مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (6) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (6) 2022

معايير تذبذب لمعادلة ايمدن _ فولر التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب

د. نبيل علي *

مريم قشعور **

(تاريخ الإيداع 19/7/ 2022 – تاريخ النشر26/10/ 2022)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى دراسة سلوك التذبذب لحلول معادلة إيمدن _ فولر وهي معادلة تفاضلية فوق خطية من المرتبة الثانية بالشكل: $(r(t)\, \acute{z}(t))\acute{} + q(t)\ |x(t)|^{\gamma-1}\, x(t) = 0$ ذات حد محايد سالب معطى بالعلاقة $z(t) := x(t) - p(t)x(\tau(t))$، يقدم هذا البحث معايير تذبذب جديدة سنوضح أهميتها من خلال بعض الأمثلة.

كلمات مفتاحية: تذبذب، حد محايد، إيمدن _ فولر، فوق الخطية، مرتبة ثانية.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا.

** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (6) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (6) 2022

Oscillation criteria for second-order superlinear Emden–Fowler negative neutral differential equations

Dr. Nabil Ali *
Mariam kashour **

(Received 19/7/2022.Accepted 26/10/2022)

□**ABSTRACT** □

Our work is studying the oscillatory behavior of solutions to a class of second-order superlinear Emden–Fowler neutral differential equations that has this form

$(r(t)\, z'(t))' + q(t)\, |x(t)|^{\gamma-1}\, x(t) = 0$ where $z(t) := x(t) - p(t)x(\tau(t))$

This research will present new oscillation theorems and their efficiency is illustrated throw some examples.

Keywords: Oscillation, Neutral, Emden–Fowler, Superlinear, Second-order.

---

* Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University, Tartous, Syria.

*** Master Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University.

مقدمة

تلعب المعادلات التفاضلية دوراً هاماً في نمذجة كل عملية فيزيائية أو تقنية أو بيولوجية تقريبًا في حياتنا اليومية وفي تفسير بعض قوانين الظواهر الطبيعية والعمل على حل مشكلاتها، فهي تسهم بشكل أساسي في إيجاد حلول لبعض المسائل في مجلات العلوم المختلفة، وبشكل خاص تلك المعادلات ذات الحد المحايد والأخرى ذات الحد المتأخر، إذ تتميز هذه المعادلات عن المعادلات العادية بأنه قد نجد لنفس المعادلة التأخيرية حلول متذبذبة وأخرى غير متذبذبة، بدراسة السلوك اللانهائي لحلول المعادلات التفاضلية ذات الحد المحايد نتمكن من التنبؤ بنتائج تلك الظواهر الموصوفة التي تظهر بعد فترة زمنية وبالتالي إمكانية التحكم بها.

إننا مهتمون في هذا البحث بدراسة سلوك التذبذب لحلول معادلة Emden–Fowler وهي معادلة تفاضلية فوق خطية من المرتبة الثانية ذات الشكل:

$$(r(t)\,\acute{z}(t))\acute{} + q(t)\,|x(\sigma(t))|^{\gamma-1}\,x(\sigma(t)) = 0 \qquad (1.1)$$

حيث أن $t \in I := [t_0, \infty), t_0 \in R$، $z(t) := x(t) - p(t)x(\tau(t))$ ، $\gamma > 1$ عدد ثابت فردي، $r, p, q, \tau, \sigma \in C(I\,, R)$ ، $r(t) > 0$، $q(t) \geq 0$، $lim_{t\to\infty}\,\tau(t) = \infty$، $0 \leq p(t) \leq p_0 < 1$.

إن المعادلات التفاضلية فوق الخطية هي نوع من المعادلات الواقعة بين المعادلات الخطية واللاخطية حيث تحقق أنه من أجل كل $x(t)$ حل فإن $-x(t)$ حل أيضاً، كما أن مصطلح فوق الخطية يأتي من الشرط $\gamma > 1$ لأنه في حالة $\gamma = 1$ تصبح المعادلة (١.١) خطية [1].

