مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (6) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (6) 2022

كثيرة حدود شولتز اللونية لربط بيان تام مع بيان ثنائي التجزئة تام

الدكتور رامي شاهين*

الدكتور سهيل محفوض**

قيس الحواط***

(تاريخ الإيداع 25/8/ 2022 – تاريخ النشر27/10/ 2022)

□ **ملخّص** □

كثيرات الحدود والمؤشرات المعتمدة على المسافة بين رؤوس البيان المترابط، هي قيم عددية درست من قبل العديد من الكيميائيين منذ عقود، وطبقت في البداية على مجموعة من المركبات العضوية، من خلال تحول المركبات الى بيانات بجعل ذرات المركب رؤوس، والروابط اضلاع للحصول على الجزيء البياني، وزاد تطبيق نظرية البيان في المركبات الكيميائية والجزيئية بشكل كبير خلال السنوات القليلة الماضية لتحديد الخواص الفيزيائية والكيميائية وبعض المعايير الحرارية للمركبات مثل أنشطة الغليان، حرارة التكوين، مساحة السطح، التوتر السطحي، ضغط الأبخرة ونقطة الغليان. المؤشرات وكثيرات الحدود اللونية التي تعتمد على ألوان رؤوس البيان قدمت معلومات هامة جداً لبعض المركبات الخاصة ولها العديد من التطبيقات الكيميائية الهامة. في هذا البحث سوف نقوم بحساب كثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة والسالبة لربط بيان تام مع بيان ثنائي التجزئة تام.

الكلمات المفتاحية: المؤشرات، كثيرات الحدود، كثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة والسالبة، البيان التام، البيان الثنائي التجزئة التام.

*أستاذ – قسم الرياضيات–كلية العلوم – جامعه تشرين – اللاذقية – سورية (shaheenramy2010@hotmail.com)

**مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعه تشرين – اللاذقية – سورية (mahfudsuhail@gmail.com)

*** طالب دراسات عليا(دكتوراه) – قسم الرياضيات–كلية العلوم – جامعه تشرين – اللاذقية – سورية (kais.hw007@gmail.com)

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (6) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (6) 2022

Chromatic Schultz polynomial of Join a Complete Graph with a Complete bipartite Graph

Dr. Ramy Shaheen*
Dr. Suhail Mahfud**
Qays alhawat***

(Received 25/8/2022.Accepted 27/10/2022)

□ABSTRACT □

Polynomials and indices depended on the distance between the vertices of the connected graph are numerical values that had been studied by many chemists for decades. Initially, they applied on a group of organic compounds by converting compounds into graphs by making the compound atoms as vertices and bonds as edges to get the graphic molecule and the application of graphic theory in chemical and molecular compounds have increased significantly during the past few years to determine the physical and chemical properties and some thermal standards of compounds such as boiling activities, heat of formation, surface area, surface tension, vapor pressure and boiling point. Indices and chromatic polynomials depended on the colors of the vertices of the graph provided very important information for some special compounds and have many important chemical applications. In this paper, we will compute positive and negative chromatic Schultz polynomials of join a complete graph with a complete bipartite graph.

Key words: Indices, polynomials, positive and negative chromatic Schultz polynomials, complete graph, complete bipartite graph.

*Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria (shaheenramy2010@hotmail.com)
**Assistant professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria (mahfudsuhail@gmail.com)
***PHD student, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria (kais.hw007@gmail.com)

المقدمة

تعد نظرية البيان من العلوم الحديثة نسبياً، حيث ظهرت في بداية القرن الثامن عشر، ويعود الفضل في ظهورها إلى عالم الرياضيات السويسري ليونارد أولر حيث قام بتقديم أقدم وثيقة في نظرية البيان في عام ١٧٦٣ م، وهذه الوثيقة تعرف بمسألة الجسور السبعة لمدينة كونغ سبرنغ، بالإضافة إلى المقالة التي كتبها فانديرموند عن مسألة الفارس، حيث ظهرت في البداية نظرية البيان بوصفها أداة لحل الأحاجي والألعاب [1,2].

ولقد شهدت العقود الأخيرة تطوراً كبيراً في نظرية البيان، ونشرت العديد من الأبحاث التي تناولت العديد من المواضيع المتنوعة، وقد نتج عن هذا التطور في مطلع القرن العشرين تطبيقات واستعمالات ذات فوائد كبيرة في مواضيع ذات أهمية علمية، واقتصادية كبيرة، وأهميه نظريه البيان تتجلى بفعالية هذا العلم في شتى مجالات وفروع العلوم الأخرى مثل: علوم الكمبيوتر، والاقتصاد، والفيزياء، والكيمياء، ودراسة الكثير من المسائل المرتبطة بواقع الحياه اليومية وايجاد الحل الامثل لها، وذلك عن طريق تحويلها الى نموذج رياضي يسهل التعامل معه [3,4].

من أجل تطبيق نظرية البيان في الكيمياء أي تحويل المركبات الكيميائية المدروسة إلى بيانات عن طريق جعل ذرات المركب رؤوس لهذا البيان، والروابط أضلاعاً له، فنحصل على ما يسمى بالجزيء البياني (Molecular Graph) [5,6]. ثم نقوم بحساب المؤشرات (indices) له من خلال حساب هذه المؤشرات نستطيع توقع شكل الجزيء عند تغير الظروف الفيزيائية والكيميائية ونستطيع إيجاد العديد من المعايير الحرارية لهذه المركبات مثل حرارة التكوين (Heat of Formation) وطاقة الاجهاد (Strain Energy) [7].

المؤشرات عبارة عن قيم عددية، وهي متنوعة، وعديدة منها ما تعتمد على المسافة بين رؤوس البيان مثل مؤشر وينر (Weiner index) [8] وفوق- مؤشر وينر (hyper-Wiener index) [9] ومؤشر شولتز [10] (Schultz index) وقسم منها يتعمد على درجات الرؤوس في البيان مثل مؤشر المجموع العكسي (The inverse sum index) [11] ومنها ما يعتمد على ألوان رؤوس البيان مثل مؤشر زغرب اللوني الأول (The first chromatic Zagreb index) [12] وسبب تنوع واختلاف المؤشرات هو تنوع وأخلاف المركبات الكيميائية، فالمؤشر الذي يفيد في دراسة مركب قد لا يفيد في دراسة مركب اخر.

