مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (1) 2023
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (1) 2023

دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم

د. محمد معلا *

لبانه سليمان **

(تاريخ الإيداع 26/ 9/ 2022 – تاريخ النشر 24/ 4/ 2023)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث الى دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم، وتذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم والمحايد، وكذلك المعادلة مع إضافة حد أعظمي. توصلنا إلى نتائج بالاعتماد على المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية وتحويل ريكاتي.

كلمات مفتاحية: نصف خطية – التذبذب – الحد المتقدم –الحد المحايد – الحد الأعظمي.

*دكتور – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.

** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (1) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (1) 2023

Study Of The Oscillation Of Generalized Half –Linear Differential Equation Second-Order With Advanced Term

Dr. Mohammad Moalla*
Lubana Suleiman**

(Received 26/9/2022.Accepted 24/4/2023)

□ABSTRACT □

This research aims to study the fluctuation of the generalized half-linear differential equation from the second order with the advanced term, and the fluctuation of the generalized half--linear differential equation from the second order with the advanced and neutral term, as well as the fair with the addition of Maxima. We obtained results based on the generalized half-linear second-order differential equation and the Riccati transform.

Keywords: half-linear – Oscillation - advanced term - neutral term – Maxima.

*Doctor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University , Tartous , Syria.
** Postgraduate Student (Master), Department of Mathematics , Faculty of Science , Tartous University , Tartous , Syria.

مقدمة

ظهر مفهوم المعادلة التفاضلية منذ طُرِحَ مفهوم التفاضل وبدأ على نحو أقوى مع بداية القرن السادس عشر وتطورت موضوعات المعادلات التفاضلية بسرعة فائقة، وذلك لكثرة تطبيقاتها وارتباطها المباشر بعدد من فروع العلوم.

ولاتزال المعادلات التفاضلية منذ زمن طويل تحتل مكانه مرموقة في كل العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية؛ حيث أغلب العلاقات والقوانين التي تصف مسألة فيزيائية أو هندسية تظهر بصورة معادلة تفاضلية، ولفهم هذه المسألة، لابد من حل هذه المعادلة التفاضلية أو على الأقل معرفة خصائص هذا الحل، وأهم هذه الخصائص، السلوك التذبذبي لحلول هذه المعادلة، إذ أن دراسة السلوك التذبذبي قد عولجت منذ أكثر من مئة وخمسين عاماً، ويعد شتورم (Sturm) أول من وضع حجر الأساس لذلك الفرع من علوم الرياضيات، فمع مرور الزمن حصلت تطورات واسعة في هذا الموضوع، وتوسعت الدراسات لتشمل أنواعاً مختلفة من المعادلات منها المعادلات التفاضلية نصف الخطية حيث حظيت في السنوات الأخيرة باهتمامٍ بالغٍ من قبل الكثيرين.

إن النظرية النوعية للمعادلات التفاضلية نصف الخطية عميقة، تم تطويرها خلال العقود الماضية ومازالت أبحاثها مستمرة، حيث أن المعادلات التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية، تعميم للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية.

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية بالشكل [4]:

$$\left(r(t)x'(t)\right)' + c(t)\, f\left(x(t), r(t)x'(t)\right) = 0 \qquad \dots(1)$$

حيث c و f توابع مستمره، و f يعطى بالعلاقة:

$$f(x,y) = \left|x|^{p-1}|y|^{2-p} sgn(x)\right) \; ;$$ حقيقي عدد $p \geq 1$

ويحقق الفرضيات الآتية:

١- f تابع مستمر على المنطقة $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

٢- $xf(x,y) > 0$ إذا كان $xy \neq 0$

٣- f تابع متجانس أي $\forall\lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$

٤- نظامية التابع تضمن وجود ووحدانية الحل للمعادلة (1)، بالتالي من أجل أي نقطة $(x_0, x_1) \in \Omega$ فإنه يوجد حل $x(t)$ للمعادلة يحقق الشرطين:

$$x(t_0) = x_0 \quad x'(t_1) = x_1 \quad ,$$

٥- ليكن التابع $F(t) := tf(t,1)$ عندئذٍ يتحقق أن $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+F(t)} < +\infty \; and \; lim_{|t|\to+\infty} F(t) = +\infty.$

يعد بيهاري (Bihari) أول من وضع المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية في عام (١٩٦٦-١٩٦٧)، إذ إن فضاء الحلول لها نصف خطي لأنه يحقق نصف شروط الفضاء الخطي[1].

نقول عن حل المعادلة $x(t)$ أنه متذبذب (Oscillation) إذا كان يحتوي على عدد لانهائي من الأصفار على مجال ما، وغير متذبذب (Non-oscillation) إذا كان يحتوي عدد منتهي من الاصفار على هذا مجال، أما المعادلة (1) فنقول أنها متذبذبة إذا كانت كل حلولها متذبذبة، وغير متذبذبة إذا وجد حل واحد على الأقل غير متذبذب[2].

