

طريقة تجميع عددية لحل مسائل القيم الابتدائية والحدية في المعادلات التفاضلية من مراتب عالية

د. سليمان محمد محمود*

د. نضال إبراهيم حسن**

بشار بلول***

(تاريخ الإيداع 2022 /8/8 – تاريخ النشر 2022 /10/1)

□ ملخص □

نقدم في هذا البحث طريقة تجميع عددية لإيجاد الحل العددي لمسائل القيم الابتدائية و الحدية في المعادلات التفاضلية من المرتبتين الثالثة عشرة والرابعة عشرة التي لها تطبيقات كثيرة في حقول علمية متعددة ، في الفيزياء والكيمياء والميكانيك والهندسة الخ. تعتمد الطريقة المقترحة على إنشاء كثيرات حدود من الدرجة الثامنة عشرة كتقريب لحل المسألة، واستخدام خمس نقاط تجميع تحقق شروط المسألة. تم إثبات وجود الحل العددي وإثبات التناسق والتقارب عندما تم تطبيق الطريقة المقترحة لمسألة اختبار من النمط نفسه. كما تمت تحديد دالة الخطأ النظري للطريقة. قمنا باختبار فعالية الطريقة المقترحة بحل أربع مسائل خطية وغير خطية، حيث تشير النتائج العددية والمقارنات مع طرائق الأخرى إلى أهمية النتائج التي تم التوصل إليها.

الكلمات المفتاحية: كثيرات حدود من الدرجة 18، معادلات تفاضلية عادية من مراتب عالية، الخطأ المققطع الشامل ، الاتساق.

* أستاذ في قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة تشرين

** أستاذ _ قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة طرطوس

*** طالب ماجستير _ قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة طرطوس

Numerical Collocation Method for Soling Initial and Boundary Value Problems of High-Order Differential Equations

Dr. Suliman M. Mahmood *

Dr. Nidal E. Hassan **

Bashar Balloul***

(Received 8/8/2022. Accepted 1/10/2022)

□ABSTRACT □

In this research, we present a numerical collocation method to find the numerical solution to initial and boundary values problems in differential equations of the thirteenth and fourteenth orders, which have many applications in various scientific fields, in physics, chemistry, mechanics, engineering, etc. The proposed method is based on constructing an eighteenth degree polynomial as an approximation to solve the problem, and using five collocation points that satisfy the conditions of the problem. The existence of the numerical solution and the proof of consistency and convergence were demonstrated when the proposed method was applied to a test problem of the same type. The theoretical error function of the method is also defined. We tested the effectiveness of the proposed method by solving four linear and non-linear problems, where the numerical results and comparisons with others indicate the importance of the results obtained.

Keywords: Polynomials of Degree eighteen, High-Order Differential Equations, Global Truncation Error, Consistency.

* prof _ Depart of mathematic _ Faculty of science _ Tishreen university .

** prof _ Depart of mathematic _ Faculty of science _ Tartous university .

*** postgraduate student Depart of mathematic _ Faculty of science _ Tartous university .

مقدمة: Introduction

تعد المعادلات التفاضلية من مراتب عالية ذات تطبيقات واسعة في مختلف العلوم الهندسية والتطبيقية. بشكل عام، تستخدم في نمذجة التغيرات الكمية الفيزيائية، على سبيل المثال الاهتزازات الميكانيكية و الحركة الديناميكية البنوية، انتقال الحرارة ، نظرية الدارات الكهربائية. ويلجأ الباحثون لحلها نظرا لأهميتها الرياضية وتطبيقاتها في الفيزياء الرياضية والفروع الهندسية. يهتم هذا البحث بإيجاد الحلول العددية لمسائل من المعادلات التفاضلية العادية من مراتب عالية. سنقوم أولاً بدراسة إيجاد الحلول العددية لمسألة القيمة الحدية في المعادلات التفاضلية الخطية المعممة من المرتبة الرابعة عشرة وهي المسألة الأولى الآتية:

$$u^{(14)}(x) + \sum_{i=1}^{14} q_i(x)u^{(14-i)}(x) = f(x), \quad x \in [a, b],$$

(1)

مع الشروط الحدية:

$$u^{(2j)}(a) = \alpha_j, \quad u^{(2j)}(b) = \beta_j, \quad j = 0, 1, \dots, 6 \quad (2)$$

حيث: α_j and β_j ثوابت حقيقية لأجل $j = 0, 1, 2, \dots, 6$ و $q_i(x), f(x)$ دالتين مستمرتين على المجال $[a, b]$.

المسألة الثانية هي مسألة القيمة الابتدائية في المعادلات التفاضلية غير الخطية المعممة من

المرتبة الرابعة عشرة:

$$u^{(14)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(13)}(x)), \quad a \leq x \leq b,$$

(3)

مع الشروط الابتدائية:

$$u^{(i)}(a) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, 13;$$

(4)

حيث: γ_i ثوابت حقيقية منتهية لأجل $i = 0, 1, 2, \dots, 13$ و f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$.

بعض الدراسات المرجعية

طبق Iftikhar and Rehman في [7, 2014] طريقة التحويل التفاضلي لحل مسألة القيم الحدية من المرتبة الثالثة عشرة وبين الباحثون الفعالية والدقة العددية بحل مثالين عددين. استخدم Zhi and Li في [13, 2014] موجيات شانون (Shannon Wavelets) لإيجاد الحل العددي لمسائل القيم الحدية الخطية من المراتب 12, 8, 4 واختبروا طريقتهم بحل أربع مسائل اختبار. قدم Al-Hayani في [2, 215] طريقة تحليل أدوميان (Adomian) لحل مسألة القيم الحدية الخطية وغير الخطية من المرتبة الثانية عشرة، واختبر الطريقة بحل ثلاث مسائل اختبار.

درس Njoseh and Mamadu في [12, 2016] طريقة تقريب بسلسلة القوى لحل مسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية من المراتب 13, 12, 10 وتم حل ثلاث أمثلة اختبار لتوضيح الكفاءة والدقة العددية لطريقتهم. كما طوروا Njoseh and Mamadu في [11, 2017] طريقة تكرار المتغير

التقريبية التحليلية لحل مسألة القيم الحدية من المرتبة 13 مع حل مسألتين أحدها خطية والثانية غير خطية. أنشأ Mahmoud and Ehsaan في [10, 2017] كثيرات حدود شرائحية من الدرجة السادسة عشرة مع خمس نقاط تجميع وطبقت هذه التقريبات لحل مسألة القيم الحدية من المرتبة الثانية عشرة، وتم حل ثلاث أمثلة اختبار لتوضيح الكفاءة والدقة العددية لطريقتهم.

