مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (7) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (7) 2022

طريقة نيوتن المنظمة لحل بعض الأمثليات غير المحدبة

د. بشرى رجب عباس *

علاء عهد غزاله**

(تاريخ الإيداع 29/8/ 2022 – تاريخ النشر12/12/ 2022)

□ ملخّص □

درسنا في هذه المقالة إيجاد أصفار مؤثرات مضطردة أعظمية مركبة ، كما درسنا الأنظمة الديناميكية التي يتم الحصول عليها من خلال تنظيم طريقة نيوتن.

نحن مهتمون بإيجاد أصفار المؤثرات المضطرة المركبة من الشكل : $M = \partial\varphi + \nabla\psi$

أي حل مسألة الأمثليات التالية :

$(p)\quad \min\{ \varphi(x(t))+\psi(x(t))\}$

والتي تكافئ دراسة النظام الديناميكي الآتي :

$$(D)\quad 0 \in \partial\varphi(x(t)) + \nabla\psi(x(t))$$

حيث : $\partial\varphi$ هو تحت تفاضل الدالة φ ، و ψ دالة غير محدبة قابلة للاشتقاق ، و $\nabla\psi$ لبشتز مستمر محلياً .

إذا كانت دالة الهدف تحقق خاصة ($\text{Kurdyka} - \text{Lojasiewicz}$) فيمكننا حينئذٍ إثبات تقارب المسار x إلى نقطة حرجة ، و ذلك عند حل مسائل الأمثليات التي تتضمن دوال KL .

الكلمات المفتاحية : الأنظمة الديناميكية ، طريقة نيوتن ، خوارزمية ليفنبرغ ماركواردت ، الأمثليات غير المحدبة ، خاصية $(\text{Kurdyka} - \text{Lojasiewicz})$.

*مدرسة في كلية العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية – سورية Abbas.boushra@yahoo.com

**طالب ماجستير في كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية alaa9zalh@gmail.com

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (7) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (7) 2022

Regularised Newton method for solving some nonconvex optimizations

Dr. Boushra Rajab Abbas*
Alaa Ahd Ghazalah**

(Received 29/8/2022.Accepted 12/12/2022)

□ABSTRACT □

in this article, We study finding zeroes of structured maximal monotone operators.and we also study the dynamical systtems that are obtained by regularization of Newton's method. we are interested in finding zeroes of a structured maximal monotone operator $M = \partial\varphi + \nabla\psi$, In other words, solve the problem:

$$(p) \quad \min\{\ \varphi(x(t))+\psi(x(t))\} \quad \Leftrightarrow \quad (D)\ \ 0 \in \partial\varphi(x(t)) + \nabla\Psi(x(t))$$

where $\partial\varphi$ is the convex subdifferential of φ, and ψ is a nonconvex and differentiable function with locally Lipschitz-continuous gradient.

If the objective function satisfies the Kurdyka- Lojasiewicz property, then we can prove convergence of the whole trajectory x to a critical point, When solving optimization problems involving KL functions.

Key Words: dynamical systems , Newton method , Levenberg–Marquardt regularization , nonconvex optimization , Kurdyka- Lojasiewicz property.

*Professor at the Faculty of Science - Tishreen University - Lattakia - Syria
Abbas.boushra@yahoo.com
** Master's Student at the Faculty of Science - Tishreen University - Lattakia – Syria
alaa9zalh@gmail.com

١ مقدمة :

ندرس في هذا المقال أنظمة ديناميكية شبيهة نيوتن تم تقديمها من قبل أتوش و سفايتر في [١٠] والتي تم تعميمها لحالة مجموع مؤثرين مضطردين أعظميين في [٢]

ليكن H فضاء هيلبيرت حقيقي و $\psi : H \mapsto R$ قابل للاشتقاق وغير محدب و $\nabla \psi : H \mapsto H$

مؤثر مضطرد وحيد القيمة و ليبشتز و $\phi : H \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\partial\phi : H \rightrightarrows H$ مؤثر مضطرد متعدد القيم

ليكن M تطبيق قابل للإشتقاق عندئذٍ طريقة نيوتن – رافسون الكلاسيكية تولد متتالية $(x_k)_{k\in N}$ في H تحقق:

$$M(x_k) + M'(x_k)\left(x_{k+١} - x_k\right) = ٠$$

نقسم على Δt_k بهدف أن نقترب من الحل :

$$M(x_k) + M'(x_k)\left(\frac{x_{k+١} - x_k}{\Delta t_k}\right) = ٠$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن المسألة غير موضوعة بشكل جيد حيث أنه في لحظة ما قد ينعدم $M'(x_k)$ و يفشل النظام الديناميكي

تم تنظيم المسألة من قبل ($Levenberg\text{–} Marquardt$) لتصبح بالشكل التالي :

$$M(x_k) + (\lambda_k I + M'(x_k))\left(\frac{x_{k+١} - x_k}{\Delta t_k}\right) = ٠$$

الصيغة المستمرة الموافقة للعلاقة السابقة :

$$\lambda(t)\dot{x}(t) + M'(x(t))\dot{x}(t) + M(x(t)) = 0$$

حيث : $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$

والآن نعيد صياغة المعادلة السابقة على شكل تظام جبري ديناميكي حيث (x,v) حل لهذا النظام بالشكل :

$$\begin{cases} v(t) = M\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) = ٠ \end{cases}$$

بوضع $M: H \rightrightarrows H$ مؤثر مضطرد أعظمي متعدد القيم نحصل على:

$$\begin{cases} v(t) \in M\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) = ٠ \end{cases} \qquad (1)$$

تمت دراسة هذه المسألة من قبل($Attouch, Svaiter 2011$) حيث أثبتوا وجود و وحدانية حل شامل قوي للنظام السابق(1) و التقارب الضعيف للمسارات نحو الحل.

تحت شروط معينة درسوا سلوك المسارات في اللانهاية و بينوا أنها تتقارب من صفر للمؤثر M .

استناداً على تمثيل مينتي [٣٦] الذي يقوم بتمثيل المؤثر M المتعدد القيم بمؤثرين وحيدي القيمة حيث :

$J_\mu^M = (I + \mu M)^{-١}$ المؤثر الحال للمؤثر M

تمثيل يوشيدا $M_{\mu(t)} = \frac{١}{\mu}\left(I - J_{\mu}^{M}\right)$

$$\mu(t) = \frac{١}{\lambda(t)}$$

$$Z(\cdot): \left[\cdot, +\infty\right) \to H \qquad t \in \left[\cdot, +\infty\right)$$

$$Z(t) = x(t) + \mu(t)v(t)$$

تمثيل مينتي يعطي الشكل المكافئ للعلاقة $v(t) \in M\big(x(t)\big)$ حيث

$$x(t) = J_{\mu(t)}^{M}\big(z(t)\big)$$

$$v(t) = M_{\mu(t)}\big(z(t)\big)$$

و منه نحصل على النظام الديناميكي المكافئ

$$\begin{cases} x(t) = J_{\mu_{(t)}}^{M}\big(z(t)\big) \\ \dot{z}(t) + \big(\mu(t) - \dot{\mu}(t)\big)M_{\mu_{(t)}}\big(z(t)\big) = \cdot \end{cases}$$

المؤثرين $M_{\mu}: H \to H$ و $J_{\mu}^{M}: H \to H$ كل منهما مؤثر وحيد القيمة مما يجعل النظام السابق يحقق كامل شروط نظرية كوشي– ليبشتز التي تعطي الوجود و الوحدانية .