درس الباحث Elbert وآخرون في عام ١٩٩٧ تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة [3]، بعد ذلك وضع الباحثان Bognár وDošlý في عام ٢٠١٣ معايير مهمة من أجل تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية [4]، ثم عمل الباحثان Marík و Fišnarová في عام ٢٠١٣على إيجاد معيار لتذبذب المعادلات التفاضلية ذات الحد المتأخر، وذلك من خلال دراسة تذبذب المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية [6].

كما درس الباحثان Fišnarová و Marík في عام ٢٠١٤ تذبذب المعادلات التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، ووضعا معايير لتذبذب هذه المعادلات ذات الحد المحايد من خلال تذبذب المعادلات الكلاسيكية [5] ، واهتم الباحث Selvarangam وآخرون في عام ٢٠١٧ بدراسة المعادلات التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد والأعظمي، حيث تم وضع عدة معايير لمعالجة مسألة تذبذب حلول ذلك النوع من المعادلات[7] .

في عام ٢٠١٩ درس الباحث Mohammad Moalla وآخرون تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، مع $p \geq ٢$ و توصلوا إلى معايير تحدد فيما إذا كانت هذه المعادلة متذبذبة أم لا [8]، ثم درسوا تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد والأعظمي، وقدموا معايير تساعد في تحديد فيما إذا كانت هذه المعادلة متذبذبة [9]، كما قدموا في عام ٢٠٢٠ دراسة لتذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتأخر [10].

نلاحظ أن جميع الدراسات السابقة ركزت على دراسة المعادلات التفاضلية نصف الخطية ذات الحد المتأخر لكن القليل من الدراسات قد بحثت في المعادلات ذات الحد المتقدم بالرغم من وجود تطبيقات مهمة لهذه المعادلات في هندسة التحكم الميكانيكي وديناميكيات السكان والمشاكل الاقتصادية، لذلك قمنا في بحثنا بدراسة هذا النوع من المعادلات.

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم بالشكل:

$$\left(r(t)x'(t)\right)' + c(t)\, f\left(x(\tau(t)), r(t)x'(t)\right) = 0 \quad \dots (٢)$$

حيث أن f معرف كما في المعادلة (1) و $r(t)$ و$c(t)$ تابعان موجبان تماما، و $\tau(t)$ يحقق الشروط :

$1)\tau(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$2)\lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty$

$3)\tau(t) > t > 0\,, \tau'(t) > 0$

أهمية البحث وأهدفه

تكمن أهمية هذا البحث فيما يقدمه من دراسة لسوك المعادلات التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم والمحايد. وبالتالي معرفة سلوك هذه المعادلة التفاضلية التي تصف ظاهرة معينة وبالتالي معرفة سلوك هذه الظاهرة وفهمها ومعرفة نتائجها للتحكم بها والاستفادة القصوى منها.

طرائق البحث وموارده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية لذلك فإن التقنيات المستخدمة تعتمد بشكل أساسي على طرائق الدراسة التحليلية للمعادلة التفاضلية.

النتائج والمناقشة

سنقدم أولاً بعض التمهيديات التي سوف نستخدمها لإثبات صحة المبرهنات الموجودة في هذا البحث.

١- تحويل ريكاتي:

إن دراسة تذبذب المعادلات التفاضلية المعممة باستخدام تحويل ريكاتي هي طريقة فعالة، إذ تتحول المعادلة من المرتبة الثانية إلى المرتبة الأولى. يعطى تحويل ريكاتي للمعادلة (1) من أجل $x(\mathrm{t})$ حل للمعادلة بالشكل الآتي:[4]

$$v'(t)+c(t)+\frac{H(v)}{r(t)}=0\ \dots\quad(3)$$

حيث $H(v)$ معرف بالعلاقة: $H(v)=(g^{-1}(v))^2g'(g^{-1}(v))$، وهو متزايد تماماً من أجل $u>0$، ومتناقص تماماً من أجل $u<0$، ويحقق $H(0)=0$، وهو تابع محدب تماماً، حيث $u(t)=\frac{r(t)x'(t)}{x(t)}$، كما يعطى التابع g بالعلاقة الآتية:

$$g(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{1}{u}}^{+\infty}\frac{ds}{F(s)} & if\quad u>0\\ \displaystyle-\int_{-\infty}^{\frac{1}{u}}\frac{ds}{F(s)} & if\quad u<0\\ 0 & if\quad u=0\end{cases}\qquad\dots(4)$$

حيث g متزايد تماماً، و $\lim_{u\to+\infty}g(u)=+\infty$، كما أن $\lim_{u\to-\infty}g(u)=-\infty$.

موضوعة ١: [10]

القضايا الآتية متكافئة:

١) المعادلة (1) غير متذبذبة .

٢) يوجد $v(t)$ حل محدود للمعادلة (3) على المجال $[T,+\infty[$.

٣) يوجد تابع $v(t)$ محدود على المجال $[T,+\infty[$ ويحقق $v'(t)+c(t)+\frac{H(v)}{r(t)}\le 0$.

