}(\sigma(t))}^{t}\frac{\sigma_0\tau_0}{(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\frac{1}{2^{\beta-1}}K_1(s)ds\le\frac{1}{e}$، ومنه

$\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\tau^{-1}(\sigma(t))}^{t}K_1(s)ds\le\frac{2^{\beta-1}({p_0}^{\alpha}+\tau_0)}{\sigma_0\tau_0 e}$

وهذا تناقض بالتالي (١) متذبذبة.

مبرهنة ٦:

ليكن $0 < \sigma_0 \le \left(\sigma^{-1}(t)\right)'$ و $t \le \tau(t)$، بفرض المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$$w'(t) + \frac{\sigma_0\,\tau_0}{{p_0}^{\alpha} + \tau_0}\,\frac{1}{2^{\beta-1}} k_1(t) w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(t)) \le 0 \qquad (18)$$

لا تملك حل موجب، عندئذٍ المعادلة (1) متذبذبة.

البرهان:

بفرض $x(t) > 0$ حل للمعادلة (1) ولدينا من التمهيدية ١ y متناقص فهو يحقق:

$$\left(\frac{y(\sigma^{-1}(t))}{\sigma_0} + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\,\tau_0} y\left(\sigma^{-1}(\tau(t))\right)\right)' + \frac{1}{2^{\beta-1}} K_1(t) y^{\frac{\beta}{\alpha}}(t) \le 0$$

بالمطابقة مع (18) نجد $w(t) = \frac{y(\sigma^{-1}(t))}{\sigma_0} + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\tau_0} y\left(\sigma^{-1}(\tau(t))\right)$، ولدينا من الفرض $\tau(t) \ge t$ بالتالي $w(t) \le y(\sigma^{-1}(t))(\frac{1}{\sigma_0} + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\sigma_0\tau_0})$، وهذا يكافئ $y(t) \ge \frac{\sigma_0\,\tau_0}{{p_0}^{\alpha}+\tau_0} w(\sigma(t))$ مما سبق نجد أن w هو حل موجب للمتراجحة (18) وهذا يتناقض مع الفرض بالتالي المتراجحة (18) لا تملك حل موجب بالتالي المعادلة (1) متذبذبة.

نتيجة ٤:

بفرض $0 < \sigma_0 \le \left(\sigma^{-1}(t)\right)'$ و $t \le \tau(t)$،عندئذٍ إذا كان الشرط الآتي:

$$\lim_{t\to\infty} \inf \int_{\sigma(t)}^{t} K_1(s) ds > \frac{2^{\beta-1}({p_0}^{\alpha} + \tau_0)}{\sigma_0 \tau_0 e}$$

محقق عندئذٍ (1) متذبذبة.

البرهان:

من المبرهنة(٦) بفرض أن (1)غير متذبذبة بالتالي المتراجحة التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية:

$w'(t) + \frac{\sigma_0\tau_0}{(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\frac{1}{2^{\beta-1}} K_1(t)\, w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(t)) \le 0$ تملك $w(t) > 0$ يحققها، بالتالي

$w'(t) + \frac{\sigma_0\tau_0}{(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\frac{1}{2^{\beta-1}} K_1(t) w(\sigma(t)) \le w'(t) + \frac{\sigma_0\tau_0}{(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\frac{1}{2^{\beta-1}} K_1(t) w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(t)) \le 0$،

حيث لدينا $w(t)$ متناقص و $w^{\frac{\beta}{\alpha}} > w$ و $\sigma(t) < t$، بالتالي حسب الموضوعة١ $\lim_{t\to\infty} \inf \int_{\sigma(t)}^{t} \frac{\sigma_0\tau_0}{(\tau_0+{p_0}^{\alpha})}\frac{1}{2^{\beta-1}} K_1(s) ds \le \frac{1}{e}$، ومنه $\lim_{t\to\infty} \inf \int_{\sigma(t)}^{t} K_1(s) ds \le \frac{2^{\beta-1}({p_0}^{\alpha}+\tau_0)}{\sigma_0\tau_0 e}$،وهذا تناقض بالتالي (١) متذبذبة.

الاستنتاجات والتوصيات:

درسنا في هذا البحث تذبذب المعادلة التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد من حيث ارتباطها مع متراجحات تفاضلية من المرتبة الأولى حيث $\beta > \alpha$ ، وتوصلنا إلى نتائج تكشف تذبذب المعادلة فوق الخطية ذات المرتبة الثانية مع حد محايد، كما نوصي بدراسة تذبذب المعادلة التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد في حالة $\tau o \sigma \neq \sigma o \tau$ و $t \le \tau(t)$.

المراجع:

[1] XU, R; MENG, F. *Some New Oscillation Criteria For Second Order Quasi-Linear Neutral Delay Differential Equations*. Appl. Math. Comput. 182 , Sept 2006, 797–803.

[2] GRAMMATIKOPOULOS, M. K; LADAS, G; MEIMARIDOU, A. *Oscillations Of Second Order Neutral Delay Differential Equation*. Rad. Mat. 1 , Sept 1985, 267–274.

[3] GRACE, S, R; LALLI, B, S. *Oscillations Of Nonlinear Second Order Neutral Delay Differential Equations*. Rad. Mat. 134, Sept 1987, 77-84

[4] XU, R; XIA, Y. *A Note On The Oscillation Of Second-Order Nonlinear Neutral Functional Differential Equations*. Int. J. Contemp. Math. Sci. 3, Sept 2008, 1441–1450.

[5] Bacul´Ikova´, B. Dzurina, J. *Oscillation Criteria For Second Order Nonlinear Differential Equations, Comput*. Math. Appl. 61, Sept 2011, 94–99.

[6] INJROU, S; KAROUM, R; MOALLA, M. *Oscillation Criteria For Generalized Half Linear Second Order Differential Equations With Neutral*. Tishreen University Magazine, Volume 41, Number 4, Sept 2019.

[7] INJROU, S; KAROUM, R; MOALLA, M. *Oscillation Criteria for Second Order Generalized Half-Linear Neutral Differential Equations with Maxima.* Tartous University Journal For Research And Scientific Studies, Volume 3, Number 3, Sept 2019.

[8] INJROU, S; KAROUM, R; MOALLA, M. *Study On Oscillation For Generalized Half Linear Second Order Differential Equations With Delay And Neutral Using Riccati Transformation*. AL-Baath University Magazine , Volume 42, Sept 2020.

[9] LADDE, G ,S; LAKSHMIKANTHAM, V; ZHANG, B,G. *Oscillction Theory Of Differcntial Equations With Deviating Arguments*. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, Sept 1993.