بوضع شروط ابتدائية على النظام (1) نحصل على مسألة كوشي التالية :

$$\begin{cases} v(t) \in M\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) = \cdot \\ x(0) = x_0, v(0) = v_0 \in M(x_0) \end{cases}$$

تم تعميم الدراسة السابقة من حالة مؤثر مضطر أعظمي وحيد إلى مجموع مؤثرين من الشكل $M = A + B$ من قبل (*Abbas, B., Attouch, H., Svaiter*) في [٢] بهدف حل المسألة :

$$\inf_{x \in H}\{\varphi(x) + \psi(x)\} \qquad \ldots\ldots.(2)$$

حيث A مؤثر مضطرد أعظمي عام مؤثراته الحالة سهلة الحساب و B مضطرد ليبشتز –مستمر موضعياً عن طريق تقديم أنظمة ديناميكية مرتبطة بطريقة نيوتن. وفق هذا التعريف للمؤثر M نحصل على النظام المكافئ للنظام (١) الآتي:

$$v(t) \in A\big(x(t)\big)$$

$$\lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) + B(x(t)) = \cdot$$

للمسألة أهمية كبيرة ، فعندما يكون $A = 0$ و $B = \nabla\psi$ نحصل على (مسألة *gradient*) و التي تمثل بدورها مسألة أمثليات ، عندما $B = 0$ نعود للحالة السابقة (طريقة نيوتن المنظمة في حالة مؤثر وحيد M) .

في [٢] تمت دراسة حالة $A = \partial\varphi$ يكون تحت التفاضل لدالة خاصة و محدبة ونصف مستمرة من الأدنى $\phi : H \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ و $B = \nabla\psi$ هوالـ *gradient* لدالة قابلة للاشتقاق باستمرار و محدبة و $\psi : H \mapsto \mathbb{R}$.

باستخدام النتائج الكلاسيكية $\partial\varphi$ و $\nabla\psi$ تكون مؤثرات مضطردة أعظمية والنظام يصبح بالشكل الآتي :

$$\begin{gathered} v(t) \in \partial\varphi\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) + \nabla\psi(x(t)) = 0 \end{gathered} \quad (3)$$

يعتمد تحليل التقارب على طرق الهندسة الجبرية الحقيقية التي قدمها لوجاسيويكز في [30] وكرديكا في [28]والتي تم تطويرها مؤخرًا في حالة الدوال غير الملساء من قبل $Attouch$ و $Bolte$ و $Svaiter$ في [٧] و $Bolte$ و $Sabach$ و $Teboulle$ [16] ، جذبت مسائل الأمثليات التي تنطوي على دوال KL اهتمام الباحثين منذ أعمال $Lojasiewicz$ [30] وسيمون و هاروكس [٣٤] و $Jendoubi$ [26] من أهم المساهمات في السنوات الأخيرة في هذا المجال أعمال ألفاريز وأتوش وبولت وريدونت [٣] وبولت ودانيليديس ولويس [١٢] و المزيد من الدراسات في [٥–٧، ١٥، ١٦، ١٨–٢٠، ٢٣، ٢٤، ٢٧، ٣٢] .

٢ أهمية البحث و أهدافه :

الهدف من هذا البحث هو إجراء تحليل مقارب للنظام الديناميكي (٣) في غياب تحدب الدالة ψ ، من أجل دالة التخميد λ ، نفرض أن دالة الهدف في (٣) تحقق خاصية $Kurdyka - Lojasiewicz$.

في الجزء الأول من المقال ، نوضح أن مجموعة نقاط النهاية للمسارات x المتولدة من النظام (٣) محتواة بالكامل في مجموعة النقاط الحرجة لدالة الهدف $\varphi + \psi$، والتي تمثل مجموعة أصفار تحت التفاضل المحدد لها، في ظل بعض الشروط التكميلية ، بما في ذلك خاصية $Kurdyka - Lojasiewicz$ ، نثبت تقارب المسار x إلى نقطة حرجة للدالة $\varphi + \psi$ ، علاوة على ذلك ، نحصل على معدلات التقارب للمسارات من خلال دليل $Lojasiewicz$ لدالة الهدف ، بشرط أن تحقق خاصية $Lojasiewicz$.

٣ طرائق البحث و موارده :

١_ تفاضل الدوال المحدبة ذات المسارات المستمرة بالمطلق:

نعرف منطقة الدالة $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ بالشكل : $dom\,\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n: \varphi(x) < +\infty\}$ و نقول أن φ دالة خاصة إذا تحقق: $-\infty \notin \varphi(x)$ و $dom\,\varphi \neq \phi$.

نعتمد مفاهيم تحت التفاضل المعممة المشار إليها في [17, 31, 33].

لتكن $\varphi: R^n \to R \cup \{+\infty\}$ دالة خاصة و نصف مستمرة من الأدنى ، عندئذٍ تحت تفاضل فريشيه للدالةφ هو المجموعة التالية : $\hat{\partial}\varphi(x) = \left\{v \in \mathbb{R}^n: \liminf\limits_{y\to x} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)-<v,y-x>}{\|y-x\|} \geq 0\right\}$

إذا كانت $x \notin dom\,\varphi$ عندئذٍ $\hat{\partial}\varphi(x) := \emptyset$. تحت التفاضل المحدود ل $(Mordukhovich)$ يعرف بالشكل الآتي :

$$\partial_L\varphi(x) = \{v \in R^n : \exists x_k \to x, \varphi(x_k) \to \varphi(x)\ and\ \exists v_k \in \hat{\partial}\varphi\,(x_k), v_k \to v\ as\ k \to +\infty\}$$

عندما $x \notin dom\,\varphi$ نضع $\partial_L\varphi(x) = \emptyset$ ، بوضوح نجد أن $\hat{\partial}\varphi(x) \subseteq \partial_L\varphi(x)$ لكل $x \in R^n$

عندما تكون الدالة φ محدبة فإن مفاهيم تحت التفاضل تتطابق مع مفاهيم تحت التفاضل المحدب أي لأن :

$$\hat{\partial}\varphi(x) = \partial_L\varphi(x) = \partial\varphi(x) = \{v \in R^n : \varphi(y) \geq \varphi(x) + < v, y-x > \ \forall y \in \mathbb{R}^n\}\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

سيتم استخدام المعيار التالي لبيان تحت التفاضل المحدود في تحليل التقارب :

إذا كان $(x_k)_{k\in N}$ و $(v_k)_{k\in N}$ متتاليتين في R^n بحيث $v_k \in \partial_L\varphi(x_k)$ لكل $k \in N$ و $(x_k, v_k) \to (x, v)$

$\varphi(x_k) \to \varphi(x)$ عندما $k \to +\infty$ فإن $v \in \partial_L\varphi(x)$.

تنص قاعدة فيرما في حالة الدوال غير الملساء على أن إذا كان $x \in R^n$ مصغر محلي للدالة φ فإن:

$$0 \in \partial_L\varphi(x)$$

نرمز لمجموعة النقاط الحرجة للدالة φ بالشكل : $crit(\varphi) = \{x \in R^n : 0 \in \partial_L\varphi(x)\}$

إذا كانت φ قابلة للإشتقاق باستمرار عند نقطة $x \in \mathbb{R}^n$ فإن $\partial_L\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$

سنستخدم أيضًا قاعدة مجموع تحت التفاضل التالية:

لتكن $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة خاصة و نصف مستمرة من الأدنى و $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق باستمرار عندئذٍ :

$$\partial_L(\varphi + \psi)(x) = \partial_L\varphi(x) + \nabla\psi(x) \quad for\ all \quad x \in \mathbb{R}^n$$

علاوة على ذلك ، نتذكر مفهوم الدالة المستمرة بالمطلق محلياً ونذكر اثنين من خصائصها الأساسية .

تعريف (١): يقال أن الدالة $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ مستمرة بالمطلق محلياً إذا كانت مستمرة بالمطلق على كل مجال $[0, T]$ لكل $T > 0$.

ملاحظة (١) : (a) الدالة المستمرة بالمطلق تكون قابلة للإشتقاق في كل مكان تقريباً مشتقها يطابق مشتقاتها الجزئية في كل مكان تقريباً .

(b) إذا كانت الدالة $f : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ مستمرة بالمطلق لكل $T > 0$ و $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ هو L– ليبشتز مستمر لكل $L \geq 0$ عندئذٍ الدالة $h = f \circ g$ تكون مستمرة بالمطلق أيضاً و فوق ذلك h تكون قابلة للإشتقاق في كل مكان تقريباً على $[0, T]$ و المتراجحة $\|\dot{h}(t)\| \leq L\|\dot{f}(t)\|$ تكون محققة لكل $t \in [0, T]$

ستلعب النتيجتان التاليتان ، اللتان يمكن تفسيرهما كإصدارات مستمرة من المتتاليات المضطردة شبه *Fej´er* ، دورًا مهمًا في التحليل المقارب لمسارات النظام الديناميكي (٣). حيث تم اثباتهما في [٢] .