٢- تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم

سنوضح الآن تحويل ريكاتي للمعادلة (2) من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية ١:

يعطى تحويل ريكاتي للمعادلة (2) بالشكل الآتي:

$$v'(t)+c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)}\right)^{p-1}+\frac{H(v)}{r(t)}=0\quad\dots(5)$$

البرهان:

ليكن $x(\mathrm{t})$ حل للمعادلة (2) حيث $\tau(t)>t$ ولنفرض أن $u(t)=\frac{r(t)x'(t)}{x(t)}$ و $v(t)=g\big(u(t)\big)$

باشتقاق التابع $v(t)$ نجد أن:

$$v'(t) = g'(u)\, u'(t) = \ g'(u) \left[\frac{r(t)x'(t)}{x(t)}\right]'$$

$$= g'(u)\frac{(r(t)x'(t))'}{x(t)} - g'(u)\frac{r(t)(x'(t))^2}{x^2(t)}$$

$$= -g'(u)c(t)\frac{\left|x\big(\tau(t)\big)\right|^{p-1}|r(t)x'(t)|^{2-p}}{x(t)} - g'(u)\frac{r(t)(x'(t))^2}{x^2(t)}$$

$$= -g'(u)c(t)u(t)\left(\frac{x\big(\tau(t)\big)}{x(t)}\right)^{p-1} f\left(\frac{1}{u},1\right) - g'(u)\frac{u^2(t)}{r(t)}$$

نختار التابع $g(u)$ بحيث $g'(u)u(t)f\left(\frac{1}{u},1\right) = 1$ و $H(v) = g'(u)u^2(t)$ فتصبح المعادلة بالشكل:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

يصبح $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى بالعلاقة (4)، حيث يعطى التابع H بالعلاقة $H(v) = g'(u)u^2(t)$.

إن التابعين g, H يتمتعان بالخواص المذكورة بالفقرة السابقة.

تمهيدية ٢:

لنأخذ المعادلة (2) في حالة $r(t) \equiv 1$ بفرض $x(t)$ حل لهذه المعادلة يحقق $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$، عندئذٍ $x'(t) > 0$ و $x''(t) \le 0$.

البرهان:

في حالة $r(t) \equiv 1$ تصبح المعادلة (2) بالشكل:

$$x''(t) + c(t)\, f\big(x(\tau(t)), x'(t)\big) = 0$$

لنأخذ $x(t)$ حل لهذه المعادلة يحقق $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$ وبالتالي

$$x''(t) = -c(t)\, f\big(x(\tau(t)), x'(t)\big) < 0$$

ومنه $x''(t) \le 0$، بالتالي التابع $x'(t)$ متناقص على المجال $]T, +\infty[$. الآن لنثبت أن $x'(t) > 0$.

نفرض أن $x'(t) \le 0$ وذلك أياً كانت $t > T$، وبسبب تناقص $(x'(t))$، فإنه يوجد $T_1 \in \mathbb{R}$ حيث يتحقق $x'(t) < -m < 0$ وذلك أياً كانت $t \ge T_1 > T$ و m عدد حقيقي موجب تماماً، وبالمكاملة على المجال $[T_1, t[$ نجد $x(t) < x(T_1) - m(t - T_1)$، وعندما t تسعى إلى $+\infty$ نجد أن $x(t) < 0$ وهذا تناقض، ومنه الفرض خاطئ بالتالي $x'(t) > 0$ وذلك أياً كانت $t > T$.

التمهيدية ٣:

لنأخذ المعادلة (2) في حالة $r(t) \equiv 1$، إذا كان $x(t) \in C^2[t, \infty[$ ويحقق $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$، عندئذٍ فإن $\frac{x(\tau(t))}{x(t)} > 1$.

البرهان:

بما أن $x(t)$ حل للمعادلة (2) في حالة $r(t) \equiv 1$ يحقق $x(t) > 0$، فإنه بحسب التمهيدية ٢ يصبح لدينا العلاقة $x'(t) > 0$ و $x"(t) \leq 0$، وبما أن $x'(t) > 0$ فإن التابع $x(t)$ تابع متزايد تماماً، وبالتالي من أجل المتراجحة $\tau(t) > t$، فإن $x(\tau(t)) > x(t)$، ومنه $\frac{x(\tau(t))}{x(t)} > 1$.

مبرهنة ١:

ليكن لدينا المعادلة الآتية:

$$x"(t) + c(t)\, f\big(x(t), x'(t)\big) = 0 \quad \dots (6)$$

إذا كانت المعادلة (6)متذبذبة فإن المعادلة (2) متذبذبة في حالة $r(t) \equiv 1$.

البرهان:

نفرض أن المعادلة (6) متذبذبة و المعادلة (2) غير متذبذبة، بالتالي يوجد $x(t) \neq 0$ حل للمعادلة (2) أياً كانت $t > T$، وبالتالي بالاستفادة من التمهيدية ١ فإنه يوجد $v(t)$ تابع معرف محدود من أجل$t > T$ ويحقق أن $v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)}\right)^{p-1} + H(v) = 0$، وبحسب التمهيدية 2 لدينا $\frac{x(\tau(t))}{x(t)} > 1$ ، فإننا نحصل على المتراجحة الآتية:

$$v'(t) + c(t) + H(v) < v'(t) + c(t)\left(\frac{x\big(\tau(t)\big)}{x(t)}\right)^{p-1} + H(v) = 0$$

ومنه $v'(t) + c(t) + H(v) \leq 0$، وبالتالي حسب الموضوعة 1 نجد أن المعادلة (6) غير متذبذبة، وهذا تناقض مع الفرض، وبالتالي المعادلة (2) متذبذبة.