قدم Aasma and Naeem في [9, 2018] تقنية شرائحية تكعيبية من نمط كثيرات حدود مثلثية استخدمت لحل مسألة القيم الحدية من المرتبة 14 واختبروا الطريقة بحل مسألتين خطية وغير خطية.

قدم FALADE في [5, 2019] طريقة تقريب بسلسلة قوى ملائمة أسيا لحل مسائل القيم الحدية من المراتب 12,9,8,6 واختبر الطريقة بحل مثال من كل مرتبة.

قدم AMIN وآخرون في [3, 2020] خوارزمية عددية استخدمت موجات Haar لحل مسألة القيم الحدية من المرتبة 12 واختبروا الفعالية بحل خمس مسائل خطية وغير خطية.

استخدم Islam في [8, 2020] كثيرات حدود بيزير (Bezier) لحل مسائل القيم الحدية من المراتب 12,10 واختبر الطريقة بحل أربع مسائل خطية وغير خطية. طور Hassan في [6, 2020] طريقة عددية تكرارية تعتمد على كثيرات حدود من الدرجة السابعة عشرة مع أربع نقاط تجميع لحل مسألة القيم الحدية من المرتبة الثالثة عشرة، وتم حل مسألتين اختبار إحداهما خطية والأخرى غير خطية.

قدم Abbas وآخرون في [1, 2021] طريقة جاليركين Galerkin مع كثيرا حدود تشيبيتشيف لحل مسائل القيم الحدية من المرتبتين 12,10 واختبر الطريقة بحل ثلاث مسائل خطية وغير خطية.

قدم Arifeen وآخرون في [4, 2021] تقنية موجات Haar لحل مسائل القيم الحدية من المراتب 13,12,10 واختبر الطريقة بحل ست مسائل خطية وغير خطية.

أهداف البحث: Objectives of Research

نطور في هذا البحث طريقة تجميع عددية لإيجاد الحلول العددية لبعض المسائل في المعادلات التفاضلية العادية من مراتب عالية، المسألة الأولى هي مسألة المعادلات التفاضلية الخطية المعممة من المرتبة الرابعة عشرة مع شروط حدية والمسألة الثانية هي مسألة المعادلات التفاضلية غير الخطية المعممة من المرتبة الرابعة عشرة مع شروط ابتدائية. تهدف الدراسة إلى إنشاء كثيرات حدود من الدرجة 18 مع خمس نقاط تجميع كتقريبات لدالة حل المسألة المطروحة، ثم تحديد دالة الخطأ النظري للطريقة العددية المقترحة ودراسة الاتساق (Consistency) والاستقرار والتقارب لضمان الدقة والفعالية في الحلول العددية. كما سنقوم بتنفيذ خوارزمية الطريقة المقترحة بلغة البرمجة عالية المستوى Mathematica وتطبيق الطريقة المقترحة لحل بعض مسائل الاختبار الخطية وغير الخطية ومقارنة نتائجنا مع نتائج لطرائق أخرى.

طرائق البحث ومواده: Methodology

تعتمد طرائق البحث على مفاهيم التحليل الرياضي وبعض المفاهيم في الجبر الخطي والتحليل الدالي والخوارزميات والبرمجة وتقنيات التحليل العددي. وتم الاطلاع على بعض الطرائق والتقنيات العددية في المراجع العلمية التي تطرقت لحل مسائل من النمط المعادلات التفاضلية من مراتب عالية. تم إجراء هذا البحث في قسم الرياضيات-كلية العلوم- جامعة طرطوس في الفترة الواقعة بين أيار 2022 و آب 2022.

1- إنشاء كثيرات حدود تقريبية:

نستخدم تقسيمات منتظمة لمجال الحل $[a, b]$ ، كالاتي:

حيث $k = 0, 1, \dots, N$ ، $x_k = a + kh$ ، طول الخطوة $h = (b - a) / n$ ، نأخذ $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثامنة عشرة كتقريب لحل المسألة $u(x)$ و لأجل كل $x \in [x_k, x_{k+1}]$ يعطى هذا التقريب كالاتي:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{13} \frac{(x - x_k)^i}{i!} P_k^{(i)} + \frac{(x - x_k)^{14}}{14!} C_{k,1} + \frac{(x - x_k)^{15}}{15!} C_{k,2} + \frac{(x - x_k)^{16}}{16!} C_{k,3} + \frac{(x - x_k)^{17}}{17!} C_{k,4} + \frac{(x - x_k)^{18}}{18!} C_{k,5} ; k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (5)$$

حيث $P_k^{(i)} = P^{(i)}(x_k)$, $(i = 0, 1, \dots, 14)$

يحقق التقريب $P(x)$ الشروط الآتية:

$$P_k^{(m)}(x_k) = u^{(m)}(x_k), k = 0, 1, \dots, N - 1; m = 0, 1, \dots, 14 \quad \blacksquare$$

$$P_k^{(m)}(x_{k+1}) = P_{k+1}^{(m)}(x_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N - 2, m = 0, 1, \dots, 14 \quad \blacksquare$$

نعرف خمس نقاط تجميع في كل مجال جزئي كالاتي:

$$x_{k+z_j} = x_k + h z_j, (j = 1, 2, \dots, 5), \quad (6)$$

ترتبط النقاط المعطاة بالعلاقة (6) مع أربع وسطاء تحدد بالشكل:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1 \quad (7)$$

الآن، سنقوم بتحويل مسألة القيم الحدية (1)-(2) إلى ثمانية مسائل قيم ابتدائية خاصة، ثم تطبيق كثيرات الحدود التقريبية (5) مع نقاط التجميع (6)-(7).