تمهيدية (٢): نفرض أن $F: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ تكون مستمرة بالمطلق محلياً و محدودة من الأدنى و يوجد $G\epsilon L^1[0, \infty)$ بحيث لكل $t \in [0, +\infty) : \frac{d}{dt}F(t) \leq G(t)$

عندئذٍ يوجد $\lim_{t\to\infty} F(t) \in \mathbb{R}$.

تمهيدية (٣): إذا كان $1 \leq p < \infty$ و $1 \leq r \leq \infty$ و $F\epsilon L^p[0, \infty)$ دالة غير سالبة مستمرة بالمطلق محلياً و $G\epsilon L^r[0, \infty)$ و لكل $t \in [0, +\infty)$ فإن : $\frac{d}{dt}F(t) \leq G(t)$ عندئذٍ :

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$$

النتيجة التالية ، التي ترجع إلى Brezis [22] تقدم تعبيرًا عن المشتق للدوال المحدبة ذات المسارات المستمرة بالمطلق.

تمهيدية (٤): لتكن $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة خاصة و محدبة و نصف مستمرة من الأدنى و لتكن $x \in L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$ مستمرة بالمطلق بحيث $\dot{x} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$ و $x(t) \in dom\ \varphi$ لكل $t \in [0, T]$ ، نفرض بأنه يوجد $\xi \in L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$ بحيث $\xi(t) \in \partial\varphi(x(t))$ لكل t $[0, T]$ عندئذٍ الدالة $t \to \varphi(x(t))$ تكون مستمرة بالمطلق و تحقق : لكل t حيث $x(t) \in dom\ \partial\varphi$ لدينا :

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t)) = \langle\dot{x}(t), \psi\rangle \ \forall\ \psi \in \partial\varphi(x(t))$$

٢_ تحليل التقارب :في هذه الفقرة ، سندرس النظام الديناميكي الآتي :

$$\begin{cases} v(t) \in \partial\varphi\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) + \nabla\psi\big(x(t)\big) = 0 \\ x\big(\cdot\big) = x_{\cdot}, v\big(\cdot\big) = v_{\cdot} \in \partial\varphi\big(x_{\cdot}\big) \end{cases} \qquad (٤)$$

حيث $x_{\cdot}, v_{\cdot} \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda > 0$ ، نفرض أن $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة خاصة و محدبة و نصف مستمرة من الأدنى و $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: ربما غير محدبة و قابلة للتفاضل وفق فريشيه و تدرجها $-L$ ليبشتز مستمر أي :

$$\|\nabla\psi(x) - \nabla\psi(y)\| \leq L\|x - y\| \text{ لكل } x, y \in \mathbb{R}^n$$

تعريف ٢ ليكن $x_{\cdot}, v_{\cdot} \in R^n$ و$0 < \lambda$ بحيث $v_{\cdot} \in \partial\varphi\big(x_{\cdot}\big)$ ، نقول أن $\big(x(\cdot), v(\cdot)\big)$ حل شامل قوي للنظام (٤) إذا و فقط إذا تحققت الشروط الآتية:

- $x(\cdot), v(\cdot) : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n$ دوال مستمرة بالمطلق محلياً
- $v(t) \in \partial\varphi\big(x(t)\big)$ for all $t \in [0,+\infty[$
- $\lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) + \nabla\psi\big(x(t)\big) = \cdot$ $\quad$ *for almost all* $t \in [0,+\infty[$
- $x\big(\cdot\big) = x_{\cdot}, \quad v\big(\cdot\big) = v_{\cdot}$

تم التحقق من وجود وتفرد المسارات الناتجة عن (٤) في [٢]. إن إلقاء نظرة على البراهين في [٢] يكشف حقيقة أن تحدب ψ لا يستخدم في النتائج المذكورة على الوجود ، وإنما اعتمد على أن يكون $\nabla\psi$ ليبشتز مستمر. نبدأ تحليل التقارب الخاص بنا بالنتيجة التالية.

تمهيدية ٥ ليكن $x_{\cdot}, v_{\cdot} \in \mathbb{R}^n$ و $0 < \lambda$ بحيث $v_{\cdot} \in \partial\varphi\big(x_{\cdot}\big)$ و لتكن $(x, v) : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ حل شامل قوي وحيد للنظام (٤) ، عندئذٍ الشروط الآتية محققة :

(i) $\langle\dot{x}(t), \dot{v}(t)\rangle \geq 0$ لكل $t \in [0, +\infty[$

(ii) $\frac{d}{dt}\varphi\big(x(t)\big) = \langle\dot{x}(t), v(t)\rangle \ \forall \ t \in [0, +\infty[$

البرهان : (i) انظر [١٠]. يعتمد البرهان على العلاقة الأولى في (٤) واضطراد تحت التفاضل المحدب.

(ii) يستخدم البرهان(*Lemma 4*) وقد ذكرت هذه العلاقة في [٢] دون استخدام تحدب الدالة ψ.

تمهيدية ٦ : ليكن $x_{\cdot}, v_{\cdot} \in \mathbb{R}^n$ و $0 < \lambda$ بحيث $v_{\cdot} \in \partial\varphi\big(x_{\cdot}\big)$ و لتكن $(x, v) : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ حل شامل قوي وحيد للنظام (٤) ، نفرض أن $\varphi+\psi$ محدودة من الأدنى عندئذٍ الشروط الآتية تكون محققة :

(i) $\frac{d}{dt}(\varphi + \psi)\big(x(t)\big) + \lambda\|\dot{x}(t)\|^2 + \langle\dot{x}(t), \dot{v}(t)\rangle = 0$ لكل $t \geq 0$

(ii)

$$\dot{x}, \dot{v}, v + \nabla\psi(x) \in L^2([0, +\infty); \mathbb{R}^n), \langle\dot{x}(t), \dot{v}(t)\rangle \in L^1([0, +\infty); R) and$$

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t\to+\infty} v^{\cdot}(t) = \lim_{t\to+\infty} (v(t) + \nabla\psi(x(t))) = 0$$

$\exists \lim_{t\to+\infty}(\varphi + \psi)(x(t)) \in \mathbb{R}$ (iii)

البرهان :

(i) ينتج البرهان بضرب طرفي العلاقة الثانية في (٤) داخلياً ب $\dot{x}(t)$ و تطبيق التمهيدية ٥

(ii) باستخدام العلاقة (i) و على اعتبار $\varphi+\psi$ محدودة من الأدنى نجد بسهولة أن $\dot{x} \in L^2([0,+\infty);\mathbb{R}^n)$ و $\langle \dot{x}(t), \dot{v}(t)\rangle \in L^1([0,+\infty);\mathbb{R})$ (حسب i من التمهيدية ٥) علاوة على ذلك ، باستخدام العلاقة الثانية في (٤) والملاحظة ١ (b) و التمهيدية ٥ (i)، نحصل تقريبًا لكل $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|v(t) + \nabla\psi(x(t))\right\|^2\right) &= \left\langle \dot{v}(t) + \frac{d}{dt}\nabla\psi(x(t)), v(t) + \nabla\psi(x(t))\right\rangle \\
&= \left\langle \dot{v}(t) + \frac{d}{dt}\nabla\psi(x(t)), -\lambda\dot{x}(t) - \dot{v}(t)\right\rangle \\
&= -\lambda\langle\dot{x}(t),\dot{v}(t)\rangle - \|\dot{v}(t)\|^2 - \lambda\left\langle\frac{d}{dt}\nabla\psi(x(t)),\dot{x}(t)\right\rangle \\
&\quad - \left\langle\frac{d}{dt}\nabla\psi(x(t)),\dot{v}(t)\right\rangle \\
&\leq -\|\dot{v}(t)\|^2 - \lambda\left\langle\frac{d}{dt}\nabla\psi(x(t)),\dot{x}(t)\right\rangle - \left\langle\frac{d}{dt}\nabla\psi(x(t)),\dot{v}(t)\right\rangle \\
&\leq -\|\dot{v}(t)\|^2 + \lambda L\|\dot{x}(t)\|^2 + L\|\dot{x}(t)\|.\|\dot{v}(t)\| \\
&\leq -\|\dot{v}(t)\|^2 + \lambda L\|\dot{x}(t)\|^2 + L^2\|\dot{x}(t)\|^2.\frac{1}{4}\|\dot{v}(t)\|^2
\end{aligned}$$