التمهيدية 4:

إذا وجد $x(t)$ حل للمعادلة (2) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$، عندئذٍ $\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$ فإن $x'(t) > 0$، إضافة إلى ذلك $r'(t) \geq 0$ فإن $x''(t) \leq 0$.

البرهان:

بفرض $x(t)$ حل للمعادلة (2) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$، عندئذٍ نجد

$$\big(r(t)x'(t)\big)' = -c(t)\, f\big(x(\tau(t)), r(t)x'(t)\big) < 0$$

وبالتالي $[r(t)x'(t)]$ متناقص على المجال$]T, +\infty[$. لنثبت الآن أن $x'(t) > 0$، نفرض أن $x'(t) \leq 0$ وذلك أياً كانت $t > T$، وبسبب تناقص $\big(r(t)x'(t)\big)$ فإنه يوجد $T_1 \in \mathbb{R}$ حيث $x'(t) < \frac{-m}{r(t)} < 0$ وذلك أياً كانت $t \geq T_1 > T$ و m عدد حقيقي موجب تماماً، وبالمكاملة على المجال $[T_1, t[$ نجد الآتي:

$$x(t) < x(T_1) - m\int_{T_1}^{t} \frac{dt}{r(t)}$$

وعندما t تسعى إلى $+\infty$ نجد أن $x(t) < 0$، وهذا تناقض مع كون $x(t) > 0$، ومنه الفرض خاطئ، وبالتالي $x'(t) > 0$ وذلك أياً كانت $t > T$، وبما أن$[r(t)x'(t)]$ متناقص تماما فإن$[r(t)x'(t)]' < 0$، ومنه $r'(t)x'(t) + r(t)x''(t) < 0$، وبالتالي $x''(t) < -\frac{r'(t)x\prime(t)}{r(t)} < 0$، ومنه $x''(t) \leq 0$.

التمهيدية 5:

إذا وجد $x(t)$ حل للمعادلة (2) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$ حيث $\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$،
وإضافة إلى ذلك $r'(t) \geq 0$، عندئذٍ فإن $\frac{x(\tau(t))}{x(t)} > 1$.

البرهان:

بما أن $x(t)$ حل للمعادلة (2) ويحقق $x(t) > 0$، فإنه بحسب التمهيدية 4 نجد $x"(t) \leq 0$ و $x'(t) > 0$.

بما أن $x'(t) > 0$ فإن التابع $x(t)$ تابع متزايد تماماً وبالتالي من أجل $t < \tau(t)$فإن $x(\tau(t)) > x(t)$، ومنه $\frac{x(\tau(t))}{x(t)} > 1$.

مبرهنة 2:

ليكن لدينا المعادلة الآتية:

$$(r(t)x'(t))' + c(t)\, f\big(x(t), r(t)x'(t)\big) = 0 \quad \dots (7)$$

حيث أن $r'(t) \geq 0$ أياً كانت $t > T$، و$c(t)$موجب تماماً ، وأن $\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$، عندئذٍ إذا كانت المعادلة (7)متذبذبة فإن المعادلة (2) متذبذبة.

البرهان:

نفرض أن المعادلة (7) متذبذبة و المعادلة (2) غير متذبذبة، بالتالي يوجد $x(t) \neq 0$ حل للمعادلة (2) أياً كانت $t > T$، وبالاستفادة من التمهيدية ١ فإنه يوجد $v(t)$ تابع معرف محدود من أجل $t > T$ يحقق الآتي:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

وبحسب التمهيدية 5 لدينا $\frac{x(\tau(t))}{x(t)} > 1$، فنحصل على المتراجحة الآتية:

$$v'(t) + c(t) + \frac{H(v)}{r(t)} < v'(t) + c(t)\left(\frac{x\big(\tau(t)\big)}{x(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

ومنه نجد أن$v'(t) + c(t) + \frac{H(v)}{r(t)} \leq 0$، وبالتالي حسب الموضوعة ١ نجد أن المعادلة (7) غير متذبذبة وهذا تناقض مع الفرض بالتالي المعادلة (2) متذبذبة.

٣- تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم والمحايد

سندرس في هذه الفقرة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم والمحايد حيث تعطى هذه المعادلة بالشكل الآتي:

$$\big(r(t)z'(t)\big)' + c(t)\, f\big(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\big) = 0 \quad \dots (8)$$

حيث$z(t)$ يعطى بالعلاقة[8] :

$$z(t) = x(t) + p(t)x\big(\theta(t)\big)\ ; p(t) > 0$$

و $\tau(t)$ معرف كما في المعادلة (2)، و$\theta(t)$ يحقق$\theta(t) \leq t$ ، $lim_{t\to+\infty}\theta(t) = \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = \infty$.