أوجد الباحثان Saker و Manojlovi´c في [3] و Xu في [4] عدة معايير لسلوك تذبذب المعادلة (1.1) وذلك في حالة $0 \leq p(t) < 1$ وحالة $-1 < p_0 \leq p(t) \leq 0$

حصل الباحثان Baculíková و Džurina في [6] على العديد من نتائج التذبذب للمعادلة (1.1) حيث $\gamma \in [0,1]$ هي ناتج قسمة عددين فرديين، وبفرض الشروط الآتية:

$$0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$$
$$\acute{\tau}(t) \geq \tau_0 > 0$$
$$\lim_{t\to\infty} R(t\,, t_0) = \infty \;;\quad R(t\,, a) := \int_a^t \frac{1}{r(s)}\,ds$$

بعد ذلك وضع الباحثان T. Li و Y. Rogovchenko في [7] معايير مهمة من أجل تذبذب المعادلة السابقة في حالة $\gamma > 1$ و $z(t) := x(t) + p(t)x(\tau(t))$ وذلك في حالة $\tau(t) \geq t$ و $\sigma(t) \leq t$ وكذلك في حالة

$\sigma(t) \leq \tau(t) \leq t$.

وقد أثبتا أيضا أنه في حالة تحقق الشروط الآتية:

$$\acute{\tau}(t) \geq \tau_0 > 0 \quad \text{و} \quad \acute{\sigma}(t) > 0 \quad \text{و} \quad (\sigma^{-1}(t))' \geq \sigma_0 > 0$$

والشرط $\int^{\infty} R^{1-\gamma}(\sigma^{-1}(t)\,, t_1)\,Q_*(t)R^{\gamma}(\sigma(t)\,,\,T_1)\,dt = \infty$ فإن المعادلة (1.1) متذبذبة.

تعريف١:

نقول عن حل المعادلة (1.1) أنه متذبذب إذا كان يأخذ عدد النهائي من الأصفار على المجال $[t_x, \infty)$ وفيما عدا ذلك نقول أنه غير متذبذب. ونقول أن المعادلة (1.1) متذبذبة إذا كانت جميع حلولها متذبذبة [2].

أهمية البحث وأهدافه

في الآونة الأخيرة أبدى الباحثون قدر كبير من الاهتمام بالخصائص التذبذبية لحلول أنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية ذات الحد المحايد، وأحد الأسباب الرئيسية لهذا الاهتمام أن هذه المعادلات تدخل في العديد من مجالات العلوم الطبيعية والهندسات والفيزياء وتأتي أهمية هذا البحث لكونه يعطي دراسة تحليلية لسلوك حلول المعادلة (1.1) والتي هي معادلة تفاضلية فوق خطية من المرتبة الثانية ذات حد محايد، ولهذه الدراسة دور هام في معرفة سلوك الظواهر التي تصفها تلك المعادلة وبالتالي إمكانية التحكم بنتائج تلك الظواهر. يهدف البحث إلى دراسة السلوك اللانهائي لحلول معادلة إيمدن _ فولر التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب من حيث التذبذب.

طرائق البحث وموارده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية، وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد بشكل أساسي على طرائق الدراسة التحليلية للمعادلات التفاضلية العادية.

النتائج و المناقشة

سنعرض في البداية بعض التمهيديات التي سنستخدمها لإتمام المبرهنات الموجودة في هذا البحث.

١. تمهيديات مساعدة:

تمهيدية ١:

ليكن $x(t) > 0$ حل للمعادلة (١.١) عندئذ من أجل كل $t \geq T$ و $\int_T^{\infty} \frac{ds}{r(s)} = \infty$ فإنه يتحقق الآتي:

$$z(t) > 0 \text{ و } \acute{z}(t) > 0 \text{ و } (r(t)\,\acute{z}(t))\acute{} \leq 0$$

برهان:

ليكن $x(t) > 0$ حل للمعادلة (١.١) عندئذ أيا كان $t \geq T$ فإن

$$(r(t)\,\acute{z}(t))\acute{} = -q(t)\,x^{\gamma}(\sigma(t)) \leq 0$$

لنفرض أن $\acute{z}(t) \leq 0$، هنا نميز حالتين:

الحالة الأولى:

لنفرض $z(t) \geq 0$ ، وبما أن $[r(t)z'(t)]' \leq 0$ أياً كانت $t > T$، عندئذٍ يوجد $m < 0$، تحقق $r(t)\,z'(t) < m$، أياً كانت $t > T_1 > T$ ومنه $z'(t) < \frac{m}{r(t)}$، وبالمكاملة من T إلى t نجد أن

$z(t) < z(T_1) + \int_{T_1}^{t} \frac{m}{r(s)} ds$، وعندما تسعى t نحو $+\infty$ نجد أن $lim_{t\to+\infty} z(t) = -\infty$ وهذا تناقض.

أما الحالة الثانية:

لنفرض $z(t) < 0$ وبما أن $[r(t)z'(t)]' \leq 0$ أياً كانت $t > T$، فإنه يوجد $m > 0$ بحيث من أجل

$T_1 > T$ فإن $r(t)z'(t) < -m$ ، وبالمكاملة من T إلى t نجد $z(t) < z(T_1) - \int_{T_1}^{t} \frac{m}{r(s)} ds$ وعندما تسعى t نحو$+\infty$ نجد $\lim_{t\to+\infty} z(t) = -\infty$، ولكن لدينا $x(\tau(t)) = \frac{x(t)-z(t)}{p(t)} > \frac{-z(t)}{p(t)}$، ومنه نجد $\lim_{t\to+\infty} x(\tau(t)) = +\infty$، وبما أن $\lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty$، نجد أن $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

الآن وبملاحظة أن $z(t) < 0$ أي أن $x(t) < p(t)x(\tau(t)) < x(\tau(t))$، نشكل متتالية t_0, t_1, t_2 .... وبحيث أن $\tau(t_n) = t_{n-1}$ و $t_{n-1} < t_n$ و $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$، مع اعتبار $x(t_0) = k$ ، وبما أن

$x(t) < x(\tau(t))$ ومنه نجد أن $x(t_n) < x(\tau(t_n))$ أي $x(t_n) < x(t_{n-1})$ومنه فإن $x(t_n) <$ kأيا كانت n عدد طبيعي، وهذا يعني $\lim_{t\to+\infty} x(t) < k$ وهذا تناقض. ومن الحالتين السابقتين نجد أن$\acute{z}(t) > 0$.

لنفرض أن $z(t) < 0$ و$\acute{z}(t) > 0$ ، ومنه فإن $z \le l < 0$ ، الآن لدينا:

$$x(t) = p(t)x(\tau(t)) + z(t) \le p(t)x(\tau(t)) + l \le p_0 x(\tau(t)) + l$$

إن $x(t)$ محدود لأنه بفرض أن $x(t)$ غير محدود عندئذ يوجد متتالية t_n متزايدة إلى اللانهاية تجعل $x_n = x(t_n)$ أيضا تتزايد نحو اللانهاية، ولكن وبفرض أن $\tau(t_n) = t_{nk} \le t_n$ ومنه وباعتبار أن $x(t_n)$ متزايد نحو ∞ فإن $x_{nk} < x_n$، $x(t_n) \le p_0 x(\tau(t_n)) + l$ ،

وبالتالي $x_n \le p_0 x_{nk} + l \le p_0 x_n + l$ ومن أجل nk و n كبيرة كفاية نجد أن $x_n < \frac{l}{1-p_0}$ وهذا تناقض ومنه فإن $x(t)$ محدود.

لنفرض أن $x < m$ وأن $\sup_{t_0<t} x = m$ وبالتالي $z(t) = x(t) - p(t)x(\tau(t)) \ge x(t) - p_0 x(\tau(t))$

أي أن $x(\tau(t)) \ge \frac{1}{p_0}(x(t) - z(t)) \ge \frac{1}{p_0} x(t)$ وبأخذ sup الطرفين $sup\, x(\tau(t)) \ge sup \frac{1}{p_0} x(t)$

ومنه $m \ge \frac{1}{p_0} m$ لكن $0 < p_0 < 1$ وهذا ينتج أن $m = 0$ أي $x(t) < 0$ وهذا تناقض، وبالتالي يتم البرهان. ☐

تمهيدية ٢:

بفرض أن $\gamma \ge 1$ و $A \ge 0 , B \ge 0$ عندئذ فإن $(A-B)^\gamma \le 2^{\gamma-1}(A^\gamma + B^\gamma)$.