الحل العددي للمسألة الحدية:

بفرض أن $u(x)$ حل وحيد لمسألة القيم الحدية (1)-(2) عندئذ فإن هذا الحل مرتبط بحلول ثمانية مسائل قيم ابتدائية خاصة نرمزها بالترميزات $\{V_i(x)\}_{i=0}^7$ ، بحيث أنه من أجل سبعة ثوابت حقيقية c_1, c_2, \dots, c_7 يتحقق لدينا:

$$u(x) = V_0(x) + \sum_{k=1}^7 c_k V_k(x) \quad (8)$$

حيث سنقدم فيما يأتي مسائل القيم الابتدائية الخاصة، والمسألة الابتدائية الأولى غير متجانسة وتعطى بالشكل:

$$V_0^{(14)}(x) + \sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_0^{(14-i)}(x) = f(x), a \leq x \leq b, \quad (9)$$

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$V_0^{(2j)}(a) = \alpha_j, V_0^{(2j+1)}(a) = 0, j = 0, 1, \dots, 6 \quad (9a)$$

المسألة الابتدائية الثانية متجانسة وتعطى بالشكل:

$$V_1^{(14)}(x) + \sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_1^{(14-i)}(x) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

(10)

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$V_1^{(2j)}(a) = 0, \quad V_1'(a) = 1, \quad V_1^{(2j+1)}(a) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

(10a)

المسألة الابتدائية الثالثة متجانسة وتعطى كالآتي:

$$V_2^{(14)}(x) + \sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_2^{(14-i)}(x) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

(11)

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$V_2^{(j)}(a) = 0, \quad V_2^{(3)}(a) = 1, \quad j = 0, 1, \dots, 13, \quad j \neq 3$$

(11a)

المسألة الابتدائية الرابعة متجانسة وتعطى:

$$V_3^{(14)}(x) + \sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_3^{(14-i)}(x) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

(12)

مع الشروط الابتدائية:

$$V_3^{(j)}(a) = 0, \quad V_3^{(5)}(a) = 1, \quad j = 0, 1, \dots, 13, \quad j \neq 5$$

(12a)

المسألة الابتدائية الخامسة متجانسة وتعطى:

$$V_4^{(14)}(x) + \sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_4^{(14-i)}(x) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

(13)

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$V_4^{(j)}(a) = 0, \quad V_4^{(7)}(a) = 1, \quad j = 0, 1, \dots, 13, \quad j \neq 7$$

(13a)

المسألة الابتدائية السادسة متجانسة:

$$V_5^{(14)}(x) + \sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_5^{(14-i)}(x) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

(14)

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$V_5^{(j)}(a) = 0, \quad V_5^{(9)}(a) = 1, \quad j = 0, 1, \dots, 13, \quad j \neq 9$$

(14a)

المسألة الابتدائية السابعة المتجانسة:

$$V_6^{(14)}(x) + \sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_6^{(14-i)}(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (15)$$

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$V_6^{(j)}(a) = 0, V_6^{(11)}(a) = 1, j = 0, 1, \dots, 13, \quad j \neq 11 \quad (15a)$$

المسألة الابتدائية الثامنة والأخيرة المتجانسة:

$$V_7^{(14)}(x) + \sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_7^{(14-i)}(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (15)$$

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$V_7^{(j)}(a) = 0, V_7^{(13)}(a) = 1, j = 0, 1, \dots, 13, \quad j \neq 13 \quad (15a)$$

الآن سنثبت أن الدالة $u(x) = V_0(x) + \sum_{k=1}^7 c_k V_k(x)$ هي حل وحيد لمسألة القيمة الحدية

المطروحة (1)-(2)، إذ نجد أنه لأجل الثوابت الحقيقية c_1, c_2, \dots, c_7 يتحقق لدينا:

$$\begin{aligned} u^{(14)}(x) &= V_0^{(14)}(x) + \sum_{k=1}^7 c_k V_k^{(14)}(x) = -\sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_0^{(14-i)}(x) + f(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^7 c_k [-\sum_{i=1}^{14} q_i(x) V_k^{(14-i)}(x)] \\ &= -\sum_{i=1}^{14} q_i(x) [V_0^{(14-i)}(x) + \sum_{k=1}^7 c_k V_k^{(14-i)}(x)] + f(x) = -\sum_{i=1}^{14} q_i(x) [u^{(14-i)}(x) + f(x)] \end{aligned}$$

$$\cdot u^{(i)}(x) = V_0^{(i)}(x) + \sum_{k=1}^7 c_k V_k^{(i)}(x), \quad i = 0, 1, \dots, 13 \quad \text{حيث}$$

ويتبقى إثبات أن $u(x)$ يحقق الشروط الحدية (2) للمسألة المذكورة، ونبدأ بشروط بداية المجال

كالآتي:

$$u^{(2j)}(a) = V_0^{(2j)}(a) + \sum_{k=1}^7 c_k V_k^{(2j)}(a) = \alpha_j + \sum_{k=1}^7 c_k (0) = \alpha_j, \quad (j = 0, \dots, 6)$$

ولتحقيق بقية الشروط (2) في نهاية المجال، نضع منظومة المعادلات الآتية:

$$u^{(2j)}(b) = V_0^{(2j)}(b) + \sum_{k=1}^7 c_k V_k^{(2j)}(b) \equiv \beta_j, \quad (j = 0, 1, \dots, 6), \quad (16)$$

ويحل منظومة المعادلات الخطية (16) ينتج لدينا:

$$C = V_b^{-1} B$$

$$V_b = \begin{bmatrix} V_1(b) & V_2(b) & V_3(b) & V_4(b) & V_5(b) & V_6(b) & V_7(b) \\ V_1^{(2)}(b) & V_2^{(2)}(b) & V_3^{(2)}(b) & V_4^{(2)}(b) & V_5^{(2)}(b) & V_6^{(2)}(b) & V_7^{(2)}(b) \\ V_1^{(4)}(b) & V_2^{(4)}(b) & V_3^{(4)}(b) & V_4^{(4)}(b) & V_5^{(4)}(b) & V_6^{(4)}(b) & V_7^{(4)}(b) \\ V_1^{(6)}(b) & V_2^{(6)}(b) & V_3^{(6)}(b) & V_4^{(6)}(b) & V_5^{(6)}(b) & V_6^{(6)}(b) & V_7^{(6)}(b) \\ V_1^{(8)}(b) & V_2^{(8)}(b) & V_3^{(8)}(b) & V_4^{(8)}(b) & V_5^{(8)}(b) & V_6^{(8)}(b) & V_7^{(8)}(b) \\ V_1^{(10)}(b) & V_2^{(10)}(b) & V_3^{(10)}(b) & V_4^{(10)}(b) & V_5^{(10)}(b) & V_6^{(10)}(b) & V_7^{(10)}(b) \\ V_1^{(12)}(b) & V_2^{(12)}(b) & V_3^{(12)}(b) & V_4^{(12)}(b) & V_5^{(12)}(b) & V_6^{(12)}(b) & V_7^{(12)}(b) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_0 - V_0(b) \\ \beta_1 - V_0^{(2)}(b) \\ \beta_2 - V_0^{(4)}(b) \\ \beta_3 - V_0^{(6)}(b) \\ \beta_4 - V_0^{(8)}(b) \\ \beta_5 - V_0^{(10)}(b) \\ \beta_6 - V_0^{(12)}(b) \end{bmatrix},$$