وبالتالي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|v(t) + \nabla\psi(x(t))\right\|^2\right) + \frac{3}{4}\|\dot{v}(t)\|^2 \leq L(\lambda + L)\|\dot{x}(t)\|^2 \qquad (٥)$$

بما أن $\dot{x} \in L^2([0,+\infty);\mathbb{R}^n)$ ، باستخدام التكامل البسيط نجد أن $\dot{v} \in L^2([0,+\infty);\mathbb{R}^n)$

باستخدام المعادلة الثانية في (٤) ، نحصل على أن : $v + \nabla\psi(x) \in L^2([0,+\infty);\mathbb{R}^n)$

من العلاقة الأخيرة و حسب التمهيدية ٣ و العلاقة (٥) نجد أن : $\lim_{t\to+\infty}(v(t) + \nabla\psi(x(t)) = 0$

لدينا حسب العلاقة الثانية في (٤) نجد :

$$\lim_{t\to+\infty} \lambda\dot{x}(t) + \dot{v}(t) = 0 \qquad (٦)$$

وفوق ذلك حسب التمهيدية ٥ (i) لدينا لكل $t \geq 0$:

$$\|\dot{v}(t)\|^2 \leq \lambda^2\|\dot{x}(t)\|^2 + 2\lambda\langle\dot{x}(t),\dot{v}(t)\rangle + \|\dot{v}(t)\|^2 = \|\lambda\dot{x}(t) + \dot{v}(t)\|^2$$

ومنه و حسب (٦) نجد أن : $\lim_{t\to+\infty} v^{\cdot}(t) = 0$

مما سبق و حسب (٦) نجد أن : $\lim_{t\to+\infty}\dot{x}(t) = 0$

(iii) من (i) و حسب (i) من التمهيدية ٥ نجد :

$$\frac{d}{dt}(\varphi + \psi)(x(t)) \leq 0 \qquad (٧)$$

لكل $t \geq 0$ ومنه وحسب التمهيدية ٢ نجد المطلوب . ■

تمهيدية ٧: ليكن $x_{\cdot}, v_{\cdot} \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda > 0$ بحيث $v_{\cdot} \in \partial\varphi(x_{\cdot})$ و لتكن $(x, v) : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ حل شامل قوي وحيد للنظام (٤) ، نفرض أن $\varphi+\psi$ محدودة من الأدنى و لتكن المتتالية $(t_k)_{k\in N}$ بحيث $t_k \to +\infty$ و $x(t_k) \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ عندما $k \to +\infty$ عندئذٍ : $0 \in \partial_L(\varphi + \psi)(\bar{x})$

البرهان : من العلاقة الأولى في (٤) وقاعدة مجموع تحت التفاضل لتحت التفاضل المحدود نشتق لأي $k \in N$

$$v(t_k) + \nabla\psi(x(t_k)) \in \partial\varphi(x(t_k)) + \nabla\psi(x(t_k)) = \partial L(\varphi + \psi)(x(t_k)). \qquad (8)$$

ولدينا : $x(t_k) \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ عندما $k \longrightarrow +\infty$ (٩)

و حسب التمهيدية ٦:

$$\lim_{t\to+\infty} (v(t) + \nabla\psi(x(t)) = 0 \qquad (١٠)$$

وفقًا لخاصية الإغلاق لتحت التفاضل المحدود ، يكتمل البرهان بإثبات أن

$$(\varphi + \psi)\big(x(t_k)\big) \to (\varphi + \psi)(\bar{x}) as\ k \to +\infty \qquad (11)$$

من (٩) و (١٠) و من استمرارية $\nabla\psi$ نحصل على :

$$v(t_k) \to -\nabla\psi(x) as\ k \to +\infty \qquad (12)$$

و بما أن $v(t_k) \in \partial\varphi\big(x(t_k)\big)$ نجد أن :

$$\varphi(\bar{x}) \geq \varphi(x(t_k)) + \langle v(t_k), \bar{x} - x(t_k)\rangle\ \forall k \in N.$$

من هذه العلاقة و من (٩) و (١٢) نجد أن :

$$\lim_{t\to+\infty} sup\ \varphi(x(t_k)) \leq \varphi(\bar{x})$$

على اعتبار أن φ نصف مستمرة من الأدنى نجد أن :

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(x(t_k)) = \varphi(\bar{x})$$

مما سبق و من استمرارية ψ و حسب (٩) نجد أن العلاقة (١١) محققة

■

نعرف المجموعة المحدودة على x بالعلاقة :

$$\omega(x) := \{\bar{x} \in R^n : \exists t_k \to +\infty\ such\ that\ x(t_k) \to \bar{x}\ as\ k \to +\infty\}$$

نستخدم أيضًا دالة المسافة لمجموعة معرفة لكل $A \subseteq \mathbb{R}^n$ بالشكل : $dist(x, A) = inf_{y\in A}\|x - y\|$ لكل $x \in \mathbb{R}^n$

تمهيدية ٨ ليكن $x_., v_. \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda > 0$ بحيث $v_. \in \partial\varphi\left(x_.\right)$ و لتكن $(x, v) : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ حل شامل قوي وحيد للنظام (٤) ، نفرض أن $\varphi+\psi$ محدودة من الأدنى و x محدود عندئذٍ الشروط الآتية محققة :

(i) $\omega(x) \subseteq crit(\varphi + \psi)$

(ii) $\omega(x)$ تكون مستمرة و متراصة و غير خالية

(iii) $\lim_{t\to+\infty} dist\big(x(t), \omega(x)\big) = 0$

(iv) $\varphi+\psi$ محدودة و ثابتة على $\omega(x)$

البرهان: (i) تنتج بوضوح من التمهيدية 7. العبارة (ii) هي نتيجة كلاسيكية من [٢٥]. كما يتضح من إثبات النظرية ٤.١ في [٣] أن خصائص $\omega\ (x)$ لكونها غير خالية ومتراصة ومستمرة تكون شاملة للمسارات المحدودة التي تحقق $\lim_{t\to+\infty} x^{\cdot}(t) = 0$

العلاقة (iii) محققة بوضوح لكون $\omega(x)$ غير خالية

(iv) وفق التمهيدية ٦ يوجد $\lim_{t\to+\infty}(\varphi + \psi)(x(t)) \in R$ ، لنعرف هذه النهاية لكل $l \in \mathbb{R}$ و بأخذ $\bar{x} \in \omega(x)$ عندئذٍ يوجد $t_k \to +\infty$ بحيث $x(t_k) \to \bar{x}$ عندما $k \to +\infty$.

من برهان التمهيدية ٧ لدينا $(\varphi + \psi)(x(t_k)) \to (\varphi + \psi)(\bar{x})$ as $k \to +\infty$ بالتالي $(\varphi + \psi)(\bar{x}) = l$ ■

ملاحظة ٩ نفرض أن $\varphi + \psi$ هي $(coercive)$ أي : $\lim_{\|u\|\to+\infty}(\varphi + \psi)(u) = +\infty$

و ليكن $x_., v_. \in R^n$ و $\lambda > 0$ بحيث $v_. \in \partial\varphi\left(x_.\right)$ و لتكن $(x, v) : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ حل شامل قوي وحيد للنظام (٤) ، عندئذٍ $\varphi+\psi$ محدودة من الأدنى و x محدود

بالإضافة لذلك بما أن $\varphi+\psi$ دالة خاصة و نصف مستمرة من الأدنى و $(coercive)$ نستنتج أن : $inf_{u\in R^n}[\varphi(u) + \psi(u)]$ تكون محدودة و تبلغ حدها الأدنى و بالتالي $\varphi+\psi$ محدودة من الأدنى

من جهة أخرى حسب (٧) نجد : $(\varphi + \psi)(x(T)) \le (\varphi + \psi)(x_.)\ \forall T \ge 0$

بما أن $\varphi+\psi$ هي $(coercive)$ و مجموعات المستوي الأدنى لها محدودة فإن المتراجحة السابقة تؤدي الى أن x محدود. نلاحظ أن في هذه الحالة يكون v أيضاً محدود لأن : $\lim_{t\to+\infty}(v(t) + \nabla\psi(x(t))) = 0$ (التمهيدية ٦ (ii) و كون $\nabla\psi$ ليبشتز مستمر .