برهان :

نفرض أن $0 < A < B$ ، ولنأخذ التابع $g(u) = u^\gamma$ ، نلاحظ أن $g''(u) > 0$ لكل $u > 0$ ، ومنه

فإن التابع $g(u)$ محدب على $]0,+\infty[$ وبالتالي فإن $g\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \frac{g(A)+g(B)}{2}$ وهذا يحقق $(A+B)^\gamma \le 2^{\gamma-1}(A^\gamma + B^\gamma)$ ، ولكن $(A-B)^\gamma \le (A+B)^\gamma$ حيث A و B موجبان،

ومنه $(A-B)^\gamma \le (A+B)^\gamma \le 2^{\gamma-1}(A^\gamma + B^\gamma)$. ☐

تمهيدية ٣:

بفرض أن الشروط $(r(t)\,\acute{z}(t))' \le 0$ و $\acute{z}(t) > 0$ و $z(t) > 0$ محققة لكل $t > T_1 > T$ عندئذ التابع $\frac{z(t)}{R(t\,,T_1)}$ متناقص تماما" من أجل t كبيرة.

برهان:

بما أن $z(t) > 0$ و $(r(t)\,\acute{z}(t))' \le 0$ فإن

$$z(t) = z(T_1) + \int_{T_1}^{t} \frac{r(s)\acute{z}(s)}{r(s)} ds \ \ge\ r(t)\,\acute{z}(t) \int_{T_1}^{t} \frac{1}{r(s)} ds = r(t)\,\acute{z}(t)\ R(t, T_1)$$

$$\left(\frac{z(t)}{R(t, T_1)}\right)' = \frac{1}{R^2(t, T_1)}\left[R(t, T_1)\,\acute{z}(t) - \frac{z(t)}{r(t)}\right]$$

$$= \frac{1}{r(t)\,R^2(t, T_1)}\left[R(t, T_1)\,\acute{z}(t)\,r(t) - z(t)\right] \le 0$$

ومنه فإن التابع $\frac{z(t)}{R(t, T_1)}$ متناقص تماما" من أجل t كبيرة. □

تمهيدية ٤:

لتكن $\gamma > 1$ و $z^\gamma(\sigma(t)) > 0$ و $Q(t) = min\{q(t), q(\tau(t))\}$ وبفرض

(1.2) $$0 \le p(t) \le p_0 < 1$$

(1.3) $$\acute{\tau}(t) \ge \tau_0 > 0 \quad ، \quad lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$$

عندئذ فإن

(1.4) $$\left[r(t)\,\acute{z}(t) + \frac{p_0^\gamma}{\tau_0} r(\tau(t))\,\acute{z}(\tau(t))\right]' + 2^{1-\gamma} Q(t)\, z^\gamma(\sigma(t)) \le 0$$

برهان:

ليكن $x(t) > 0$ حل للمعادلة (١.١) عندئذ فإن $z(t) = x(t) - p(t)x(\tau(t))$ تحقق المعادلة

(1.5) $$(r(t)\,\acute{z}(t))' + q(t)\,x^\gamma(\sigma(t)) = 0$$

وبتحقق (1.2) و (1.3) ينتج لدينا أن

$$p_0^\gamma\ \frac{d\left[r(\tau(t))\ \frac{dz(\tau(t))}{d\tau}\right]}{dt}\ \frac{dt}{d\tau} + p_0^\gamma\ q(\tau(t))\ x^\gamma(\sigma(\tau(t))) = 0$$

أي أن

$$\frac{p_0^\gamma}{\acute{\tau}(t)}\ \left[r(\tau(t))\ \acute{z}(\tau(t))\right]' + p_0^\gamma\ q(\tau(t))\ x^\gamma(\sigma(\tau(t))) = 0$$