حيث

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_7]^T$$

وللحصول على الحل العددي، نطبق كثيرات الحدود (5) مع نقاط التجميع (6)-(7) إلى كل مسألة من مسائل القيم الابتدائية (9)-(16)، فنحصل على الحلول العددية $P_i(x_k)$ ($i=0,1,\dots,7$) للمسائل المذكورة على الترتيب لأجل كل $1 \leq k \leq N$ ، حيث يكون $V_i^{(i)}(x) \approx P_i^{(i)}(x)$ لأجل $i=0,1,\dots,7$ وهكذا تعطى الحلول العددية لحل المسألة القيم الحدية (1)-(2)، ومشتقاته كمجموع لحلول مسائل القيم الابتدائية كالاتي:

$$P^{(i)}(x_k) = P_0^{(i)}(x_k) + \sum_{j=1}^7 c_j P_j^{(i)}(x_k), \quad i = 0,1,\dots,13; k = 0,1,\dots,N.$$

(17)

وجود الحل العددي :

لنأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة عشرة في الحالة الآتية:

$$\begin{cases} u^{(14)}(x) = F[x, u(x), u'(x), \dots, u^{(13)}(x)], & x \in [a, b] \\ u^{(j)}(a) = u_j, & j = 0,1,\dots,13. \end{cases} \quad (18)$$

يفرض أن $F : [a, b] \times C[a, b] \times \dots \times C^{13}[a, b] \rightarrow R$ دالة ملساء كفاية، يقال إن الدالة F

تحقق شرط ليبشيز إذا تحققت متراجحة ليبشيز الآتية:

$$|F(x, u_0, u_1, \dots, u_{13}) - F(x, \ddot{y}_0, \ddot{y}_1, \dots, \ddot{y}_{13})| \leq L \sum_{i=0}^{13} |u_i - \ddot{y}_i|,$$

$$\forall (x, u_0, u_1, \dots, u_{13}), (x, \ddot{y}_0, \ddot{y}_1, \dots, \ddot{y}_{13}) \in [a, b] \times R^{13}$$

حيث L يدعى بثابت ليبشيز للدالة F .

إن تحقيق شرط ليبشيز ضروري لضمان وجود ووحدانية الحل $u(x)$ لمسألة الاختبار (18).

نقوم بتطبيق كثيرة الحدود التقريبية (5) ومشتقاتها مع نقاط التجميع (6)-(7) إلى مسألة المعادلات

التفاضلية (18)، نحصل على جملة المعادلات الجبرية الآتية:

$$C_{k,1} + (h z_j)C_{k,2} + \frac{(h z_j)^2}{2!} C_{k,3} + \frac{(h z_j)^3}{3!} C_{k,4} + \frac{(h z_j)^4}{4!} C_{k,5} = F(x_{k+z_j}, P(x_{k+z_j}), P'(x_{k+z_j}), \dots, P^{(13)}(x_{k+z_j})), \quad j=1,2,\dots,5, \quad k=0,1,\dots,N-1, \quad (19)$$

$$P^{(i)}(a) = P_i, \quad i = 0,1,\dots,13. \quad (19a)$$

نعيد كتابة جملة المعادلات (19) بصيغة المصفوفات كالآتي:

$$A \bar{C}_k = \hat{F}_k \quad (20)$$

حيث:

$$F_{k+z_j} = F[x_{k+z_j}, P(x_{k+z_j}), P'(x_{k+z_j}), \dots, P^{(13)}(x_{k+z_j})], \quad j=1,2,\dots,5,$$

$$\bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k,1} \\ hC_{k,2} \\ h^2C_{k,3} \\ h^3C_{k,4} \\ h^4C_{k,5} \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_k = \begin{bmatrix} F_{k+z_1} \\ F_{k+z_2} \\ F_{k+z_3} \\ F_{k+z_4} \\ F_{k+1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \frac{z_1^2}{2} & \frac{z_1^3}{6} & \frac{z_1^4}{24} \\ 1 & z_2 & \frac{z_2^2}{2} & \frac{z_2^3}{6} & \frac{z_2^4}{24} \\ 1 & z_3 & \frac{z_3^2}{2} & \frac{z_3^3}{6} & \frac{z_3^4}{24} \\ 1 & z_4 & \frac{z_4^2}{2} & \frac{z_4^3}{6} & \frac{z_4^4}{24} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

نجد في جملة المعادلات (20) أن قيمة محدد المصفوفة A تعطى بـ $\det(A) = 1.024 \times 10^{-7}$

لأجل القيم الموزعة بانتظام لوسطاء التجميع $z_4 = 0.8, z_3 = 0.6, z_2 = 0.4, z_1 = 0.2$ وبالتالي فالجملة موجودة وتملك حل وحيد دائماً. عندئذ تحسب المجاهيل \bar{C}_k من (20) وتعوض تدريجياً في كثيرة الحدود التقريبية (5) التي تعطينا الحل العددي كالآتي :

$$P(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^{13} \frac{h^i}{i!} P_k^{(i)} + \frac{h^{14}}{14!} C_{k,1} + \frac{h^{15}}{15!} C_{k,2} + \frac{h^{16}}{16!} C_{k,3} + \frac{h^{17}}{17!} C_{k,4} + \frac{h^{18}}{18!} C_{k,5}, \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

حيث $h = x_{k+1} - x_k$.

2- الخطأ المقطع الموضوعي: Local Truncation Error

تعريف [10]:

يقال عن طريقة عددية إنها متناسقة من المرتبة p إذا كان $\tau_k \equiv O(h^p)$ $\|\tau\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq N}$

حيث τ_k خطأ الاقتران الموضوعي للطريقة عند x_k .