إن مؤشر وينر هو أول المؤشر التي ظهرت ودُرس على مجموعه من المركبات العضوية من قبل الباحث الفيزيائي الكيميائي (Harold Wiener) عام 1947 وكان يسمى رقم المسار وتستخدم المؤشرات حالياً للكشف الأوَّلي لجزيئات الدواء [13] وللتنبؤ بالتحولات التي تحدث في هياكل الحمض النووي الريبي RNA [14].

أنَّ كثيرات الحدود (polynomial) متنوعة وعديدة واستخدم بعضها في الكيمياء ومنها ما يعتمد على المسافة بين رؤوس البيان مثل كثيرة حدود هوسوي (Hosoya polynomial) [15] وقسم منها يتعمد على درجات الرؤوس في البيان مثل $M-$ كثيرة حدود($M-$polynomial) [16] ومنها ما يعتمد على ألوان رؤوس البيان مثل كثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة ($\chi^+ -$ chromatic Schultz polynomial) [17] وكثيرة حدود شولتز اللونية السالبة ($\chi^- -$ chromatic Schultz polynomial) [17] وتعتبر كثيرات الحدود ثروة غنية بالمعلومات عند حسابها لأي مركب كيميائي لأننا نستطيع من خلالها معرفة العديد من المؤشرات [19-18].

أهمية البحث:

ان نظريه البيان تقدم حلولاً للعديد من المواضيع في شتى علوم المعرفة فهي تقوم على معالجة الكثير من المسائل المرتبطة بواقع الحياة اليومية، وإيجاد الحل الأمثل لها وذلك عن طريق تحويلها الى بيانات خاصة تتوافق مع

طبيعة المسالة المطروحة، وبسبب تنوع واختلاف مجالات وتخصصات نظرية البيان مثل: السيطرة، والألوان، وبيانات أولر وهاملتون، وأعداد رامزي وغيرها، وانعكس هذا ايجاباً على جميع المجالات العلمية الذي ترتبط بنظرية البيان ونخص بالذكر الكيمياء، حيث أن حساب المؤشرات للمركب الكيميائي بعد تحويله إلى بيان، ساهم الى حد كبير في التنبؤ بسلوك المركب عند تغير الظروف الفيزيائية والكيميائية لهذا المركب، وساهم في حساب العديد من القيم الحرارية لهذا المركب ويستفاد من المؤشرات عند تركيب الأدوية حيث أن المؤشرات تعطي الصيدلاني الكثير من المعلومات الهامة عن طبيعة الدواء الذي يتم تركيبه.

أهداف البحث:

يهدف هذا البحث إلى حساب كثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة والسالبة لربط البيان التام مع بيان ثنائي التجزئة تام $K_p + K_{n,m}$.

طرائق البحث:

تنطلق الدراسة من الفرضيات التالية:

١) مسافة أي رأسين عن بعضها في البيان التام K_p هو ١ وذلك لأن كل رأس متصل مع جميع الرؤوس.

٢) مسافة أي رأسين عن بعضهما في البيان الثنائي التجزئة التام $K_{n,m}$ هو أما ١ أو ٢.

٣) مسافة أي رأس في البيان التام K_p عن أي رأس في البيان الثنائي التجزئة التام $K_{n,m}$وذاك عند ربط البيانين هو ١.

٤) البيان التام K_p يأخذ p لون أي $\chi(K_p) = p$ والبيان الثنائي التجزئة التام $K_{n,m}$ يأخذ لونين أي $\chi(K_{n,m}) = 2$

منهجية البحث:

تم إتباع المنهج الوصفي التجريبي، ووفقاً للمنهج الوصفي تم توصيف ظواهر الدراسة بالاعتماد على تعريف البيان التام، والبيان الثنائي التجزئة التام، والاعتماد على تعريف ربط البيانات، وكثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة والسالبة، وعدد الألوان الذي تأخذها البيانات المدروسة.

تعاريف ومفاهيم اساسية:

تعريف 1: البيان (Graph) [20]

لتكن لدينا $V \neq \phi$ مجموعة كيفية من النقاط حيث أن $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و E مجموعة من الخطوط التي تصل بين نقاط المجموعة V حيث أنَّ $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_q\}$ تسمي الثنائية المؤلفة من المجموعتين V و E ويرمز لها بيانياً $G(V, E)$ وتسمي المجموعة V مجموعة الرؤوس أو ذرا (vertices) وكل نقطة تسمى رأساً (vertex) والمجموعة E مجموعة الحواف (edges) حيث كل منها يسمى حد (edge) .

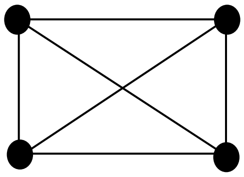
رتبة البيان G (order) هو عدد رؤوس البيان $order(G) = |V(G)| = P$.

حجم البيان G (size) هو عدد أضلاع البيان $size(G) = |E(G)| = q$.

نقول عن البيان G أنه مترابط (connected graph) إذا وجد مسار بين أي رأسين في البيان G.

تعريف ٢: البيان التام (Complete Graph) [20]

نقول عن البيان أنه تام إذا كان كل رأس يجاور جميع رؤوس البيان الأخرى ويرمز له بالرمز K_p حيث أن p هو عدد رؤوس البيان ويكون $q = \frac{p(p-1)}{2}$ في الشكل (1) نجد البيان K_4.