ومنه

(1.6) $$\frac{p_0^\gamma}{\tau_0}\ \left[r(\tau(t))\ \acute{z}(\tau(t))\right]' + p_0^\gamma\ q(\tau(t))\ x^\gamma(\sigma(\tau(t))) \le 0$$

بجمع (1.5) و (1.6) نجد أن:

$$(r(t)\,\acute{z}(t))' + \frac{p_0^\gamma}{\tau_0}\left[r(\tau(t))\ \acute{z}(\tau(t))\right]' + \mathrm{Q}(t)\left[\left(x^\gamma(\sigma(t)) + p_0^\gamma\ x^\gamma(\sigma(\tau(t)))\right)\right] \le 0$$

باستخدام التمهيدية ٢ نجد أن:

$$z^\gamma(\sigma(t)) = \left[x(\sigma(t)) - p(\sigma(t))\ x\left(\sigma(\tau(t))\right)\right]^\gamma$$
$$\le 2^{\gamma-1}\left[x^\gamma(\sigma(t)) + p^\gamma(\sigma(t))\ x^\gamma(\sigma(\tau(t)))\right]$$
$$\le 2^{\gamma-1}\left[x^\gamma(\sigma(t)) + p_0^\gamma\ x^\gamma(\sigma(\tau(t)))\right]$$

أي أن:
$$\left[x^\gamma(\sigma(t)) + p_0^\gamma\ x^\gamma(\sigma(\tau(t)))\right] \ge 2^{1-\gamma}\, z^\gamma(\sigma(t))$$

ومنه $$[r(t)\,\acute{z}(t)+\frac{p_0^{\gamma}}{\tau_0}r\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{z}\big(\tau\,(t)\big)\acute{]}+2^{1-\gamma}Q(t)\,z^{\gamma}\big(\sigma(t)\big)\ \le 0 \qquad \square$$

٢. النتائج:

مبرهنة ١:

بفرض أن $\gamma\ \ge\ 1$ والشروط التالية محققة بالإضافة إلى الشرط (1.2)

$$lim_{t\to\infty} R(t\,,t_0)=\ \infty\ ;\quad R(t\,,a):=\int_a^t\frac{1}{r(s)}ds \tag{2.1}$$

$$\sigma(t)\le \mathrm{\tau(t)}\le \mathrm{t} \tag{2.2}$$

$$\int^{\infty} R^{1-\gamma}(\tau\,(t)\,,t_1)\,Q(t)R^{\gamma}(\sigma(t)\,,\,T_1)\,dt\ =\infty \tag{2.3}$$

من أجل $t_1\ge t_0$، عندئذ المعادلة (1.1) متذبذبة.

برهان:

بفرض أن $x(t)>0$ حلاً" غير متذبذب للمعادلة (1.1)، عندئذ من أجل كل t_1 بحيث أن $t\ge t_1\ge t_0$

نعرف تابع جديد $w(t)$ بالعلاقة الآتية:

(2.4)

$$w(t):=\ R(\,\tau(t)\,,t_1)\,[r(t)\,\acute{z}(t)+\frac{p_0^{\gamma}}{\tau_0}r\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{z}\big(\tau\,(t)\big)]\,z^{-\gamma}(\,\tau(t))$$

بالاشتقاق نحصل على الآتي:

$$\acute{w}(t)=\ \frac{\acute{\tau}(t)}{r(\tau\,(t))}\,[\,r(t)\,\acute{z}(t)+\frac{p_0^{\gamma}}{\tau_0}r\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{z}\big(\tau\,(t)\big)\,]\,z^{-\gamma}(\,\tau(t))$$
$$+\,R(\tau\,(t)\,,t_1)\,[\,r(t)\,\acute{z}(t)+\frac{p_0^{\gamma}}{\tau_0}r\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{z}\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{]}\,z^{-\gamma}\big(\tau\,(t)\big)$$
$$+R(\tau\,(t)\,,t_1)\,\left[r(t)\,\acute{z}(t)+\frac{p_0^{\gamma}}{\tau_0}r\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{z}\big(\tau\,(t)\big)\right]\,[\,z^{-\gamma}(\tau\,(t))\acute{]} \tag{2.5}$$