بفرض أن $u(x) \in C^{19}[a, b]$ حل وحيد للمسألة (1)-(2) وأن $P(x)$ الحل التقريبي. وبفرض أن $T = (\bar{\tau}_k)$ متجهة من البعد خمسة، و $\bar{\tau}_k$ الخطأ المتقطع الموضوعي. وبتطبيق الحل التقريبي $P(x)$ مع نقاط التجميع (6)-(7)، وباختيار قيم الوسطاء $z_4 = 0.8, z_3 = 0.6, z_2 = 0.4, z_1 = 0.2$ مع وضع $p_k^{(m)} = P^{(m)}(x_k), (m=0,1,\dots,14)$ ، و $u(x_{k+z_j}) = u(x_k + hz_j)$ ، نحصل على صيغة الخطأ المتقطع الموضوعي بالشكل:

$$\bar{\tau}_k = M \bar{C}_k + \bar{\Psi}_k, \quad (21)$$

حيث

$$M = \begin{bmatrix} \frac{(z_1 h)^{14}}{14!} & \frac{(z_1 h)^{15}}{15!} & \frac{(z_1 h)^{16}}{16!} & \frac{(z_1 h)^{17}}{17!} & \frac{(z_1 h)^{18}}{18!} \\ \frac{(z_2 h)^{14}}{14!} & \frac{(z_2 h)^{15}}{15!} & \frac{(z_2 h)^{16}}{16!} & \frac{(z_2 h)^{17}}{17!} & \frac{(z_2 h)^{18}}{18!} \\ \frac{(z_3 h)^{14}}{14!} & \frac{(z_3 h)^{15}}{15!} & \frac{(z_3 h)^{16}}{16!} & \frac{(z_3 h)^{17}}{17!} & \frac{(z_3 h)^{18}}{18!} \\ \frac{(z_4 h)^{14}}{14!} & \frac{(z_4 h)^{15}}{15!} & \frac{(z_4 h)^{16}}{16!} & \frac{(z_4 h)^{17}}{17!} & \frac{(z_4 h)^{18}}{18!} \\ \frac{h^{14}}{14!} & \frac{h^{15}}{15!} & \frac{h^{16}}{16!} & \frac{h^{17}}{17!} & \frac{h^{18}}{18!} \end{bmatrix}, \bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k,1} \\ C_{k,2} \\ C_{k,3} \\ C_{k,4} \\ C_{k,5} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{13} \frac{(z_1 h)^i}{i!} P_k^{(i)} - u(x_k + z_1 h) \\ \sum_{i=0}^{13} \frac{(z_2 h)^i}{i!} P_k^{(i)} - u(x_k + z_2 h) \\ \sum_{i=0}^{13} \frac{(z_3 h)^i}{i!} P_k^{(i)} - u(x_k + z_3 h) \\ \sum_{i=0}^{13} \frac{(z_4 h)^i}{i!} P_k^{(i)} - u(x_k + z_4 h) \\ \sum_{i=0}^{13} \frac{h^i}{i!} P_k^{(i)} - u(x_k + h) \end{bmatrix}$$

من ناحية أخرى من الجملة (20) نحصل على متجهة المجاهيل:

$$\bar{C}_k = A^{-1} \hat{F}_k \quad (22)$$

حيث A^{-1} هي مصفوفة الجملة (20)، وأن

$$\hat{F}_k = [u^{(14)}(x_{k+z_1}), u^{(14)}(x_{k+z_2}), u^{(14)}(x_{k+z_3}), u^{(14)}(x_{k+z_4}), u^{(14)}(x_{k+1})]^T$$

وباستخدام منشورات تايلور لدالة الحل ومشتقاتها $u^{(m)}(x), m = 0,1,\dots,14$ حول x_k والتعويض في (21) نحصل على مرتبة الخطأ المتقطع الموضوعي عند x_k :

$$\bar{\tau}_k = M(A^{-1} \hat{F}_k) + \bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} 1.27541 \times 10^{-18} y^{(19)}(x_k) h^{19} \\ 3.380632 \times 10^{-16} y^{(19)}(x_k) h^{19} \\ 8.19072 \times 10^{-16} y^{(19)}(x_k) h^{19} \\ 4.10775 \times 10^{-15} y^{(19)}(x_k) h^{19} \\ 1.73282 \times 10^{-14} y^{(19)}(x_k) h^{19} \end{bmatrix}, k = 0, 1, \dots, N$$

(23)

حيث

$$u(x) = \sum_{i=0}^{18} \frac{(x-x_k)^i}{i!} u^{(i)}(x_k) + O(h^{19}), x \in [x_k, x_{k+1}] .$$

وهكذا يعطى الخطأ المنقطع الموضوعي للطريقة العددية المقترحة وفقا للعلاقة (23) كالآتي:

$$L = \max_{x \in [a,b]} |u^{(19)}(x)|, C = 1.73282 \times 10^{-14} L, \|\bar{\tau}_k\|_{\infty} = C h^{19}$$

والشامل للطريقة العددية المؤلفة من N خطوة كالآتي: $\hat{C} h^{19} = C h^{19} = \frac{b-a}{h} . C h^{19} = N . C h^{19} = \|T\|_{\infty}$

حيث $\hat{C} = \frac{b-a}{h} . C$ ومنه بحسب التعريف فطريقة التجميع العددية المقترحة تكون متسقة ومتقاربة من المرتبة الثامنة عشرة لأن الثابت \hat{C} مستقل عن طول الخطوة h .

3- اختبارات عددية Numerical Tests

نختبر التقنية المقترحة في هذا البحث بتطبيقها لإيجاد الحلول العددية لبعض المسائل من المعادلات التفاضلية من المرتبتين الثالثة عشرة والرابعة عشرة في الحالتين الخطية وغير خطية، ولإظهار الفعالية والدقة العددية للطريقة نقارن نتائجنا العددية مع نتائج عددية لبعض الطرائق في المراجع الأخرى. نستخدم لغة البرمجة Mathematica النسخة الحادية عشرة لتنفيذ خوارزمية الطريقة العددية المقترحة والحصول على النتائج العددية والرسوم البيانية لمسائل الاختبار.

مسألة 1: لنأخذ مسألة المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة 13 الآتية [4,6,7,11]:

$$u^{(13)}(x) = \cos(x) - \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

مع الشروط الحدية :

$$\begin{cases} u(0) = 1, u'(0) = 1, u''(0) = -1, u^{(3)}(0) = -1, u^{(4)}(0) = 1, u^{(5)}(0) = 1, u^{(6)}(0) = -1 \\ u(1) = \cos(1) + \sin(1), u'(1) = \cos(1) - \sin(1), u''(1) = -\cos(1) - \sin(1), \\ u^{(3)}(1) = \sin(1) - \cos(1), u^{(4)}(1) = \cos(1) + \sin(1), u^{(5)}(1) = \cos(1) - \sin(1) . \end{cases}$$

وتملك الحل التحليلي الدقيق $u(x) = \cos x + \sin x$

نقارن في الجدول (1) الحلول العددية لطريقتنا المقترحة مع طريقة Hassan في [6] وطريقة تكرار المتغير الامثلية (OVIM) في [11] باستخدام خطوة $h=0.1$ ، ونقارن في الجدول (2) الأخطاء المطلقة $|u(x_i) - P(x_i)|$ في الحل العددي لطريقتنا المقترحة مع طريقة موجبات هار في [4] وطريقة

Hassan في [6] وطريقة التحويل التفاضلي في [7]. نرسم في الأشكال (1)-(7) الحل العددي بطريقتنا بالإضافة إلى الحلول العددية لبعض مشتقات الحل حتى المرتبة الثانية عشرة. الأخطاء المطلقة فيها للمسألة 1.