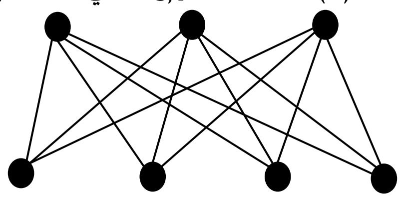


الشكل (١) يمثل البيان K_4

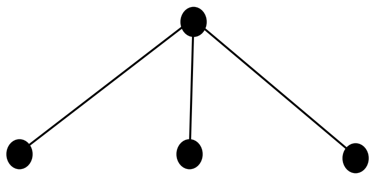
تعريف ٣: البيان الثنائي التجزئة التام (Complete bipartite Graph) [20]

البيان الثنائي التجزئة التام هو بيان ٢ ـ تجزئة (ثنائي التجزئة) له مجموعتان مستقلتان من الرؤوس حيث أن كل رأس في كل مجموعة مستقلة يتصل مع جميع رؤوس المجموعة الثانية، ولا يتصل مع رؤوس مجموعته، إذا كان $|V_1| = n, |V_2| = m$ عندئذ يرمز له بالرمز $K_{n,m}$ و يدعى البيان $K_{1,m}$ بالبيان النجمي (star).

في الشكل (٢) نجد البيان $K_{3,4}$ وفي الشكل (٣) نجد البيان $K_{1,3}$.



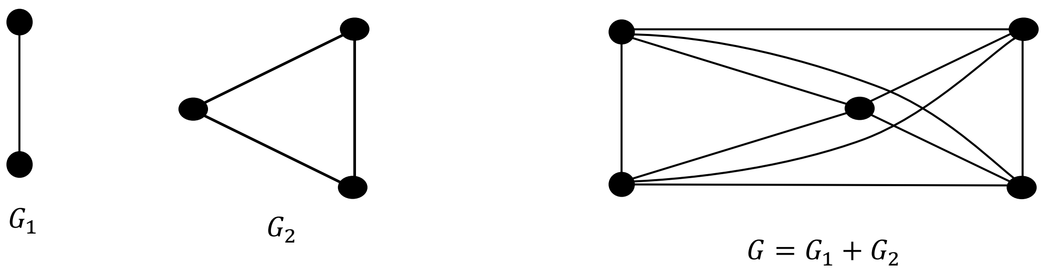
الشكل (٢) يمثل البيان $K_{3,4}$



الشكل (٣) يمثل البيان $K_{1,3}$

تعريف 6: ربط بيانين (Join graphs) [20]

نعرف ربط البيانين $G_1(V_1,E_1)$ و $G_2(V_2,E_2)$ بأنه البيان $G(V,E) = G_1(V_1,E_1) + G_2(V_2,E_2)$ حيث له مجموعة الرؤوس $V = V_1 \cup V_2$ ومجموعة الأضلاع $E = E_1 \cup E_2 \cup \{uv; u \in V_1 \; and \; v \in V_2\}$ ويعطى عدد رؤوس وعدد أضلاع ربط بيانين بالعلاقة التالية $p = p_1 + p_2, q = q_1 + q_2 + p_1 p_2$ في الشكل ٤ نجد ربط البيان G_1 مع البيان G_2.



الشكل (٤) يمثل البيان ربط البيان G_1 مع البيان G_2

تعريف ٧: المسافة (البعد) (The distance) [20]

تعرف المسافة بين الرأسين u, v في البيان G بأنها أقصر مسار يصل بين الرأسين ويرمز لها بالرمز التالي: $d(u,v)$ ويعرف القطر (diameter) بالشكل التالي $D(G) = Max_{u \in V}\{d(u,v): v \in V\}$

تعريف ٨: تلوين الرؤوس (Vertices–coloring) [20]

ليكن لدينا $G(V,E)$ بيان بسيط ومترابط نقول إن البيان G قابل للتلوين بـ k لون للرؤوس إذا تمكنا من تلوين رؤوسه بـ k لون من الألوان المختلفة بحيث لا يمكن لأي رأسين متجاورين أن يكون لهما اللون نفسه حيث k أقل ما يمكن ونرمز لعدد ألوان البيان بالرمز $\chi(G)$ ونعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي:

لنأخذ التابع: $\varphi: V \to C; C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}; \forall uv \in E; \varphi(u) \neq \varphi(v)$ في هذه الحالة يكون عدد ألوان البيان $\chi(G)$ هو أقل عدد لعناصر المجموعة C.

نقول عن المجموعة $S \subseteq V$ بأنها مجموعة مستقلة إذا لم يكن هنالك أي اتصال بين أي رأسين من رؤوس هذه المجموعة وبالتالي المجموعة المستقلة تأخذ لون واحد وأقل عدد للمجموعات المستقلة في البيان G هو عدد الألوان $\chi(G)$.

لنأخذ التابع: $\xi: V \to \{1, 2, 3, \dots, k\}; \xi(v_i) = s \ if \ \varphi(v_i) = c_s; c_s \in C$ حيث يدعى العدد s الرقم اللوني لرأس الذي يأخذ اللون c_s.

من أجل تعريف φ^+ نعطي أكبر مجموعة مستقلة من رؤوس البيان اللون c_k في هذه الحالة من أجل أي رأس في هذه المجموعة سوف يكون $\xi_{\varphi^+(u)} = k$ ونعطي المجموعة المستقلة الأقل منها بعدد الرؤوس اللون c_{k-1} في هذه الحالة من أجل أي رأس في هذه المجموعة سوف يكون $\xi_{\varphi^+(u)} = k - 1$ وهكذا حتى نصل إلى أصغر مجموعة مستقلة من رؤوس البيان ونعطيها اللون c_1 في هذه الحالة من أجل أي رأس في هذه المجموعة سوف يكون $\xi_{\varphi^+(u)} = 1$

من أجل تعريف φ^- نعطي أكبر مجموعة مستقلة من رؤوس البيان اللون c_1 في هذه الحالة من أجل أي رأس في هذه المجموعة سوف يكون $\xi_{\varphi^-(u)} = 1$ ونعطي المجموعة المستقلة الأقل منها بعدد الرؤوس اللون c_2 في هذه الحالة من أجل أي رأس في هذه المجموعة سوف يكون $\xi_{\varphi^-(u)} = 2$ وهكذا حتى نصل إلى أصغر مجموعة مستقلة من رؤوس البيان ونعطيها اللون c_k في هذه الحالة من أجل أي رأس في هذه المجموعة سوف يكون $\xi_{\varphi^-(u)} = k$