لدينا $[r(t)z'(t)]'\le 0$ أي أن $r(t)z'(t)$ تابع متناقص تماما"، وبما أن $\mathrm{\tau(t)}\le \mathrm{t}$ فإن:

$$r\big(\tau\,(t)\big)z'\big(\tau\,(t)\big)\ge r(t)z'(t)$$

وبتحقق (1.4) حيث $z(t)>0$ ، أي أن $z^{-\gamma}(\tau(t))>0$ ، وبملاحظة أن:

$$(\,z^{-\gamma}\big(\tau\,(t)\big)\acute{)}=\ -\gamma\,z^{-\gamma-1}\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{z}\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{\tau}(t)\ <0$$

نجد أن

$$\acute{w}(t)\le\ \frac{\acute{\tau}(t)}{r(\tau\,(t))}\left(r\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{z}\big(\tau\,(t)\big)+\frac{p_0^{\gamma}}{\tau_0}\,r\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{z}\big(\tau\,(t)\big)\right)z^{-\gamma}\big(\tau\,(t)\big)$$
$$-\ 2^{1-\gamma}R(\tau\,(t)\,,t_1)\,Q(t)\,\frac{z^{\gamma}\big(\sigma(t)\big)}{z^{\gamma}(\tau(t))}$$

$$\acute{w}(t)\le\ \left(1+\frac{p_0^{\gamma}}{\tau_0}\right)\,\acute{z}\big(\tau\,(t)\big)z^{-\gamma}\big(\tau\,(t)\big)\,\acute{\tau}(t)\ -\ 2^{1-\gamma}R(\tau\,(t)\,,t_1)\,Q(t)\,\frac{z^{\gamma}\big(\sigma(t)\big)}{z^{\gamma}(\tau(t))}$$
$$=\left(1+\frac{p_0^{\gamma}}{\tau_0}\right)\frac{\left(z^{1-\gamma}\big(\tau\,(t)\big)\right)'}{1-\gamma}\ -\ 2^{1-\gamma}R(\tau\,(t)\,,t_1)\,Q(t)\,\left(\frac{z\big(\sigma(t)\big)}{z(\tau(t))}\right)^{\gamma} \tag{2.6}$$

الآن بما أن $\sigma(t)\le\mathrm{\tau(t)}$ وبما أن التابع $\frac{z(t)}{R(t\,,t_1)}$ متناقص تماما" حسب التمهيدية ٣ ينتج لدينا أن

$$\frac{z(\tau(t))}{R(\tau(t)\,,t_1)}\le\frac{z\big(\sigma(t)\big)}{R(\sigma(t)\,,t_1)}$$

$$\frac{R(\sigma(t),t_1)}{R(\tau(t),t_1)} \le \frac{z(\sigma(t))}{z(\tau(t))}$$

$$\acute{w}(t) \le \left(1+\frac{p_0^\gamma}{\tau_0}\right)\frac{\left(z^{1-\gamma}(\tau(t))\right)'}{1-\gamma} - 2^{1-\gamma}R(\tau(t),t_1)\,Q(t)\left(\frac{R(\sigma(t),t_1)}{R(\tau(t),t_1)}\right)^\gamma$$

$$\acute{w}(t) \le \left(1+\frac{p_0^\gamma}{\tau_0}\right)\frac{\left(z^{1-\gamma}(\tau(t))\right)'}{1-\gamma} - 2^{1-\gamma}R^{1-\gamma}(\tau(t),t_1)\,Q(t)\left(R(\sigma(t),t_1)\right)^\gamma$$

ومنه:

$$2^{1-\gamma}R^{1-\gamma}(\tau(t),t_1)\,Q(t)\,R^\gamma(\sigma(t),t_1) \le \left[\left(\frac{\tau_0+p_0^\gamma}{\tau_0\,(1-\gamma)}\right) z^{1-\gamma}(\tau(t)) - w(t)\right]'$$