نعرض الآن تحويل ريكاتي للمعادلة (8) من خلال التمهيدية الآتية:

التمهيدية ٦:

يعطى تحويل ريكاتي للمعادلة (8) بالشكل الآتي:

$$v'(t)+c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1}+\frac{H(v)}{r(t)}=0 \quad \dots (9)$$

البرهان:

ليكن $x(\mathrm{t})$ حل للمعادلة (8) حيث $\tau(t)>t$ ولنفرض أن $u(t)=\frac{r(t)z'(t)}{z(t)}$ و $v(t)=g\big(u(t)\big)$

باشتقاق التابع $v(t)$ نجد أن:

$$v'(t)=g'(u)\,u'(t)\ =\ g'(u)\left[\frac{r(t)z'(t)}{z(t)}\right]'$$

$$=g'(u)\frac{(r(t)z'(t))'}{z(t)}-g'(u)\frac{r(t)(z'(t))^2}{z^2(t)}$$

$$=-g'(u)c(t)\frac{\left|x\big(\tau(t)\big)\right|^{p-1}|r(t)z'(t)|^{2-p}}{z(t)}-g'(u)\frac{r(t)(z'(t))^2}{z^2(t)}$$

$$=-g'(u)c(t)u(t)\left(\frac{x\big(\tau(t)\big)}{z(t)}\right)^{p-1}f\left(\frac{1}{u},1\right)-g'(u)\frac{u^2(t)}{r(t)}$$

نختار التابع $g(u)$ بحيث $g'(u)u(t)f\left(\frac{1}{u},1\right)=1$، و $H(v)=g'(u)u^2(t)$، فتصبح المعادلة بالشكل $v'(t)+c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1}+\frac{H(v)}{r(t)}=0$، عندئذٍ يصبح $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معطى بالعلاقة (4)، حيث يعطى التابع H بالعلاقة $H(v)=g'(u)u^2(t)$. إن التابعين g,H يتمتعان بالخواص المذكورة سابقاً.

التمهيدية ٧:

إذا وجد $x(t)$ حل للمعادلة (8) يحقق أن $x(t)>0$ أياً كانت $t>T$، وإذا كان $\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$ عندئذٍ يوجد $T_1>T$ بحيث يحقق $z(t)>0$ و $z'(t)>0$ أياً كانت $t>T_1$، إضافة إلى ذلك إذا كان $r'(t)\geq 0$ فإن $z''(t)\leq 0$ أياً كانت $t>T_1$.

البرهان:

بفرض $x(t)$ حل للمعادلة (8) يحقق أن $x(t)>0$ أياً كانت $t>T$، فإنه يوجد $T_1>T$ بحيث يكون $x(\theta(t))>0$ أياً كانت $t>T_1$، بالتالي فإن التابع $z(t)$ يحقق

$$z(t)=x(t)+p(t)x\big(\theta(t)\big)>0$$

أياً كانت $\mathrm{t}>\mathrm{T}_1>\mathrm{T}$ حيث $p(t)>0$.

وبما أن $x(t)$ حل للمعادلة (8) يحقق أن $x(t)>0$ من أجل $t>T$ بالتالي من المعادلة (8) نجد

$$\big(r(t)z'(t)\big)'=-c(t)\,f\big(x(\tau(t)),r(t)z'(t)\big)<0$$

وبالتالي $[r(t)z'(t)]$ متناقص على المجال $]T,+\infty[$.

الآن لنثبت أن $\mathrm{z}'(\mathrm{t})>0$، نفرض أن $z'(t)\leq 0$ وذلك أياً كانت $t>T$، وبسبب تناقص $(r(t)z'(t))$ فإنه يوجد $T_1\in\mathbb{R}$ حيث $z'(t)<\frac{-m}{r(t)}<0$ وذلك أياً كانت $t>T_1>T$ و m عدد حقيقي موجب تماماً.

بالمكاملة على المجال $]T_1,t[$ نجد $z(t) < z(T_1) - m\int_{T_1}^{t}\frac{dt}{r(t)}$، وعندما t تسعى إلى $+\infty$ نجد أن $z(t) < 0$ وهذا تناقض مع كون $z(t) > 0$، ومنه الفرض خاطئ بالتالي $z'(t) > 0$ وذلك أياً كانت $t > T$.

وبما أن $[r(t)z'(t)]$ متناقص فإن $[r(t)z'(t)]' < 0$ ومنه $r'(t)z'(t) + r(t)z''(t) < 0$، بالتالي $z''(t) < -\frac{r'(t)z'(t)}{r(t)} < 0$، ومنه $z''(t) \le 0$.

التمهيدية ٨:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة (8) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$ حيث $\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)} = +\infty$، وإضافة إلى ذلك $r'(t) \ge 0$، عندئذٍ فإنه يتحقق $x(\tau(t)) \ge [1 - p(\tau(t))]z(\tau(t))$، أياً كانت $t > T$.