تعريف ٩: كثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة (χ^+ – Chromatic Schultz polynomial)

ليكن لدينا البيان G البسيط والمترابط عندئذ تعرف كثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة بالشكل: [17]

$$S_{\chi^+}(G,x) = \frac{1}{2}\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}(\xi_{\varphi^+}(u) + \xi_{\varphi^+}(v))x^{d(u,v)}$$

تعريف ١٠: كثيرة حدود شولتز اللونية السالبة (χ^- – Chromatic Schultz polynomial)

ليكن لدينا البيان G البسيط والمترابط عندئذ تعرف كثيرة حدود شولتز اللونية السالبة بالشكل: [17]

$$S_{\chi^-}(G,x) = \frac{1}{2}\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}(\xi_{\varphi^-}(u) + \xi_{\varphi^-}(v))x^{d(u,v)}$$

منهجية العمل:

سوف نقوم بحساب كثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة والسالبة لربط بيان تام مع بيان ثنائي التجزئة تام عن طريق إيجاد المسافة بين رؤوس البيان $K_p + K_{n,m}$ حيث سنقوم بتقسيم الرؤوس إلى ثلاث مجموعات وسنجد عدد ألوان البيان $K_p + K_{n,m}$ والأرقام اللونية الموجبة والسالبة لرؤوس البيان $K_p + K_{n,m}$ ثم نعوض في التعريف.

مناقشة النتائج:

لدينا $\chi(K_p) = p$ حيث أن البيان K_p يحوي p مجموعة مستقلة وكل مجموعة مستقلة تحوي رأس واحد ولدينا $\chi(K_{n,m}) = 2$ حيث أن البيان $K_{n,m}$ يحوي مجوعتين مستقلتين الأولى تحوي n رأس، والثانية تحوي m رأس، عند ربط البيان K_p مع البيان $K_{n,m}$ سيبقى كل من البيانين $K_p, K_{n,m}$ على حالهما وسنصل كل رأس من K_p مع كل رأس من $K_{n,m}$ وذلك حسب تعريف ربط بيانين ولذلك $\chi(K_p + K_{n,m}) = \chi(K_p) + \chi(K_{n,m}) = p + 2$

سنقسم رؤوس البيان $K_p + K_{n,m}$ إلى ثلاث مجموعات:

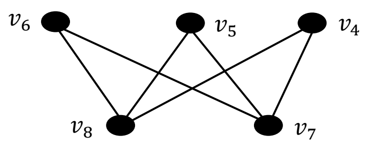
المجموعة V_1 تحتوي على رؤوس البيان K_p أي $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_p\};\ |V_1| = p$

المجموعة V_2 تحتوي على رؤوس المجموعة المستقلة الأولى من البيان $K_{n,m}$ التي تحوي n رأس أي $V_2 = \{v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_{p+n}\};\ |V_2| = n.$.

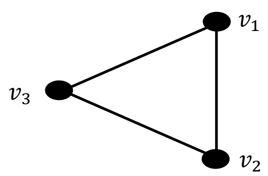
المجموعة V_3 تحتوي على رؤوس المجموعة المستقلة الثانية من البيان $K_{n,m}$ التي تحوي m رأس أي $V_3 = \{v_{p+n+1}, v_{p+n+2}, \dots, v_{p+n+m}\};\ |V_3| = m$.

عدد ألوان رؤوس المجموعة V_1 هو p لون وكل مجموعة مستقلة تحوي رأس وهي نفسها عدد ألوان البيان K_p وعدد ألوان رؤوس المجموعة V_2 هو لون واحد لأنها مجموعة مستقلة وهو نفسه عدد ألوان المجموعة المستقلة الأولى من البيان $K_{n,m}$ التي تحوي n رأس وعدد ألوان رؤوس المجموعة V_3 هو لون واحد لأنها مجموعة مستقلة وهو نفسه عدد ألوان المجموعة المستقلة الثانية من البيان $K_{n,m}$ التي تحوي m رأس.

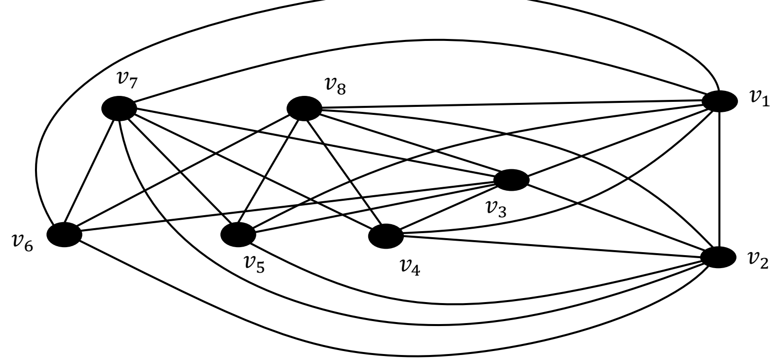
في الشكل ٥ نجد البيان K_3 وفي الشكل ٦ نجد البيان $K_{3,2}$ وفي الشكل ٧ نجد البيان $K_3 + K_{3,2}$



الشكل ٦ يمثل البيان $K_{3,2}$



الشكل ٥ يمثل البيان K_3



الشكل ٧ يمثل البيان $K_3 + K_{3,2}$

من الواضح أن مسافة أي رأس عن نفسه في أي مجموعة من المجموعات V_1, V_2, V_3 هو ٠

مسافة أي رأس في المجموعة V_1 عن أي رأس آخر في نفس المجوعة وعن أي رأس من رؤوس المجموعتين V_2, V_3 هو ١، ومسافة أي رأس في المجوعة V_2 عن أي رأس في المجموعة V_3 هو ١.