٣_ تقارب المسار عندما تحقق دالة الهدف خاصية *Kurdyka– Lojasiewicz*:

إن نتائج التقارب الرئيسية في مقالنا هذا تعتمد بشكل خاص على الدوال التي تحقق خاصة ما يسمى $Kurdyka - Lojasiewicz$ و التي تلعب دورًا أساسياً في تحليل تقارب النظام الديناميكي (٤)

لأجل $\eta \in (0,+\infty]$ نرمز بـ θ_η لصف الدوال المقعرة و المستمرة $\varphi : [0,\eta) \to [0,+\infty)$ حيث $\varphi(0) = 0$

φ تكون قابلة للإشتقاق باستمرار على $(0,\eta)$ و مستمرة عند الصفر و $\varphi'(s) > 0$ لكل $s \in (0,\eta)$

تعريف ٣ لتكن $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة خاصة و نصف مستمرة من الأدنى ، نقول أن f تحقق خاصة $Kurdyka - Lojasiewicz$ (KL) في النقطة $\bar{x}$ حيث $\bar{x}\epsilon\, dom\partial_L f = \{x \in \mathbb{R}^n: \partial_L f(x) \neq \phi\}$ إذا وجد $\eta \in (0,+\infty]$ ،و جوار U لـ $\bar{x}$ و دالة $\varphi \in \theta_\eta$ بحيث لكل x ينتمي للتقاطع

$$U \cap \{x \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) < f(x) < f(\bar{x}) + \eta\}$$

المتراجحة الآتية محققة : $\varphi'(f(x) - f(\bar{x}))\, dist(0, \partial_L f(x)) \ge 1$

إذا كانت f تحقق خاصية KL في كل نقطة من نقاط $dom\partial_L f$ ، فإن f تسمى KL ــ دالة

تعود أصول هذه الفكرة إلى العمل الرائد لـ $Lojasiewicz$ [٣٠] ، حيث أثبت أنه بالنسبة للدالة التحليلية الحقيقية $f: R^n \to R$ و النقطة الحرجة $x \in R^n$ (أي $\nabla f(x) = 0$) ، يوجد $\theta \in [1/2, 1)$ بحيث الدالة $|f - f(\bar{x})|^{\theta}\|\nabla f\|^{-1}$ تكون محدودة على $\bar{x}$ ، هذا يتوافق مع حالة $\varphi(s) = Cs^{1-\theta}$ for $C > 0$

تسمح نتيجة $Lojasiewicz$ بتفسير خاصية KL على أنها إعادة تحديد معالم قيم الدالة من أجل تجنب التسطح حول النقاط الحرجة.(كرديكا [٢٨]) يمكن العثور على مزيد من الدراسات في الحالة غير الملساء في [٦ ، ١٢-١٤].

واحدة من الخصائص الرائعة لدوال KL هو انتشارها في كل مكان في التطبيقات (انظر [١٦]). لمزيد من خصائص دوال KL وأمثلة توضيحية يمكن الإطلاع على[٥–٧ ، ١٢–١٤ ، ١٦] والمراجع الواردة فيها.

في التحليل أدناه ، سيتم استخدام خاصية KL الموحدة التالية الواردة في [١٦ ، *Lemma 6*]

تمهيدية ١٠ لتكن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعة متراصة و لتكن $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة خاصة و نصف مستمرة من الأدنى ، نفرض أن f متراصة على Ω و أنها تحقق خاصية KL في كل نقطة من نقاط Ω ، عندئذٍ يوجد $\varepsilon, \eta > 0$ و $\varphi \in \theta_\eta$ بحيث لكل $\bar{x} \in \Omega$ و كل x من التقاطع :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, \Omega) < \varepsilon\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) < f(x) < f(\bar{x}) + \eta\} \tag{13}$$

تكون المتراجحة التالية محققة :

$$\varphi'(f(x) - f(\bar{x}))\, dist(0, \partial_L f(x)) \geq 1 \qquad (١٤)$$

نظرًا لبعض الأسباب الموضحة في الملاحظة ١٤ أدناه ، نحن نبرهن تقارب المسار $x(t)$ الناتج عن (٤) عندما $t \to +\infty$ على افتراض أن $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ محدبة وقابلة للتفاضل مع ρ^{-1} تدرج ليبشيتز مستمر و $\rho > 0$ وفق هذه الظروف ، يصبح النظام الديناميكي (٤)

$$\begin{cases} v(t) \in \nabla\phi\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) + \nabla\phi\big(x(t)\big) + \nabla\psi\big(x(t)\big) = 0 \\ x(\cdot) = x_{\cdot}, v(\cdot) = v_{\cdot} = \nabla\phi(x_{\cdot}) \end{cases} \tag{15}$$

حيث $x_{\cdot}, v_{\cdot} \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda > 0$

ملاحظة ١١ نلاحظ أنه إذا كانت الدالة ϕ قابلة للإشتقاق باستمرار مرتين ، فيمكن كتابة النظام الديناميكي (١٥) بالشكل المكافئ :

$$\begin{cases} \lambda\dot{x}(t) + \nabla^2\phi\big(x(t)\big)(\dot{x}(t)) + \nabla\phi\big(x(t)\big) + \nabla\psi\big(x(t)\big) = 0 \\ x(\cdot) = x_{\cdot}, v(\cdot) = v_{\cdot} = \nabla\phi(x_{\cdot}) \end{cases} \tag{16}$$

حيث $x_{\cdot}, v_{\cdot} \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda > 0$.

هذه معادلة تفاضلية بمصطلح تخميد ($a\ Hessian - driven$). نحيل القارئ إلى [٣] و [٩] لمزيد من الأفكار حول الأنظمة الديناميكية باستخدام مصطلحات التخميد *Hessiandriven* وللتحفيز على أخذها في الاعتبار. علاوة على ذلك ، كما في [٩] ، تم تقسيم القوى الدافعة بالشكل $\nabla\phi + \nabla\psi$، حيث $\nabla\psi$ تتعلق بقوى التدافع الكلاسيكية الملساء و $\nabla\phi$ تتضمن قوى الاتصال.

في هذا السياق ، يمكن ذكر نسخة محسنة من التمهيدية ٥

تمهيدية ١٢ ليكن $x_{\cdot}, v_{\cdot} \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda > 0$ بحيث $v_{\cdot} = \nabla\phi(x_{\cdot})$ و لتكن $(x, v) : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ حل شامل قوي وحيد للنظام (١٥) عندئذٍ :

$$\langle \dot{x}(t), \dot{v}(t) \rangle \geq \rho\|\dot{v}(t)\|^2 \quad \text{لكل} \quad t \in [0, +\infty) \tag{17}$$

البرهان : نأخذ عنصر اختياري $\delta > 0$ ، لكل $t \geq 0$ لدينا :

$$\begin{aligned}&\langle v(t+\delta)-v(t),x(t+\delta)-x(t)\rangle\\&\quad=\big\langle\nabla\phi\big(x(t+\delta)\big)-\nabla\phi\big(x(t)\big),x(t+\delta)-x(t)\big\rangle\\&\quad\geq\rho\big\|\nabla\phi\big(x(t+\delta)\big)-\nabla\phi\big(x(t)\big)\big\|^2=\rho\|v(t+\delta)-v(t)\|^2\end{aligned}\tag{18}$$

حيث تنتج المتراجحة من نظرية بايلون حداد [١١]. ينتج المطلوب بقسمة (١٨) على δ^2 وبأخذ النهاية عندما δ تسعى إلى الصفر من الأعلى. ■

يمكننا الآن اثبات تقارب المسارات الناتجة عن (١٥)