البرهان:

لنأخذ $x(t)$ حل للمعادلة (8) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$، لدينا $z(t) = x(t) + p(t)x(\theta(t))$،

ومنه $z(\theta(t)) = x(\theta(t)) + p(\theta(t))x(\theta(\theta(t)))$، ولدينا $p(\theta(t)) > 0$ و$x(\theta(\theta(t))) > 0$ من أجل $\theta(\theta(t)) > T$ فإننا نجد $z(\theta(t)) \ge x(\theta(t))$، ومنه نحصل على المتراجحة الآتية:

$$z(t) = x(t) + p(t)x(\theta(t)) \le x(t) + p(t)z(\theta(t))$$
$$z(t) \le x(t) + p(t)z(\theta(t))$$

ولدينا أيضاً بحسب التمهيدية ٧ نجد $z'(t) > 0$ أي أن $z(t)$ تابع متزايد وبالتالي من أجل $\theta(t) \le t$

نحصل على $z(\theta(t)) \le z(t)$ ومنه $z(t) \le x(t) + p(t)z(\theta(t)) \le x(t) + p(t)z(t)$، بالتالي يكون لدينا $x(t) \ge [1 - p(t)]z(t)$، ومنه $x(\tau(t)) \ge [1 - p(\tau(t))]z(\tau(t))$.

التمهيدية ٩:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة (8) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$ حيث $\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)} = +\infty$، وإضافة إلى ذلك $r'(t) \ge 0$، عندئذٍ فإن $\frac{z(\tau(t))}{z(t)} > 1$.

البرهان:

بما أن $x(t)$ حل للمعادلة (8) ويحقق $x(t) > 0$، فإنه بحسب التمهيدية ٧ نجد $z''(t) \le 0$ و $z'(t) > 0$.

بما أن $z'(t) > 0$ فإن التابع $z(t)$ تابع متزايد تماماً وبالتالي من أجل $\tau(t) > t$ فإن $z(\tau(t)) > z(t)$، ومنه $\frac{z(\tau(t))}{z(t)} > 1$.

مبرهنة ٣:

ليكن لدينا المعادلة الآتية:

$$(r(t)x'(t))' + c(t)[1 - p(\tau(t))]^{p-1} f(x(t), r(t)x'(t)) = 0 \quad \ldots (10)$$

حيث أن $r'(t) \geq 0$ أياً كانت $t > T$ وأن $\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$، عندئذٍ إذا كانت المعادلة (10)متذبذبة فإن المعادلة (8) متذبذبة.

البرهان:

نفرض أن المعادلة (10) متذبذبة و المعادلة (8) غير متذبذبة.

بالتالي يوجد $x(t) \neq 0$ حل للمعادلة (8) أياً كانت $t > T$ وبالتالي بالاستفادة من التمهيدية ٦ فإنه يوجد $v(t)$ تابع معرف محدود من أجل $t > T$ يحقق الآتي: $v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$

وبحسب التمهيدية ٨ لدينا$x(\tau(t)) \geq \left[1 - p\left(\tau(t)\right)\right] z(\tau(t))$، ومنه نحصل على المتراجحة الآتية

$$0 = v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$
$$\geq v'(t) + c(t)\left(\frac{[1 - p(t)]z(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

ولدينا أيضاً وبحسب التمهيدية ٩ نجد أن $\frac{z(\tau(t))}{z(t)} > 1$، فنحصل على المتراجحة الآتية:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{[1 - p(t)]z(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \geq v'(t) + c(t)\big(1 - p(t)\big)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

ومنه $v'(t) + c(t)[1 - p(t)]^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \leq 0$،وبالتالي حسب الموضوعة ١ نجد أن المعادلة (10) غير متذبذبة وهذا تناقض مع الفرض بالتالي المعادلة (8) متذبذبة.

4- تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم والمحايد مع إضافة حد أعظمي

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم والمحايد مع إضافة حد أعظمي بالشكل:

$$\big(r(t)z'(t)\big)' + c(t) \max_{s\in[t,\tau]} f(x(s), r(t)z'(t)) = 0 \quad \dots (11)$$

حيث$z(t)$ يعطى بالعلاقة $z(t) = x(t) + p(t)x\big(\theta(t)\big)\,; p(t) > 0$، و$\tau(t)$ معرف كما في المعادلة (2) و$\theta(t)$ يحقق$\theta(t) \leq t$ و $lim_{t\to+\infty}\theta(t) = \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = \infty$.

التمهيدية 10 :

يعطى تحويل ريكاتي للمعادلة (11) بالشكل الآتي:

$$v'(t) + c(t) \max_{s\in[t,\tau]} \left(\frac{x(s)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0 \quad \dots (12)$$

البرهان:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة (11) حيث $\tau(t) > t$، ولنفرض أن $u(t) = \frac{r(t)z'(t)}{z(t)}$ و $v(t) = g\big(u(t)\big)$

باشتقاق التابع $v(t)$ نجد أن:

$$v'(t) = g'(u)\, u'(t)$$
$$= g'(u)\left[\frac{r(t)z'(t)}{z(t)}\right]'$$

$$= g'(u)\frac{(r(t)z'(t))'}{z(t)} - g'(u)\frac{r(t)(z'(t))^2}{z^2(t)}$$

$$= -g'(u)c(t)\frac{\max_{s\in[t,\tau]}|x(s)|^{p-1}\ |r(t)z'(t)|^{2-p}}{z(t)} - g'(u)\frac{r(t)(z'(t))^2}{z^2(t)}$$

$$= -g'(u)c(t)u(t)\max_{s\in[t,\tau]}\left(\frac{x(s)}{z(t)}\right)^{p-1} f\left(\frac{1}{u},1\right) - g'(u)\frac{u^2(t)}{r(t)}$$

نختار التابع $g(u)$ بحيث $g'(u)u(t)f\left(\frac{1}{u},1\right) = 1$، و $H(v) = g'(u)u^2(t)$ ، فتصبح المعادلة بالشكل $v'(t) + c(t)\max_{s\in[t,\tau]}\left(\frac{x(s)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$، عندئذٍ يصبح $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى بالعلاقة (4)، حيث يعطى التابع H بالعلاقة $H(v) = g'(u)u^2(t)$.