لتكن $t_2 \ge t_1$ ، الآن و بمكاملة المتراجحة الأخيرة من t_2 من t نجد أن

$$2^{1-\gamma}\int_{t_2}^{t} R^{1-\gamma}(\tau(s),t_1)\,R^\gamma(\sigma(s),t_1)\,Q(s)\,ds$$

$$\le \frac{\tau_0+p_0^\gamma}{\tau_0\,(1-\gamma)}\left[z^{1-\gamma}(\tau(t)) - z^{1-\gamma}(\tau(t_2))\right] + w(t_2) - w(t)$$

$$\le \frac{\tau_0+p_0^\gamma}{\tau_0\,(\gamma-1)}\, z^{1-\gamma}(\tau(t_2)) + w(t_2)$$

وعندما $t \to \infty$ نحصل على تناقض بالشرط (2.3) وبالتالي تم الإثبات. □

مبرهنة ٢:

بفرض أن $\gamma \ge 1$ والشرطين (2.1) و(1.2) محققين بالإضافة إلى الشرطين التاليين:

$$\tau(t) \le t \quad ، \quad \tau(t) \le \sigma(t) \qquad (2.7)$$

$$\int^{\infty} R(\tau(t),t_1)\,Q(t)\,dt = \infty \qquad (2.8)$$

من أجل $t_1 \ge t_0$، عندئذ المعادلة (1.1) متذبذبة.

برهان:

بفرض أن $x(t) > 0$ حل غير متذبذب للمعادلة (1.1)، عندئذ من أجل كل t_1 بحيث أن $t \ge t_1 \ge t_0$ نتبع نفس خطوات المبرهنة السابقة حتى نصل إلى العلاقة (2.6)

$$\acute{w}(t) \le \left(1+\frac{p_0^\gamma}{\tau_0}\right)\frac{\left(z^{1-\gamma}(\tau(t))\right)'}{1-\gamma} - 2^{1-\gamma}R(\tau(t),t_1)\,Q(t)\left(\frac{z(\sigma(t))}{z(\tau(t))}\right)^\gamma$$

الآن بما أن $\tau(t) \le \sigma(t)$ وبما أن $\acute{z}(t) > 0$ أي أن التابع $z(t)$ متزايد ومنه ينتج لدينا أن

$$z(\tau(t)) \le z(\sigma(t))$$

$$1 \le \frac{z(\sigma(t))}{z(\tau(t))}$$

$$\acute{w}(t) \le \left(1+\frac{p_0^\gamma}{\tau_0}\right)\frac{\left(z^{1-\gamma}(\tau(t))\right)'}{1-\gamma} - 2^{1-\gamma}R(\tau(t),t_1)\,Q(t)\,(1)^\gamma$$

$$\acute{w}(t) \le \left(1+\frac{p_0^\gamma}{\tau_0}\right)\frac{\left(z^{1-\gamma}(\tau(t))\right)'}{1-\gamma} - 2^{1-\gamma}R(\tau(t),t_1)\,Q(t)$$

ومنه:

$$2^{1-\gamma}R(\tau\,(t)\,,t_1)\;Q(t) \le \left[\left(\frac{\tau_0+p_0^{\gamma}}{\tau_0\,(1-\gamma)}\right)\;z^{1-\gamma}\big(\tau\,(t)\big)-w(t)\right]'$$

لتكن $t_2 \ge t_1$ ، الآن و بمكاملة المتراجحة الأخيرة من t_2 من t نجد أن

$$2^{1-\gamma}\int_{t_2}^{t} R(\tau\,(s)\,,t_1)\;Q(s)\,ds$$

$$\le \frac{\tau_0+p_0^{\gamma}}{\tau_0\,(1-\gamma)}\;\big[z^{1-\gamma}\big(\tau(t)\big)-z^{1-\gamma}\big(\tau(t_2)\big)\big]+\;w(t_2)-w(t)$$

$$\le \frac{\tau_0+p_0^{\gamma}}{\tau_0\,(\gamma-1)}\;z^{1-\gamma}\big(\tau\,(t_2)\big)+w(t_2)$$

وعندما $t \to \infty$ نحصل على تناقض بالشرط (2.8) وبالتالي تم الإثبات . □

٣. أمثلة

توضح الأمثلة الآتية أهمية النتائج النظرية التي حصلنا عليها.