نظرية ١٣ ليكن $x_{.}, v_{.}\in\mathbb{R}^n$ و $\lambda>0$ بحيث $v_{.}=\nabla\phi\left(x_{.}\right)$ و لتكن $(x,\ v):[0,+\infty[\to\ (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ حل شامل قوي وحيد للنظام (١٥) ، نفرض أن $\varphi+\psi$ دالة KL محدودة من الأدنى و x محدود عندئذٍ الشروط الآتية محققة :

$$\begin{aligned}&\dot{x},\dot{v},\nabla\phi(x)+\nabla\psi(x)\\&\quad\in L^2([0,+\infty);\ \mathbb{R}^n),\langle\dot{x}(t),\dot{v}(t)\rangle\in L^1([0,+\infty);\ \mathbb{R})and\\&\lim_{t\to+\infty}x^{\cdot}(t)=\lim_{t\to+\infty}v^{\cdot}(t)=\lim_{t\to+\infty}(\nabla\phi(x(t))+\nabla\psi(x(t))=0\end{aligned}\tag{i}$$

(ii) يوجد $\bar{x}\in crit(\phi+\psi)$ (أي $\nabla(\phi+\psi)(\bar{x})=0$) بحيث $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\bar{x}$

البرهان : ليكن $\bar{x}\in crit(\phi+\psi)$ عنصر اختياري ($\nabla(\phi+\psi)(\bar{x})=0$) بحيث $\bar{x}\in\omega(x)$ عندئذٍ حسب(iii) من التمهيدية ٦ و التمهيدية ٧و ٨ لدينا :

$$\lim_{t\to+\infty}(\phi+\psi)\big(x(t)\big)=(\phi+\psi)(\bar{x})$$

نعتبر الحالتين الآتيتين : I. يوجد $\bar{t}\geq 0$ بحيث : $(\phi+\psi)(x(\bar{t}))=(\phi+\psi)(\bar{x})$

حسب (٧) نحصل لكل $t\geq\bar{t}$ على : $(\phi+\psi)(x(t))\leq(\phi+\psi)(x(\bar{t}))=(\phi+\psi)(\bar{x})$

بالتالي : $(\phi+\psi)(x(t))=(\phi+\psi)(\bar{x})$ لكل $t\geq\bar{t}$ ، حسب التمهيدية ٦ و (١٧) نجد أن :

$\dot{x}(t)=\dot{v}(t)=0$ لكل $t\in[\bar{t},+\infty)$ بالتالي x و v ثوابت على على $[\bar{t},+\infty)$.

II. لكل $t\geq 0$ يحقق $(\phi+\psi)(x(t))>(\phi+\psi)(\bar{x})$ نأخذ $\Omega:=\omega(x)$ ، باستخدام التمهيدية ٨ و حقيقة أن $\phi+\psi$ دالة KL و حسب التمهيدية ١٠ يوجد عددين موجبين ϵ و η و دالة مقعرة $\varphi\in\theta_n$ بحيث لكل u ينتمي للتقاطع

$$\begin{aligned}&\{u\in\mathbb{R}^n: dist(u,\Omega)<\epsilon\}\\&\quad\cap\{u\in\mathbb{R}^n:(\varphi+\psi)(\bar{x})<(\varphi+\psi)(u)<(\varphi+\psi)(\bar{x})+\eta\}\end{aligned}\tag{19}$$

لدينا : $$\phi'\big((\phi+\psi)(u)-(\phi+\psi)(\bar{x})\big)\cdot\|\nabla\phi(u)+\nabla\psi(u)\|\geq 1\tag{20}$$

ليكن $t_1\geq 0$ بحيث : $(\phi+\psi)\big(x(t)\big)<(\phi+\psi)(x)+\eta\quad for\ all\ \ t\geq t_1$

بما أن $\lim\limits_{t\to+\infty}dist(x(t),\Omega)=0$ حسب التمهيدية ٨ يوجد $t_2\geq 0$ بحيث لكل $t\geq t_2$ المتراجحة التالية محققة : $dist(x(t),\Omega)<\epsilon$بالتالي لكل $t\geq T:=max\{t_1,t_2\}$ فإن $x(t)$ ينتمي إلى التقاطع (١٩) بالتالي وفق (٢٠) لكل $t\geq T$ لدينا :

$$\phi'\big((\phi+\psi)(x(t))-(\phi+\psi)(\bar{x})\big)\cdot\|\nabla\phi(x(t))+\nabla\psi(x(t))\|\geq 1\tag{21}$$

من العلاقة الثانية في (١٥) نحصل لكل $t\in[T,+\infty)$:

$$(\lambda\|\dot{x}(t)\|+\|\dot{v}(t)\|).\varphi'\Big((\phi+\psi)\big(x(t)\big)-(\phi+\psi)(\bar{x})\Big)\geq 1\tag{22}$$

باستخدام التمهيدية ٦ و أن $\phi'>0$ و حسب العلاقة :

$$\frac{d}{dt}\varphi\left((\phi+\psi)\big(x(t)\big)-(\phi+\psi)(\bar{x})\right)$$
$$=\varphi'\left((\phi+\psi)\big(x(t)\big)-(\phi+\psi)(\bar{x})\right)\frac{d}{dt}\varphi(\phi+\psi)\big(x(t)\big)$$

نستنتج أن لكل $t\in[T,+\infty)$

$$\frac{d}{dt}\varphi\left((\phi+\psi)\big(x(t)\big)-(\phi+\psi)(\bar{x})\right)\le-\frac{\lambda\|\dot{x}(t)\|^2+\langle\dot{x}(t),\dot{v}(t)\rangle}{\lambda\|\dot{x}(t)\|+\|\dot{v}(t)\|}\qquad(23)$$

و حسب العلاقة (١٧) نجد :

$$\frac{d}{dt}\varphi\left((\phi+\psi)\big(x(t)\big)-(\phi+\psi)(\bar{x})\right)\le-\frac{\lambda\|\dot{x}(t)\|^2+\rho\|\dot{v}(t)\|^2}{\lambda\|\dot{x}(t)\|+\|\dot{v}(t)\|}\qquad(24)$$

ليكن $\alpha>0$ (لا تعتمد على t) بحيث :

$$-\frac{\lambda\|\dot{x}(t)\|^2+\rho\|\dot{v}(t)\|^2}{\lambda\|\dot{x}(t)\|+\|\dot{v}(t)\|}\le-\alpha\|\dot{x}(t)\|-\alpha\|\dot{v}(t)\|\ \forall t\ge 0\qquad(25)$$

يمكن اختيار $\alpha>0$ بحيث : $2\alpha\, max(\lambda,1)\ \le\ min(\lambda,\rho)$.

نستنتج من (٢٤) المتراجحة التالة المحققة لكل $t\ \ge\ T$

$$\frac{d}{dt}\varphi\left((\phi+\psi)\big(x(t)\big)-(\phi+\psi)(\bar{x})\right)\le-\alpha\|\dot{x}(t)\|-\alpha\|\dot{v}(t)\|\qquad(26)$$

بما أن φ محدودة من الأدنى ، بالمكاملة ينتج أن $\dot{x},\dot{v}\in L^1\left([0,+\infty);\,R^n\right)$ ومنه نحصل على أن $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ موجودة و منه نجد المطلوب. ■

٤ – معدلات التقارب:

في هذا الفصل ، نحقق في معدلات التقارب للمسارات $(x\,(t)\,،\,v\,(t))$ الناتجة عن النظام الديناميكي (١٥) عندما $t\to+\infty$.

تشير النتيجة الرئيسية لهذا الفصل إلى دوال *KL* التي تحقق التعريف ٣ ، لأجل $\varphi(s)\ =\ Cs^{1-\theta}$ حيث $C\ >\ 0$ و $\theta\ \in\ (0,1)$ ، نذكر التعريف التالي الذي تم اعتباره في [٥]

تعريف ٤ لتكن $f:\mathbb{R}^n\ \to\ \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ دالة خاصة و نصف مستمرة من الأدنى ، يقال عن الدالة f أنها تحقق خاصة *Lojasiewicz* إذا كان لكل $\bar{x}\in crit\,f$ يوجد $C,\varepsilon\ >\ 0$ و $\theta\ \in\ (0,1)$ بحيث :

(27) $|f(x)\ -\ f(\bar{x})|^{\theta}\ \le\ C\|x^*\|$ لكل x يحقق : $\|x-\bar{x}\|<\varepsilon$ و كل $x^*\in\ \partial_L f(x)$

وفقًا لـ [٦] ، تتحقق خاصية *KL* تلقائيًا في أي نقطة غير حرجة ،

وهي حقيقة تؤكد على التقيد بالنقاط الحرجة في التعريف أعلاه، العدد الحقيقي θ في التعريف أعلاه يسمى دليل *Lojasiewicz* للدالة f عند النقطة الحرجة $\bar{x}$.