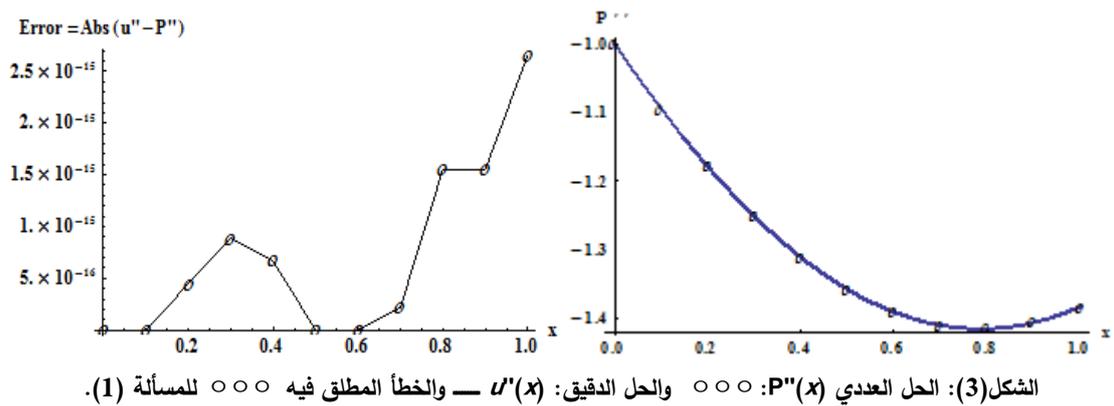
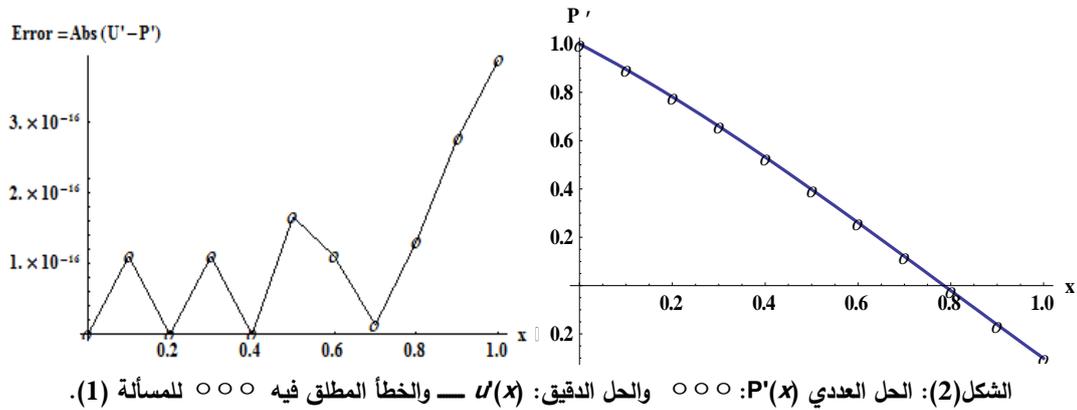
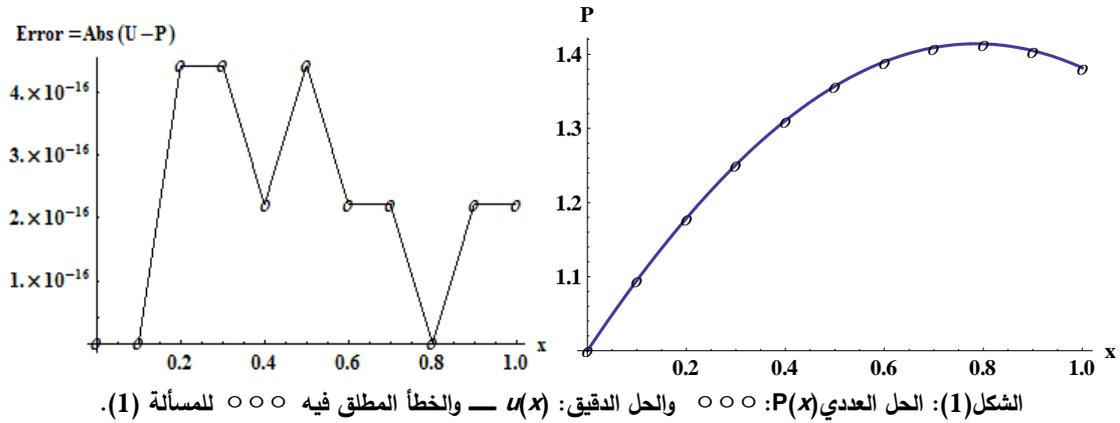
الجدول(1): مقارنات الحلول العددية لطريقتنا المقترحة مع طريقتين في [6, 11] بخطوة $h=0.1$

x_i	الحل الدقيق	OVIM [11,2017]	Hassan [6,2021]	طريقتنا المقترحة
0.1	1.094837581924854	1.0948376	1.0948375819248541	1.094837581924854
0.2	1.1787359086363027	1.1787359	1.1787359086363032	1.1787359086363026
0.3	1.2508566957869456	1.2508567	1.250856695786946	1.2508566957869456
0.4	1.3104793363115357	1.3104796	1.310479336311536	1.310479336311537
0.5	1.3570081004945758	1.3570095	1.357008100494576	1.3570081004945757
0.6	1.3899780883047137	1.3899832	1.3899780883047137	1.3899780883047136
0.7	1.4090598745221796	1.4090747	1.4090598745221796	1.4090598745221796
0.8	1.4140628002466882	1.4140999	1.4140628002466882	1.4140628002466882
0.9	1.4049368778981477	1.4050201	1.4049368778981475	1.4049368778981476
1	1.3817732906760363	1.3819444	1.3817732906760358	1.3817732906760363