مسافة أي رأس في المجموعة V_2 عن أي رأس آخر في نفس المجوعة هو ٢ ومسافة أي رأس في المجموعة V_3 عن أي رأس آخر في نفس المجوعة هو٢.

مبرهنة ١: إذا كانت $n \geq m$ فإن كثيرة حدود شولتز الموجبة تعطى بالعلاقة التالية:

$$S_{\chi^+}\left(K_p + K_{n,m}, x\right) = p(p+1) + n(2p+4) + m(2p+2)$$
$$+\left(\frac{p^3-p}{2} + np\left(\frac{3p+5}{2}\right) + mp\left(\frac{3p+3}{2}\right) + nm(2p+3)\right)x^1$$
$$+\left(n(n-1)(p+2) + m(m-1)(p+1)\right)x^2.$$

البرهان:

من أجل حساب كثير حدود شولتز اللونية الموجبة نعطي أكبر مجموعه مستقلة اللون c_{p+2} والمجموعة المستقلة الأقل منها بعدد الرؤوس نعطيها اللون c_{p+1} وهكذا حتى نعطي أصغر مجموعة مستقلة اللون c_1.

بما ان المجموعة V_1 تحوي p مجموعة مستقلة وكل مجموعة تحوي رأس وأحد والمجموعة V_2 هي مجموعة مستقلة وتحوي n رأس والمجموعة V_3 هي مجموعة مستقلة وتحوي m رأس ولأن $n \geq m$ نعطي رؤوس المجموعة V_2 اللون c_{p+2} ونعطي رؤوس المجموعة V_3 اللون c_{p+1} ونعطي رؤوس المجموعة V_1 مجموعة الألوان $\{c_1, c_2, \dots, c_p\}$ حيث كل رأس يأخذ أحد الألوان وذلك لأن المجموعات المستقلة متساوية بالعدد وكل مجموعة تحوي رأس واحد ونعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي:

$$\varphi: V_1 \to \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_p\};\ \varphi^+(v_i) = c_i, \xi_{\varphi^+(v_i)} = i; 1 \leq i \leq p$$
$$\varphi: V_2 \to \{c_{p+2}\};\ \varphi^+(v_i) = c_{p+2}, \xi_{\varphi^+(v_i)} = p+2; p+1 \leq i \leq p+n$$
$$\varphi: V_3 \to \{c_{p+1}\};\ \varphi^+(v_i) = c_{p+1}, \xi_{\varphi^+(v_i)} = p+1; p+n+1 \leq i \leq p+n+m$$

بما أن $D((K_p + K_{n,m}) = 2$ لذلك كثير حدود شولتز اللونية الموجبة تحوي ثلاثة حدود

سنقوم بحساب كل حد من كثيرة الحدود بشكل منفصل من أجل توضيح طريقة الحساب وفي النهاية سنجمع هذه الأجزاء لنحصل على كثيرة الحدود المطلوبة.

من أجل حساب الحد الثابت في كثيرة الحدود نقوم بحساب مجموع الرقمين اللونيين لكل رأسين يبعدان عن بعضهما ٠

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_1 مع الرقم اللوني لنفس الرأس

$$(1+1) + (2+2) + (٣+٣) + \cdots + (p+p) = 2\frac{p(p+1)}{2} = p(p+1).$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_2 التي عدد رؤوسها n مع الرقم اللوني لنفس الرأس

$$(p+2+p+2) + (p+2+p+2) + \cdots + (p+2+p+2) = n(2p+4).$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_3 التي عدد رؤوسها m مع الرقم اللوني لنفس الرأس

$$(p+1+p+1) + (p+1+p+1) + \cdots + (p+1+p+1) = m(2p+2).$$

وبالتالي الحد الثابت في كثيرة الحدود هو:

$$p(p+1) + n(2p+4) + m(2p+2).$$

حساب الحد الثاني في كثيرة الحدود والذي يمثل مجموع الرقمين اللونيين لكل رأسين يبعدان عن بعضهما ١

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_1 مع الرقم اللوني لكل رأس اخر من رؤوس المجموعة V_1

$$\begin{aligned}
&(1+2)+(1+3)+(1+4)+(1+5)+\cdots+(1+p)\\
&+(2+1)+(2+3)+(2+4)+(2+5)+\cdots+(2+p)\\
&\vdots\\
&+(p+1)+(p+2)+(p+3)+(p+4)+\cdots+(p+p-1)
\end{aligned}$$

بما أن $|V_1|=p$ فإذا أخذنا السطر رقم i في المجموع السابق حيث أن $1\le i\le p$ فيكون مجموع هذا السطر

$$(1+2+3+4+\cdots+p)-i+i(p-1)$$

وبما أنه لدينا p سطر فان المجموع السابق

$$\sum_{i=1}^{p}((1+2+3+4+\cdots+p)-i+i(p-1))$$

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{p(p+1)}{2}-2i+ip\right)=p\frac{p(p+1)}{2}-2\frac{p(p+1)}{2}+p\frac{p(p+1)}{2}$$

$$=p^2(p+1)-p(p+1)=p^3-p.$$

وبما أن مجموع الرقمين اللونيين مكررين يجب قسمة المقدار على ٢ أي يصبح المقدار $\frac{p^3-p}{2}$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_1 مع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_2

$$\begin{aligned}
&(1+p+2)+(1+p+2)+(1+p+2)+(1+p+2)+\cdots+(1+p+2)\\
&+(2+p+2)+(2+p+2)+(2+p+2)+(2+p+2)+\cdots+(2+p+2)\\
&\vdots\\
&+(p+p+2)+(p+p+2)+(p+p+2)+(p+p+2)+\cdots+(p+p+2)\\
&=(1+2+3+\cdots+p)n+(p+2)np=n\frac{p(p+1)}{2}+np(p+2)=np\left(\frac{3p+5}{2}\right).
\end{aligned}$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_1 مع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_3

$$\begin{aligned}
&(1+p+1)+(1+p+1)+(1+p+1)+(1+p+1)+\cdots+(1+p+1)\\
&+(2+p+1)+(2+p+1)+(2+p+1)+(2+p+1)+\cdots+(2+p+1)\\
&\vdots\\
&+(p+p+1)+(p+p+1)+(p+p+1)+(p+p+1)+\cdots+(p+p+1)\\
&=(1+2+3+\cdots+p)m+(p+1)mp=m\frac{p(p+1)}{2}+mp(p+1)=mp\left(\frac{3p+3}{2}\right).
\end{aligned}$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_2 مع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_3

$$\begin{aligned}
&(p+2+p+1)+(p+2+p+1)+(p+2+p+1)+\cdots+(p+2+p+1)\\
&+(p+2+p+1)+(p+2+p+1)+(p+2+p+1)+\cdots+(p+2+p+1)\\
&\vdots\\
&+(p+2+p+1)+(p+2+p+1)+(p+2+p+1)+\cdots+(p+2+p+1)\\
&=nm(2p+3).
\end{aligned}$$