التمهيدية ١١:

إذا وجد $x(t)$ حل للمعادلة (11) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$، عندئذٍ إذا كان $\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)} = +\infty$ فإنه يوجد $T_1 > T$ بحيث يحقق $z(t) > 0$ و $z'(t) > 0$ أياً كانت $t > T_1$، إضافة إلى ذلك إذا كان $r'(t) \geq 0$ فإن $z''(t) \leq 0$ أياً كانت $t > T_1$.

البرهان:

بفرض $x(t)$ حل للمعادلة (11) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$، فإنه يوجد $T_1 > T$ بحيث يكون $x(\theta(t)) > 0$ أياً كانت $t > T_1$، بالتالي فإن التابع $z(t)$ يحقق $z(t) = x(t) + p(t)x\big(\theta(t)\big) > 0$ أياً كانت $t > T_1 > T$ حيث $p(t) > 0$، وبما أن $x(t)$ حل للمعادلة (11) يحقق أن $x(t) > 0$ من أجل $t > T$ بالتالي من المعادلة (11)، نجد أن $\big(r(t)z'(t)\big)' = -c(t)\max_{s\in[t,\tau]} f(x(s), r(t)z'(t)) < 0$، وبالتالي $[r(t)z'(t)]$ متناقص تماماً على المجال $]T, +\infty[$.

الآن لنثبت أن $z'(t) > 0$، نفرض أن $z'(t) \leq 0$ وذلك أياً كانت $t > T$، وبسبب تناقص $(r(t)z'(t))$ فإنه يوجد $T_1 \in \mathbb{R}$ حيث $z'(t) < \frac{-m}{r(t)} < 0$ وذلك أياً كانت $t > T_1 > T$ و m عدد حقيقي موجب تماماً، وبالمكاملة على المجال $]T_1, t[$ نجد $z(t) < z(T_1) - m\int_{T_1}^{t}\frac{dt}{r(t)}$، وعندما t تسعى إلى$+\infty$ نجد أن $z(t) < 0$ وهذا تناقض مع كون $z(t) > 0$، ومنه الفرض خاطئ بالتالي $z'(t) > 0$ وذلك أياً كانت $t > T$، وبما أن $[r(t)z'(t)]$ متناقص فإن $[r(t)z'(t)]' < 0$، ومنه $r'(t)z'(t) + r(t)z''(t) < 0$، بالتالي نجد $z''(t) < -\frac{r'(t)z'(t)}{r(t)} < 0$، ومنه $z''(t) \leq 0$.

التمهيدية ١٢:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة (11) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$ حيث $\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)} = +\infty$، وإضافة إلى ذلك $r'(t) \geq 0$، عندئذٍ فإنه يتحقق $x\big(\tau(t)\big) \geq \max_{s\in[t,\tau]}[1 - p(s)]z(s)$ أياً كانت $t > T$.

البرهان:

لنأخذ $x(t)$ حل للمعادلة (11) يحقق أن$x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$، لدينا $z(t) = x(t) + p(t)x(\theta(t))$ ومنه $z(\theta(t)) = x(\theta(t)) + p(\theta(t))x(\theta(\theta(t)))$ لدينا $p(\theta(t)) > 0$ و $x(\theta(\theta(t))) > 0$ من أجل $\theta(\theta(t)) > T$ فإننا نجد $z(\theta(t)) \geq x(\theta(t))$، ومنه نحصل على المتراجحة الآتية:

$$z(t) = x(t) + p(t)x(\theta(t)) \leq x(t) + p(t)z(\theta(t))$$

$$z(t) \leq x(t) + p(t)z(\theta(t))$$

ولدينا أيضاً بحسب التمهيدية ١١ نجد $z'(t) > 0$ أي أن $z(t)$ تابع متزايد وبالتالي من أجل $\theta(t) \leq t$ نحصل على $z(\theta(t)) \leq z(t)$، ومنه $z(t) \leq x(t) + p(t)z(\theta(t)) \leq x(t) + p(t)z(t)$، بالتالي يكون لدينا $x(t) \geq [1 - p(t)]z(t)$، ومنه $x(\tau(t)) \geq [1 - p(\tau(t))]z(\tau(t))$، ومنه نجد أن $max_{s\in[t,\tau]}\, x(s) \geq max_{s\in[t,\tau]}[1 - p(s)]z(s)$.

التمهيدية ١٣:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة (11) يحقق أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$ حيث $\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$، وإضافة إلى ذلك $r'(t) \geq 0$، عندئذٍ فإن$\max_{s\in[t,\tau]} \frac{z(s)}{z(t)} > 1$.

البرهان:

بما أن $x(t)$ حل للمعادلة (11) ويحقق $x(t) > 0$، فحسب التمهيدية ١١ نجد $z'(t) > 0$ و $z''(t) \leq 0$.