مثال١:

لتكن لدينا المعادلة الآتية:

$$\left[x(t)-p(t)x\left(\frac{t}{2}\right)\right]''+q_0\,|x(t)|^{\gamma-1}\,x(t)=0 \qquad (3.1)$$

حيث $t \ge 1$ ، $0 \le p(t) \le p_0 < 1$ ، $\gamma > 1$ ، $q_0 > 0$ و $r(t) \equiv 1$، $\tau(t) = \frac{t}{2}$، $\sigma(t) = t$،

ومنه نلاحظ أن: $\tau(t) \le t$ و $\tau(t) \le \sigma(t)$ وأن $R(t\,,a) := \int_a^t \frac{1}{r(s)}ds$ و $lim_{t\to\infty} R(t\,,a) = \infty$.

وبالتالي فإن $\int^{\infty} R(\tau\,(t)\,,t_1)\;Q(t)\;dt\; = \infty$

عندئذ فإن معادلة إيمدن _ فولر التفاضلية (3.1)متذبذبة حسب المبرهنة ٢.

مثال٢:

لتكن لدينا المعادلة الآتية:

$$\left[\frac{1}{t}\,\big((x(t)-p(t)x(t-1))'\big)'\right]'+q_0\,|x(t-2)|^{\gamma-1}\,x(t-2)=0 \qquad (3.2)$$

حيث $t \ge 1$ ، $0 \le p(t) \le p_0 < 1$ ، $\gamma > 1$ ، $q_0 > 0$ و $r(t) = \frac{1}{t}$، $\tau(t) = t-1$،

$\sigma(t) = t-2$، ومنه نلاحظ أن: $\sigma(t) \le \tau(t) \le t$ وأن $R(t\,,a) := \int_a^t \frac{1}{r(s)}ds$ ،

$lim_{t\to\infty} R(t\,,a) = \infty$. وبالتالي فإن$\int^{\infty} R^{1-\gamma}(\tau\,(t)\,,t_1)\;Q(t)R^{\gamma}(\sigma(t)\;,\;T_1)\;dt\; = \infty$.

عندئذ فإن معادلة إيمدن _ فولر التفاضلية (3.2)متذبذبة حسب المبرهنة 1.

الاستنتاجات والتوصيات:

درسنا في هذا البحث تذبذب معادلة إيمدن _ فولر التفاضلية فوق الخطية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب وتوصلنا إلى معايير تكشف تذبذب هذه المعادلة، ثم قدمنا مثالين يدعمان صحة النتائج التي حصلنا عليها. وبالتالي نكون قد مددنا بعض النتائج التي تطبق على المعادلة ذات الحد المحايد الموجب وبرهنا في صحتها في حال تطبيقها على الحد المحايد السالب. ونوصي بمتابعة الدراسات للحصول على معايير تذبذب أخرى جديدة لهذه المعادلة ودراستها في حالة $\tau(t) > t$.

المراجع

[1] Xu, Z: *On the oscillation of second order neutral differential equations of* Emden–Fowler type. Monatsh. Math. 150, 157–171, (2007).

[2] Z, Xu: *Oscillation theorems related to averaging technique for second order Emden-Fowler type neutral differential equations*. The Rocky Mountain Journal of Mathematics. 649–667, (2008).

[3] Saker, Samir and Manojlović*: Oscillation criteria for second order superlinear neutral delay differential equations*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.1417-3875, (2004).

[4] Xu, Z*. On the Oscillation of Second Order Neutral Differential Equations of Emden-Fowler Type*. Mh Math 150, 157–171 (2007).

[5] Baculíková, B, Li, T. Džurina, J*: Oscillation theorems for second-order superlinear neutral differential equations.* Math. Slovaca **63**. 123–134, (2013).

[6] Li, T., Rogovchenko, Y.V: *Oscillation criteria for second-order superlinear* Emden–Fowler neutral differential equations. Monatsh Math 184, 489–500, (2017).