معدلات التقارب التي تم الحصول عليها في النظرية التالية مستخلصة من [١٢] و [٥].

نظرية ١٤ ليكن $x_{.},v_{.}\ \in\mathbb{R}^n$ و $\lambda\ >\ 0$ بحيث $v_{.}\ =\nabla\phi\left(x_{.}\right)$ و لتكن $(x,\,v):[0,+\infty[\to\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ حل شامل قوي وحيد للنظام (١٥) ، نفرض أن x محدود و $\varphi+\psi$ دالة محدودة من الأدنى و تحقق التعريف ٣ لأجل $\varphi(s)\ =\ Cs^{1-\theta}$ حيث $C>\ 0$ و $\theta\in\ (0,1)$ يوجد $\bar{x}\in\ crit(\phi+\ \psi)$

(أي $\nabla(\phi + \psi)(\bar{x}) = 0$) بحيث $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \bar{x}$ و $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \nabla\phi(\bar{x}) = -\nabla\psi(\bar{x})$ ، لتكن θ دليل *Lojasiewicz* للدالة

$\phi + \psi$ عند النقطة الحرجة $\bar{x}$ ، وفق التعريف ٤ يوجد $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$ و$t_0 \geq 0$ بحيث لكل $t \geq t_0$ الشروط الآتية محققة :

(i) إذا كانت $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ عندئذٍ يتقارب x و v بالزمن المحدد

(ii) إذا كانت $\theta = \frac{1}{2}$ عندئذٍ : $\|x(t) - \bar{x}\| + \|v(t) - \nabla\phi(\bar{x})\| \leq a_1 exp(-b_1 t)$

(iii) إذا كانت $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ عندئذٍ : $\|x(t) - \bar{x}\| + \|v(t) - \nabla\phi(\bar{x})\| \leq (a_2 t + b_2)^{-(\frac{1-\theta}{2\theta-1})}$

البرهان : حسب برهان النظرية ١٣ فإن $\dot{x}, \dot{v} \in L^1([0, +\infty); \mathbb{R}^n)$ و يوجد $\bar{x} \in crit(\phi + \psi)$ أي :

$\nabla(\phi + \psi)(\bar{x}) = 0$ بحيث $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \bar{x}$ و $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \nabla\phi(\bar{x}) = -\nabla\psi(\bar{x})$ ،

لتكن θ دليل *Lojasiewicz* للدالة $\phi + \psi$ عند النقطة الحرجة $\bar{x}$ ، وفق التعريف ٤ ، نعرف الدالة

$\sigma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ بالشكل : $\sigma(t) = \int_t^{+\infty} \|\dot{x}(s)\| ds + \int_t^{+\infty} \|\dot{v}(s)\| ds$ لكل $t \geq 0$

نستنتج أن : (٢٨) $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \int_t^{+\infty} \|\dot{x}(s)\| ds \ \forall t \geq 0$

بالإضافة لذلك نلاحظ أن لكل $T \geq t$: $\|x(t) - \bar{x}\| = \left\| x(T) - \bar{x} - \int_t^T \dot{x}(s)\, ds \right\|$

$$\leq \|x(T) - \bar{x}\| + \int_t^T \dot{x}(s)\, ds$$

و بجعل $T \to +\infty$ نجد بشكل مشابه : $\|v(t) - \nabla\phi(\bar{x})\| \leq \int_t^{+\infty} \|\dot{v}(s)\| ds \ \forall t \geq 0$ (29)

نستنتج من (٢٨) و (٢٩) أن : $\|x(t) - \bar{x}\| + \|v(t) - \nabla\phi(\bar{x})\| \leq \sigma(t) \ \forall t \geq 0$ (30)

نفرض أن لكل $t \geq 0$ لدينا : $(\varphi + \psi)(x(t)) > (\varphi + \psi)(\bar{x})$ كما هو موضح في إثبات النظرية ١٣ ،

علاوة على ذلك ، باستخدام اثبات النظرية ١٣ مرة أخرى ، يوجد $\alpha > 0$ و$\varepsilon > 0, t_0 \geq 0$ بحيث لكل $t \geq t_0$ و حسب (٢٦) :

$$\alpha\|\dot{x}(t)\| + \alpha\|\dot{v}(t)\| + \frac{d}{dt}((\phi + \psi)(x(t)) - (\phi + \psi)(\bar{x}))^{1-\theta} \leq 0 \qquad (٣١)$$

و $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$. نستنتج باستخدام التكامل لكل $T \geq t \geq t_0$:

$$\alpha \int_t^T \|\dot{x}(s)\| ds + \alpha \int_t^T \|\dot{v}(s)\| ds + \big((\phi + \psi)(x(T)) - (\phi + \psi)(\bar{x})\big)^{1-\theta}$$
$$\leq ((\phi + \psi)(x(t)) - (\phi + \psi)(\bar{x}))^{1-\theta}$$

وبالتالي : (32) $\sigma\alpha(t) \leq \big((\phi + \psi)(x(t)) - (\phi + \psi)(\bar{x})\big)^{1-\theta} \quad \forall t \geq t_0$

بما أن θ دليل *Lojasiewicz* للدالة $\phi + \psi$ عند النقطة الحرجة $\bar{x}$ ، لدينا :

$$\left|(\phi + \psi)(x(t)) - (\phi + \psi)(\bar{x})\right|^{\theta} \leq C\lambda\|\dot{x}(t)\| + C\|\dot{v}(t)\|$$

و باستخدام (٣٢) نجد :

$$\sigma\alpha(t) \le (C\lambda\|\dot{x}(t)\| + C\|\dot{v}(t)\|)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \le (C\max(\lambda,1))^{\frac{1-\theta}{\theta}}.(\|\dot{x}(t)\| + \|\dot{v}(t)\|)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \quad (33)$$

بما أن :
$$\sigma(t) = -\|\dot{x}(t)\| - \|\dot{v}(t)\| \quad (34)$$

نتستنتج أنه يوجد $\alpha' \ge 0$ بحيث لكل $t \in [t_0,+\infty)$:

$$\dot{\sigma}(t) \le -\alpha'\big(\sigma(t)\big)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \quad (35)$$

إذا كانت $\theta = \frac{1}{2}$ عندئذٍ : $\dot{\sigma}(t) \le -\alpha'\,\sigma(t)$ لكل $t \in [t_0,+\infty)$.

بالضرب بـ $exp(\alpha')$ و المكاملة من t_0 إلى t نستنتج أنه يوجد $a_1, b_1 > 0$ بحيث :

$$\sigma(t) \le a_1\, exp(-b_1 t)\ \forall t \ge t_0$$

ومنه نجد المطلوب في (ii) حسب (٣٠) .

نفرض أن $0 < \theta < \frac{1}{2}$، حسب (٣٥) نحصل : $\frac{d}{dt}\big(\sigma(t)\big)^{\frac{1-2\theta}{1-\theta}} \le -\alpha'\frac{1-2\theta}{1-\theta}$

لكل $t \in [t_0,+\infty)$.