بما أن $z'(t) > 0$ فإن التابع $z(t)$ تابع متزايد تماماً وبالتالي من أجل $\tau(t) > t$ فإن$z(\tau(t)) > z(t)$

ومنه $\frac{z(\tau(t))}{z(t)} > 1$، ومنه $max_{s\in[t,\tau]} \frac{z(s)}{z(t)} > 1$.

مبرهنة ٤:

ليكن لدينا المعادلة الآتية:

$$(r(t)x'(t))' + c(t) \max_{s\in[t,\tau]}[1 - p(\tau(t))]^{p-1} f(x(s), r(t)z'(t)) = 0 \quad \dots (13)$$

حيث أن $r'(t) \geq 0$ أياً كانت $t > T$ وأن $\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$، عندئذٍ إذا كانت المعادلة (13)متذبذبة فإن المعادلة (11) متذبذبة.

البرهان:

نفرض أن المعادلة (13) متذبذبة و المعادلة (11) غير متذبذبة.

بالتالي يوجد $x(t) \neq 0$ حل للمعادلة (11) أياً كانت $t > T$ وبالتالي بالاستفادة من التمهيدية ١٠ فإنه يوجد $v(t)$ تابع معرف محدود من أجل $t > T$ يحقق الآتي :

$$v'(t) + c(t) \max_{s\in[t,\tau]} \left(\frac{x(s)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$$

وبحسب التمهيدية ١٢ لدينا $\max_{s\in[t,\tau]} x(s) \geq \max_{s\in[t,\tau]}[1 - p(s)]z(s)$، ومنه نحصل على المتراجحة

$$0 = v'(t) + c(t) \max_{s\in[t,\tau]} \left(\frac{x(s)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$
$$\geq v'(t) + c(t) \max_{s\in[t,\tau]} \left(\frac{[1-p(s)]z(s)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

ولدينا أيضاً وبحسب التمهيدية 13 نجد $1 < \max_{s\in[t,\tau]} \frac{z(s)}{z(t)}$، فنحصل على المتراجحة

$$v'(t) + c(t) \max_{s\in[t,\tau]} \left(\frac{[1-p(s)]z(s)}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$
$$\geq v'(t) + c(t) \max_{s\in[t,\tau]} [1-p(s)]^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

ومنه $0 \leq v'(t) + c(t) \max_{s\in[t,\tau]}[1-p(s)]^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$، وبالتالي حسب الموضوعة ١ نجد أن المعادلة (13) غير متذبذبة وهذا تناقض مع الفرض بالتالي المعادلة (11) متذبذبة.

النتائج والتوصيات:

مما سبق توصلنا من هذا البحث إلى دراسة تذبذب المعادلات التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتقدم، وكذلك درسنا تذبذب هذه المعادلة مع إضافة حد محايد وأعظمي وذلك من خلال المعادلات التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية وتحويل ريكاتي، نوصي بدراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد السالب مع وجود حد متقدم، كما نوصي بدراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد السالب مع وجود حد متقدم و إضافة حد أعظمي.

المراجع

[1] Bihari, I. *An Oscillation Theorem Concerning The Half-linear Differential Equation Of Second Order*, Magy, Tud, Akad, Mat, Kut, Intéz, 1964, Pp 275-280.
[2] Došlý, O; Rehak, P. 2005, *Half-linear Differential Equation*, Hungar, Acta Math.
[3] Elbert, A; Kusano, T; Tanigawa, T. *An Oscillatory Half-linear Differential Equation.* Volume 33, Number 4,, Sept 1997.
[4] Došlý. O; Bognár, G. 2013, *Conditional Oscillation And Principal Solution Of Generalized Half-linear Differential Equation*, Debrecen, Pp 451-459
[5] Fišnarova, S; R, Marík. *Oscillation Criteria For Neutral Second-order Halflinear Differential Equations With Applications To Euler Type Equations*. Boundary Value Problems, Pp1-14, 2014.
[6] Fišnarová, S; Marík, R. *Oscillation Of Half-linear Differential Equations With Delay*. Abstr. Appl. Anal. Art. ID 583147, 6 Pp, 2013.
[7] Selvarangam, S; Rani, B; Thandapani, E. *Oscillation Results For Second Order Half-linear Neutral Delay Differential Equations With "Maxima".* Tamkang Journal Of Mathematics, Volume 48, Number 3, 289-299, Sept 2017.
[8] Injrou, S; Karoum, R; Moalla, M. *Oscillation Criteria For Generalized Half Linear Second Order Differential Equations With Neutral*. Tishreen University Magazine, Volume 41, Number 4, Sept 2019.
[9] Injrou, S; Karoum, R; Moalla, M. *Oscillation Criteria for Second Order Generalized Half-Linear Neutral Differential Equations with Maxima.* Tartous University Journal For Research And Scientific Studies, Volume 3, Number 3, Sept 2019.
[10] Injrou, S; Karoum, R; Moalla, M. *Study On Oscillation For Generalized Half Linear Second Order Differential Equations With Delay And Neutral Using Riccati Transformation*. AL-Baath University Magazine , Volume 42, Sept 2020.