وبالتالي الحد الثاني من كثيرة الحدود هو:

$$\left(\frac{p^3-p}{2}+np\left(\frac{3p+5}{2}\right)+mp\left(\frac{3p+3}{2}\right)+nm(2p+3)\right)x^1$$

حساب الحد الثالث في كثيرة الحدود والذي يمثل مجموع الرقمين اللونيين لكل رأسين يبعدان عن بعضهما ٢ وهي أكبر مسافة

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_2 مع الرقم اللوني لكل رأس اخر من رؤوس المجموعة V_2

$$\begin{aligned}&(p+2+p+2)+(p+2+p+2)+\cdots+(p+2+p+2)\\&\quad+(p+2+p+2)+(p+2+p+2)+\cdots+(p+2+p+2)\\&\quad\vdots\\&\quad+(p+2+p+2)+(p+2+p+2)+\cdots+(p+2+p+2)\\&\quad=n(n-1)(2p+4).\end{aligned}$$

وبما أن مجموع الرقمين اللونيين مكررين يجب قسمة المقدار على ٢ أي يصبح المقدار $n(n-1)(p+2)$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_3 مع الرقم اللوني لكل رأس اخر من رؤوس المجموعة V_3

$$\begin{aligned}&(p+1+p+1)+(p+1+p+1)+\cdots+(p+1+p+1)\\&\quad+(p+1+p+1)+(p+1+p+1)+\cdots+(p+1+p+1)\\&\quad\vdots\\&\quad+(p+1+p+1)+(p+1+p+1)+\cdots+(p+1+p+1)\\&\quad=m(m-1)(2p+2).\end{aligned}$$

وبما أن مجموع الرقمين اللونيين مكررين يجب قسمة المقدار على ٢ أي يصبح المقدار $m(m-1)(p+1)$

وبالتالي الحد الثالث من كثيرة الحدود هو: $(n(n-1)(p+2)+m(m-1)(p+1))x^2$

مما سبق نجد أن كثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة تعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned}S_{\chi^+}\left(K_p+K_{n,m},x\right)&=p(p+1)+n(2p+4)+m(2p+2)\\&\quad+\left(\frac{p^3-p}{2}+np\left(\frac{3p+5}{2}\right)+mp\left(\frac{3p+3}{2}\right)+nm(2p+3)\right)x^1\\&\quad+\big(n(n-1)(p+2)+m(m-1)(p+1)\big)x^2.\end{aligned}$$

نتيجة ١: إذا كانت $m>n$ فإن:

$$\begin{aligned}S_{\chi^+}\left(K_p+K_{n,m},x,x\right)&=p(p+1)+m(2p+4)+n(2p+2)\\&\quad+\left(\frac{p^3-p}{2}+mp\left(\frac{3p+5}{2}\right)+np\left(\frac{3p+3}{2}\right)+nm(2p+3)\right)x^1\\&\quad+\big(m(m-1)(p+2)+n(n-1)(p+1)\big)x^2.\end{aligned}$$

البرهان:

بما أن $K_{n,m}=K_{m,n}$ ولدينا $m>n$ نبدل في كثيرة حدود شولتز اللونية الموجبة التي حصلنا عليها عندما كانت $n\geq m$ كل n بـ m وكل m بـ n فنحصل على المطلوب

$$\begin{aligned}S_{\chi^+}\left(K_p+K_{n,m},x,x\right)&=p(p+1)+m(2p+4)+n(2p+2)\\&\quad+\left(\frac{p^3-p}{2}+mp\left(\frac{3p+5}{2}\right)+np\left(\frac{3p+3}{2}\right)+nm(2p+3)\right)x^1\\&\quad+\big(m(m-1)(p+2)+n(n-1)(p+1)\big)x^2.\end{aligned}$$

مبرهنة ٢: إذا كانت $n \geq m$ فإن كثيرة حدود شولتز السالبة تعطى بالعلاقة التالية:

$$S_{\chi^-}\left(K_p + K_{n,m}, x\right) = p^2 + 5p + 2n + 4m + \left(\frac{2p^3+8p^2-10p}{4} + n\frac{(p+2)(p+3)}{2} + np + m\frac{(p+2)(p+3)}{2} + 2mp + 3mn - 6\right)x^1 + \left(n(n-1) + 2m(m-1)\right)x^2.$$

البرهان:

بما أن $n \geq m$ من أجل حساب كثيرة حدود شولتز اللونية السالبة نعطي رؤوس المجموعة V_2 اللون c_1 ونعطي رؤوس المجموعة V_3 اللون c_2 ونعطي رؤوس المجموعة V_1 مجموعة الألوان $\{c_3, c_4, \dots, c_{p+2}\}$ حيث كل رأس يأخذ أحد الألوان وذلك لأن المجموعات المستقلة متساوية بالعدد وكل مجموعة تحوي رأس واحد ونعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي:

$$\varphi: V_1 \to \{c_3, c_4, \dots, c_{p+2}\};\ \varphi^+(v_i) = c_{i+2}, \xi_{\varphi^+(v_i)} = i + 2; 1 \leq i \leq p$$
$$\varphi: V_2 \to \{c_1\};\ \varphi^+(v_i) = c_1, \xi_{\varphi^+(v_i)} = 1; p + 1 \leq i \leq p + n$$
$$\varphi: V_3 \to \{c_2\};\ \varphi^+(v_i) = c_2, \xi_{\varphi^+(v_i)} = 2; p + n + 1 \leq i \leq p + n + m$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_1 مع الرقم اللوني لنفس الرأس

$$(3 + 3) + (4 + 4) + (5 + 5) + \dots + (p + 2 + p + 2) = 2(3 + 4 + \cdots + p + 2).$$
$$= 2(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + p + 2 - 3) = 2\frac{(p+2)(p+3)}{2} - 6 = p^2 + 5p.$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_2 مع الرقم اللوني لنفس الرأس

$$(1 + 1) + (1 + 1) + + \dots + (1 + 1) = 2n.$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_3 مع الرقم اللوني لنفس الرأس

$$(2 + 2) + (2 + 2) + + \dots + (2 + 2) = 4m.$$

وبالتالي الحد الثابت في كثيرة الحدود هو:

$$p^2 + 5p2n + 4m.$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_1 مع الرقم اللوني لكل رأس اخر من رؤوس المجموعة V_1

$$\begin{aligned}
&(3 + 4) + (3 + 5) + (3 + 6) + (3 + 7) + \cdots + (3 + p + 2)\\
&+(4 + 3) + (4 + 5) + (4 + 6) + (4 + 7) + \cdots + (4 + p + 2)\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
&+(p + 2 + 3) + (p + 2 + 4) + (p + 2 + 5) + \cdots + (p + 2 + p + 1)
\end{aligned}$$

إذا أخذنا السطر رقم i في المجموع السابق حيث أن $1 \leq i \leq p$ فإن مجموع هذا السطر

$$(3 + 4 + 5 + \cdots + p + 2) - (i + 2) + (i + 2)(p - 1) = \frac{(p+2)(p+3)}{2} - 2i + ip + 2p - 7$$

وبما أنه لدينا p سطر فان المجموع السابق

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{(p+2)(p+3)}{2} - 2i + ip + 2p - 7\right)$$
$$= p\frac{(p+2)(p+3)}{2} - 2\frac{p(p+1)}{2} + p\frac{p(p+1)}{2} + 2p^2 - 7p = \frac{2p^3+8p^2-10p}{2}.$$

وبما أن مجموع الرقمين اللونيين مكررين يجب قسمة المقدار على ٢ أي يصبح المقدار $\frac{2p^3+8p^2-10p}{4}$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_1 مع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_2

$$\begin{aligned}&(3+1)+(3+1)+(3+1)+(3+1)+\cdots+(3+1)\\&+(4+1)+(4+1)+(4+1)+(4+1)+\cdots+(4+1)\\&\vdots\\&+(p+2+1)+(p+2+1)+(p+2+1)+\cdots+(p+2+1)\\&=(3+4\ldots+p+2)n+(1)np=n\frac{(p+2)(p+3)}{2}+np-3.\end{aligned}$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_1 مع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_3

$$\begin{aligned}&(3+2)+(3+2)+(3+2)+(3+2)+\cdots+(3+2)\\&+(4+2)+(4+2)+(4+2)+(4+2)+\cdots+(4+2)\\&\vdots\\&+(p+2+2)+(p+2+2)+(p+2+2)+\cdots+(p+2+2)\\&=(3+4\ldots+p+2)m+(2)mp=m\frac{(p+2)(p+3)}{2}+2mp-3.\end{aligned}$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_2 مع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_3

$$\begin{aligned}&(1+2)+(1+2)+(1+2)+(1+2)+\cdots+(1+2)\\&+(1+2)+(1+2)+(1+2)+(1+2)+\cdots+(1+2)\\&\vdots\\&+(1+2)+(1+2)+(1+2)+(1+2)+\cdots+(1+2)\\&=3mn.\end{aligned}$$

وبالتالي الحد الثاني من كثيرة الحدود هو

$$\left(\frac{2p^3+8p^2-10p}{4}+n\frac{(p+2)(p+3)}{2}+np+m\frac{(p+2)(p+3)}{2}+2mp+3mn-6\right)x^1.$$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_2 مع الرقم اللوني لكل رأس اخر من رؤوس المجموعة V_2

$$\begin{aligned}&(1+1)+(1+1)+(1+1)+\cdots+(1+1)\\&+(1+1)+(1+1)+(1+1)+\cdots+(1+1)\\&\vdots\\&+(1+1)+(1+1)+(1+1)+\cdots+(1+1)\\&=2n(n-1).\end{aligned}$$

وبما أن مجموع الرقمين اللونيين مكررين يجب قسمة المقدار على ٢ أي يصبح المقدار $n(n-1)$

حساب مجموع الرقم اللوني لكل رأس من رؤوس المجموعة V_3 مع الرقم اللوني لكل رأس اخر من رؤوس المجموعة V_3

$$\begin{aligned}&(2+2)+(2+2)+(2+2)+\cdots+(2+2)\\&+(2+2)+(2+2)+(2+2)+\cdots+(2+2)\\&\vdots\\&+(2+2)+(2+2)+(2+2)+\cdots+(2+2)\\&=4m(m-1).\end{aligned}$$

وبما أن مجموع الرقمين اللونيين مكررين يجب قسمة المقدار على ٢ أي يصبح المقدار $2m(m-1)$ وبالتالي الحد الثالث من كثيرة الحدود هو: $(n(n-1)+2m(m-1))x^2$

مما سبق نجد أن كثيرة حدود شولتز اللونية السالبة:

$$S_{\chi^-}\left(K_p+K_{n,m},x\right)=\frac{1}{2}\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}(\xi_{\varphi^-}(u)+\xi_{\varphi^-}(v))x^{d(u,v)}$$
$$=p^2+5p+2n+4m+(\frac{2p^3+8p^2-10p}{4}+n\frac{(p+2)(p+3)}{2}$$
$$+np+m\frac{(p+2)(p+3)}{2}+2mp+3mn-6)x^1+(n(n-1)+$$
$$2m(m-1))x^2.$$