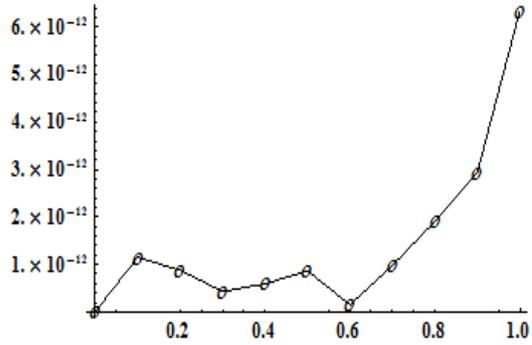
الجدول(2): مقارنات للأخطاء المطلقة $|u(x_i) - P(x_i)|$ في الحل العددي لطريقتنا مع طرائق في [4,6,7].

x_i	Differential Transformation Method [7,2014]	Hassan [6,2021]	Haar Wavelet[4]	طريقتنا المقترحة
0.1	2.22045E-16	1.000089 E-16	3.88578 E-15	1.063109 E-17
0.2	0.00000000	0.0000000000	1.46216 E-13	4.440891 E-16
0.3	2.22045E-15	4.44089 E-16	8.80518 E-13	7.134852 E-17
0.4	6.66134E-15	2.220454 E-16	2.35822 E-12	2.220453 E-16
0.5	1.11022E-14	3.3213461 E-16	3.80140 E-12	3.234433 E-16
0.6	1.04361E-14	4.0765442 E-16	-----	4.000220 E-16
0.7	5.32907E-15	4.4114569 E-16	-----	9.365727 E-17
0.8	8.88178E-16	5.6665409 E-16	-----	3.561432 E-17
0.9	0.00000000	0.0000000000	-----	2.002204 E-16

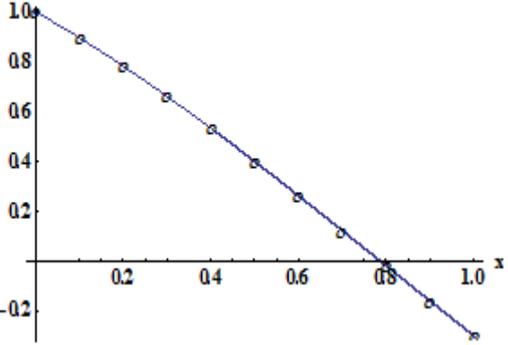
1.0	0.00000000	0.00000000000	-----	1.0024367 E-17
-----	------------	---------------	-------	----------------



Error = Abs (u⁵-P⁵)

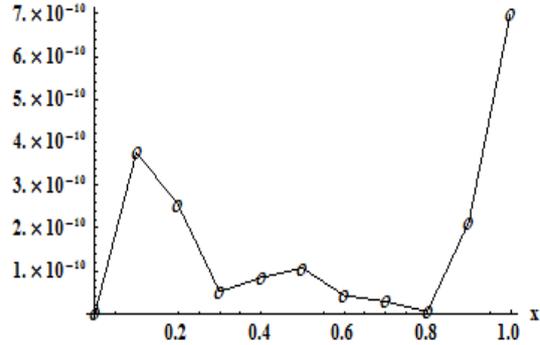


P⁵(x)

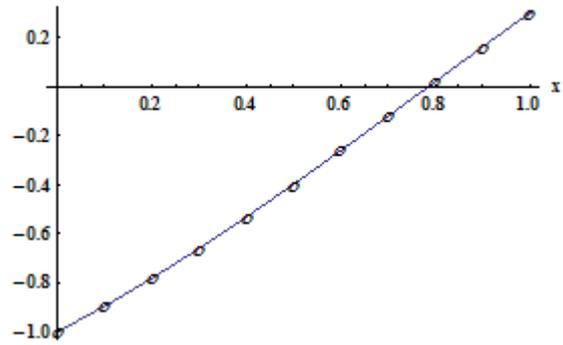


الشكل (4): الحل العددي $P^5(x)$: $\circ \circ \circ$ والحل الدقيق: $u^5(x)$ — والخطأ المطلق فيه $\circ \circ \circ$ للمسألة (1).

Error = Abs (u⁷-P⁷)

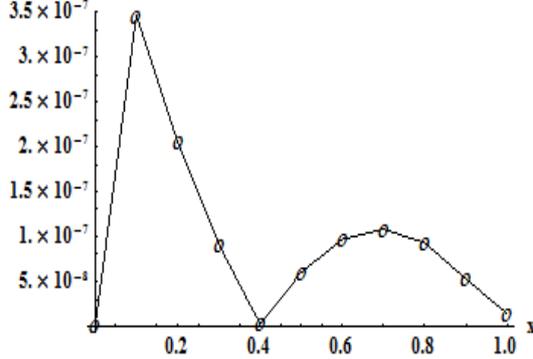


P⁷(x)

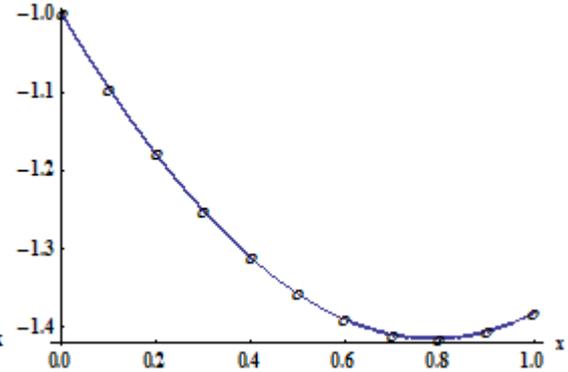


الشكل (5): الحل العددي $P^7(x)$: $\circ \circ \circ$ والحل الدقيق: $u^7(x)$ — والخطأ المطلق فيه $\circ \circ \circ$ للمسألة (1).

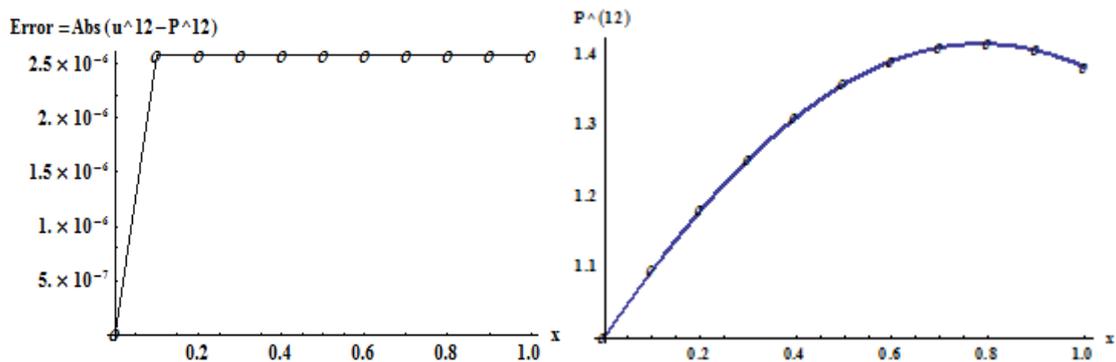
Error = Abs (u¹⁰-P¹⁰)



P¹⁰(x)



الشكل (6): الحل العددي $P^{10}(x)$: $\circ \circ \circ$ والحل الدقيق: $u^{10}(x)$ — والخطأ المطلق فيه $\circ \circ \circ$ للمسألة (1).