بالمكاملة نحصل على : $\big(\sigma(t)\big)^{\frac{1-2\theta}{1-\theta}} \le -\bar{\alpha}t + \bar{\beta}\quad \forall t \ge t_0$ حيث $\bar{\alpha} > 0$

بالتالي يوجد $T \ge 0$ بحيث : $\sigma(T) \le 0\ \ \forall t \ge T$ و التي تقتضي أن x و y ثابتين على المجال $[T,+\infty)$

أخيراً ، نفرض أن $0 < \theta < \frac{1}{2}$، حسب (٣٥) نحصل : $\frac{d}{dt}\big(\sigma(t)\big)^{\frac{1-2\theta}{1-\theta}} \le \alpha'\frac{2\theta-1}{1-\theta}$

لكل $t \in [t_0,+\infty)$ ، بالمكاملة نحصل على : $\sigma(t) \le (a_2\, t + b_2)^{-(\frac{1-\theta}{2\theta-1})}\ \forall t \ge t0$

حيث $a_2, b_2 > 0$ ، ومنه نجد المطلوب في (iii) حسب (٣٠) ■

٤ النتائج و التوصيات :

تم اثبات أن مجموعة نقاط النهاية للمسار x محتواة في مجموعة النقاط الحرجة لدالة الهدف $\varphi+\psi$ ، هذه المجموعة يُنظر إليها هنا على أنها مجموعة أصفار تحت التفاضل المحدد لها .

تشير النتيجة الرئيسية لهذا البحث إلى دوال KL التي تحقق التعريف ٣ حيث تم إجراء تحليل مقارب للنظام الديناميكي (٣) في غياب تحدب الدالة ψ ، وبافتراض أن دالة الهدف في (٢) تحقق خاصية Kurdyka– Lojasiewicz في ضوء النتائج السابقة نوصي بتوسيع الدراسة لتشمل حالة الدالة φ غير محدبة و المزيد من مسائل الأمثليات ذات التوابع التي تتمتع بخواص مهمة غير مدروسة حتى الآن.

المراجع :

1. B. Abbas, *An asymptotic viscosity selection result for the regularized Newton dynamic*, Journal of nonlinear and convex analysis volume 20,number 1,53-72, 2019
2. B. Abbas, H. Attouch, B.F. Svaiter, *Newton-like dynamics and forward-backward methods for structured monotone inclusions in Hilbert spaces*, Journal of Optimization Theory and its Applications 161(2), 331–360, 2014
3. F. Alvarez, H. Attouch, J. Bolte, P. Redont, *A second-order gradient-like dissipative dynamical system with Hessian-driven damping*. Application to optimization and mechanics, Journal de Math´ematiques Pures et Appliqu´ees (9) 81(8), 747–779, 2002
4. H. Attouch, G. Buttazzo, G. *Michaille, Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization*, Second Edition, MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia, 2014
5. H. Attouch, J. Bolte, *On the convergence of the proximal algorithm for nonsmooth functions involving analytic features*, Mathematical Programming 116(1-2) Series B, 5–16, 2009
6. H. Attouch, J. Bolte, P. Redont, A. Soubeyran, *Proximal alternating minimization and projection methods for nonconvex problems:* an approach based on the Kurdyka- Lojasiewicz inequality, Mathematics of Operations Research 35(2), 438–457, 2010
7. H. Attouch, J. Bolte, B.F. Svaiter, *Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems: proximal algorithms,* forward-backward splitting, and regularized GaussSeidel methods, Mathematical Programming 137(1-2) Series A, 91–129, 2013
8. H. Attouch, M.-O. Czarnecki, *Asymptotic behavior of coupled dynamical systems with multiscale aspects*, Journal of Differential Equations 248(6), 1315–1344, 2010
9. H. Attouch, P.-E. Maing´e, P. Redont, *A second-order differential system with Hessian-driven damping; application to non-elastic shock laws*, Differential Equations and Applications 4(1), 27–65, 2012
10. H. Attouch, B.F. Svaiter, *A continuous dynamical Newton-like approach to solving monotone inclusion*s, SIAM Journal on Control and Optimization 49(2), 574–598, 2011
11. H.H. Bauschke, P.L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces,* CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2011
12. J. Bolte, A. Daniilidis, A. Lewis, *The Lojasiewicz inequality for nonsmooth subanalytic functions with applications to subgradient dynamical systems*, SIAM Journal on Optimization 17(4), 1205–1223, 2006
13. J. Bolte, A. Daniilidis, A. Lewis, *M. Shota, Clarke subgradients of stratifiable functions,* SIAM Journal on Optimization 18(2), 556–572, 2007
14. J. Bolte, A. Daniilidis, O. Ley, L. Mazet, *Characterizations of Lojasiewicz inequalities: subgradient flows*, talweg, convexity, Transactions of the American Mathematical Society 362(6), 3319–3363, 2010

15. J. Bolte, T.P. Nguyen, J. Peypouquet, B.W. *Suter, From error bounds to the complexity of first-order descent methods for convex functions,* Mathematical Programming, DOI 10.1007/s10107-016-1091-6

16. J. Bolte, S. Sabach, M. Teboulle, *Proximal alternating linearized minimization for nonconvex and nonsmooth problems,* Mathematical Programming Series A (146)(1–2), 459–494, 2014

17. J.M. Borwein, Q.J. Zhu, *Techniques of Variational Analysis, Springer,* New York, 2005

18. R.I. Bot¸, E.R. Csetnek, S. L´aszl´o, *An inertial forward-backward algorithm for the minimization of the sum of two nonconvex functions,* EURO Journal on Computational Optimization 4, 3–25, 2016

19. R.I. Bot¸, E.R. Csetnek*, Approaching nonsmooth nonconvex optimization problems through first order dynamical systems with hidden acceleration and Hessian driven damping terms,* Set-Valued Var. Anal (2018)

20. R.I. Bot¸, E.R. Csetnek*, A forward-backward dynamical approach to the minimization of the sum of a nonsmooth convex with a smooth nonconvex function, to appear in ESAIM*: Control, Optimisation and Calculus of Variations, arXiv:1507.01416, 2015

21. R.I. Bot¸, E.R. Csetnek, *Levenberg-Marquardt dynamics associated to variational inequaliti*es, Set-Valued Var. Anal (2017)

22. H. Br´ezis, *Op´erateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* North-Holland Mathematics Studies No. 5, Notas de Matem´atica (50), NorthHolland/Elsevier, New York, 1973

23. E. Chouzenoux, J.-C. Pesquet, A. Repett*i, Variable metric forward-backward algorithm for minimizing the sum of a differentiable function and a convex function,* Journal of Optimization Theory and its Applications 162(1), 107–132, 2014

24. P. Frankel, G. Garrigos, J. Peypouquet, *Splitting methods with variable metric for Kurdyka- Lojasiewicz functions and general convergence rates, Journal of Optimization Theory and its Applications* 165(3), 874–900, 2015

25. A. Haraux, *Syst`emes Dynamiques Dissipatifs et Applications, Recherches en Math´e- matiques Appliqu´ees 17, Masson,* Paris, 1991

26. A. Haraux, M. Jendoubi, *Convergence of solutions of second-order gradient-like systems with analytic nonlinearities*, Journal of Differential Equations 144(2), 313–320, 1998

27. R. Hesse, D.R. Luke, S. Sabach, M.K. Tam, *Proximal heterogeneous block input-output method and application to blind ptychographic diffraction imaging,* SIAM Journal on Imaging Sciences 8(1), 426–457, 2015

28. K. Kurdyka, *On gradients of functions definable in o-minimal structures,* Annales de l'institut Fourier (Grenoble) 48(3), 769–783, 1998

29. G. Li, T.K. Pong, Calculus of the exponent of Kurdyka- Lojasiewicz inequality and its applications to linear convergence of first-order methods, *Found Comput Math* **18**, 1199–1232 (2018).

30. S. Lojasiewicz, *Une propri´et´e topologique des sous-ensembles analytiques r´eels, Les Equations ´ aux D´eriv´ees Partielles*, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique Par ´ is, 87– 89, 1963

31. B. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation*, I: Basic Theory, II: Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2006

32. P. Ochs, Y. Chen, T. Brox, T. Pock, iPiano: *Inertial proximal algorithm for non-convex optimization*, SIAM Journal on Imaging Sciences 7(2), 1388–1419, 2014

33. R.T. Rockafellar, R.J.-B. Wets, *Variational Analysis, Fundamental Principles of Mathematical Sciences 317*, Springer-Verlag, Berlin, 1998

34. L. Simon, *Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems, Annals of Mathematics* (2) 118, 525–571, 1983

35. C. Z˘alinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces, World Scientific*, Singapore, 2002

36. G. J. Minty, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces*, Duke Mathematical Journal, 29 (1962), pp. 341–346.