نتيجة ٢: إذا كانت $m>n$ فإن:

$$S_{\chi^-}\left(K_p+K_{n,m},x\right)=p^2+5p+2m+4n+(\frac{2p^3+8p^2-10p}{4}+m\frac{(p+2)(p+3)}{2}$$
$$+mp+n\frac{(p+2)(p+3)}{2}+2np+3mn-6)x^1+(m(m-1)+$$
$$2n(n-1))x^2.$$

البرهان:

بما أن $K_{n,m}=K_{m,n}$ ولدينا $m>n$ نبدل في كثيرة حدود شولتز اللونية السالبة التي حصلنا عليها عندما كانت $n\geq m$ كل n بـ m وكل m بـ n فنحصل على المطلوب

$$S_{\chi^-}\left(K_p+K_{n,m},x\right)=p^2+5p+2m+4n+(\frac{2p^3+8p^2-10p}{4}+m\frac{(p+2)(p+3)}{2}$$
$$+mp+n\frac{(p+2)(p+3)}{2}+2np+3mn-6)x^1+(m(m-1)+$$
$$2n(n-1))x^2.$$

الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

تم في هذا البحث حساب كثيره حدود شولتز اللونية الموجبة والسالبة لربط البيان التام مع بيان ثنائي التجزئة تام $K_p+K_{n,m}$ من أجل أي قيمة لـ n,m,p وناقشنا حالة $n\geq m$ وحالة $m>n$.

التوصيات

نوصي بمتابعة هذا العمل وحساب كثيره حدود شولتز اللونية المعدلة الموجبة والسالبة لربط البيان التام مع بيان ثنائي التجزئة تام $K_p+K_{n,m}$ ولبعض البيانات الخاصة وبعض البيانات الناتجة عن مجموعة من العمليات الأساسية على بعض البيانات مثل الجداء المباشر والجداء القوي والمنقول والمتمم.

المراجع:

[1] Milková, E. 2014, *Puzzles As Excellent Tool Supporting Graph Problems Understanding*. Procedia - Social and Behavioral Sciences, Vol. 131, 177 – 181.

[2] Nagy, B. 2003, *SW-type puzzles and their graphs*. Acta Cybernetica, Vol. 16, 93-131.

[3] Anil, K. K; Basavarajappa, N. S; Shanmukha, M. C; Shilpa, K. C. 2020, Degree-Based Topological Indices on Asthma Drugs with QSPR Analysis during Covid-19. European Journal of Molecular & Clinical Medicine, Vol. 7, 53-66.

[4] Mondal, S; Imran, M; De, N; Pal, A. 2021, Neighborhood M-polynomial of titanium compounds. Arabian Journal of Chemistry, Vol. 14, 103244.

[5] Pogliani, L. 2000, *From molecular connectivity indices to semiempirical connectivity terms: Recent trends in graph theoretical descriptors*. Chemical Reviews, Vol. 100, 3827-3858.

[6] Randić, M. 2003, *Aromaticity of Polycyclic Conjugated Hydrocarbons*. Chemical Reviews, Vol. 103, 3449-3605.

[7] Ghorbani, M; Mesgarani, H; Shakeraneh, S. 2011, *Computing GA index and ABC index of V phenylenic nanotube*. Optoelectronics and Advanced Materials – Rapid Communications, Vol. 5, 324–326.

[8] Wiener, H. 1947, *structural determination of paraffin boiling points*. Journal of the American chemical society, Vol. 69, 17–20.

[9] Randi´c, M. 1993, *Novel molecular descriptor for structure-property studies*. Chem. Phys. Lett, Vol. 211, 478–483.

[10] Schultz, H, P. 1989, *Topological organic chemistry 1. Graph theory and topological indices of alkanes*, J. Chem. Inf. Comput. Sci, Vol. 29, 227–228.

[11] Ahmad, M, S; Nazeer, W; Kang, S, M; Jung, C, Y. 2017, *M-polynomials and Degree based Topological Indices for the Line Graph of Firecracker Graph*. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 6, 2749-2776.

[12] Kok, J; Sudev, N, K; Mary, U. 2017, *On chromatic Zagreb indices of certain graphs*. Discrete Math. Algorithm. Appl, Vol. 9, 1-11.

[13] Agrawal, V, K; Bano, S; Mathur, K, C; Khadikar, P. 2000, *Novel application of Wiener vis-ā-vis Szeged indices: Antitubercular activities of quinolones*. Proc. Indian Acad. Sci. (Chem.Sci.,), Vol. 112, 137-146.

[14] Avihoo, A; Barash, D. 2006, *Shape Similarity Measures for the Design of small RNA Switches*. Journal Biomolecular Structure and Dynamics, Vol. 24, 17-24.

[15] Hosoya, H. 1988, *On some counting polynomials in chemistry*. Discr. Appl. Math, Vol 19, 239–257.

[16] Deutsch, E; Klavzar, S. 2015, *M-Polynomial and degree-based topological indices*. Iran. J. Math. Chem, Vol. 6, 93–102.

[17] Raja, R; Naduvath, S; Dominic, C. 2019, *Modified Chromatic Schultz polynomial of Some Cycle Related Graph*. Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics, Vol. 27, 12-31.

[18] Rezaei, M; Farahani, M. R; Khalid, W; Baig, A. Q. 2017, Computation of Hosoya polynomial, Wiener and hyper Wiener $J_{6,m}$. Journal of Prime Research in Mathematics. Vol. 13, 30-40.

[19] Wang, S; Basavanagoud, B; Hosamani, S. M; Farahani, M. R. 2015, The Schultz polynomial, Modified Schultz polynomial And Their Indices For The Jahangir Graphs $J_{4,m}$ for integer number n=4. Asian Journal of Applied Sciences. Vol. 3, 823-827.

[20] Shaheen, R; Mahfud, S. 2011, *Graph theory*, Tishreen university, Syria, 383.