الشكل(7): الحل العددي $P^{(12)}(x)$: $\circ \circ \circ$ والحل الدقيق: $u^{(12)}(x)$ — والخطأ المطلق فيه $\circ \circ \circ$ للمسألة (1) .

المسألة(2): لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالث عشرة [6,7] :

$$u^{(13)}(x) = e^{-x} u^2(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

مع الشروط الابتدائية:

$$u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = \dots = u^{(12)}(0) = 1;$$

وتملك الحل التحليلي الدقيق $u(x) = e^{-x}$. نطرح هذه المسألة وهي من المرتبة 13 لتوضيح أن

الطريقة يمكنها حل مسائل من مراتب أقل من المرتبة 14 وبدقة عالية.

نضع في الجدول(3) مقارنات الحلول العددية لطريقتنا المقترحة مع طريقة التجميع في [6]

بالخطوة نفسها $h=0.1$ ، ونضع في الجدول(4) مقارنات للأخطاء المطلقة $|u(x_i) - P(x_i)|$ في الحل

العددي لطريقتنا المقترحة مع طريقة التجميع في [6] وطريقة التحويل التفاضلي في [7]. نرسم في

الأشكال(8)–(9) الحل العددي ومشتق الحل من المرتبة الثانية عشرة مع الأخطاء المطلقة الحاصلة فيها،

في الشكل(10) الخطأ المطلق في الحل العددي و الخطأ المطلق في مشتق الحل من المرتبة 12 بطريقة

التجميع في [6]، في الشكل(11) الخطأ المطلق في الحل العددي بطريقة التحويل التفاضلي في [7].

تبين نتائج المقارنات في الجداول(3)–(4) والرسوم البيانية مدى الدقة العددية والكفاءة للطريقة

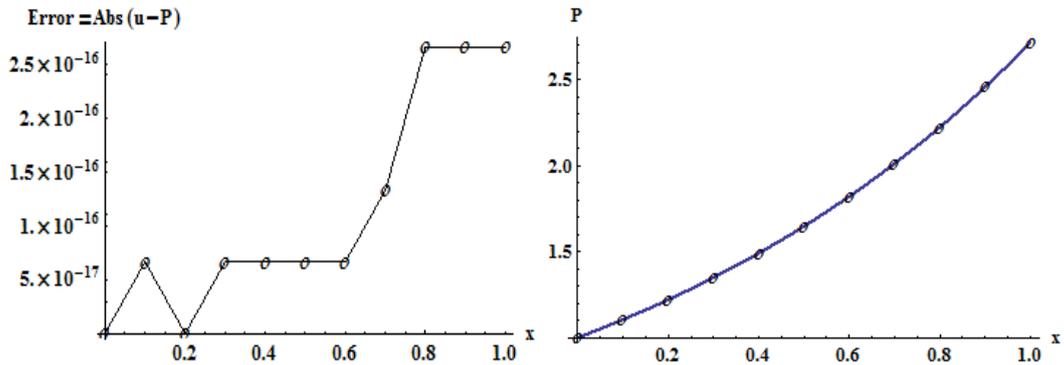
العددية المقترحة باستخدام أطوال الخطوات نفسها.

الجدول(3): مقارنات الحلول العددية لطريقتنا المقترحة مع طريقة تكرار المتغير الامثلية (OVIM) بخطوة $h=0.1$

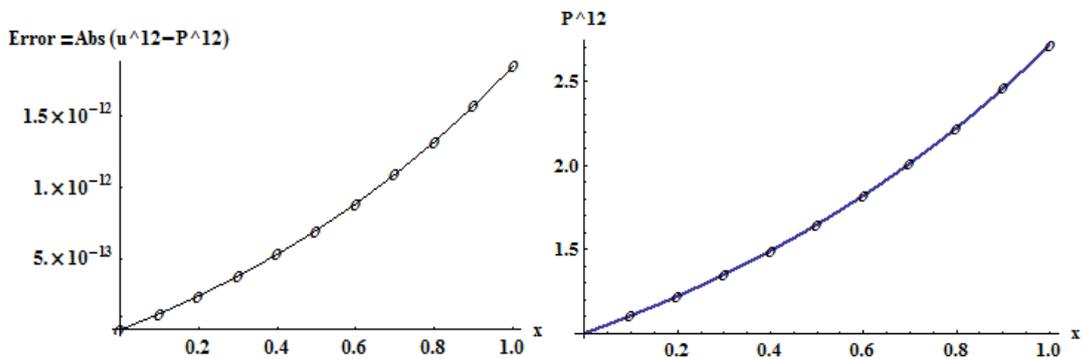
x_i	الحل الدقيق	طريقة التجميع [6]	طريقتنا المقترحة
0.1	1.1051709180756477	1.1051709180756477	1.1051709180756475
0.2	1.2214027581601699	1.22140275816017	1.2214027581601696
0.3	1.3498588075760032	1.3498588075760032	1.3498588075760036
0.4	1.4918246976412703	1.4918246976412703	1.4918246976412708
0.5	1.6487212707001282	1.6487212707001284	1.6487212707001281
0.6	1.822118800390509	1.8221188003905096	1.8221188003905098
0.7	2.0137527074704766	2.013752707470477	2.0137527074704764
0.8	2.225540928492468	2.2255409284924683	2.2255409284924682
0.9	2.45960311115695	2.4596031111569503	2.4596031111569502
1	2.718281828459045	2.718281828459045	2.7182818284590452

الجدول(4):مقارنات للأخطاء المطلقة في الحل العددي لطريقتنا مع طريقة التجميع [6] وطريقة التحويل التفاضلي [7].

x_i	Differential Transformation Method [7]	طريقة التجميع [6]	طريقتنا المقترحة
0.1	4.44089E-16	0.0000000000	5.66205 E - 17
0.2	4.44089E-16	2.22045 - 16	6.62202 E - 17
0.3	2.44249E-15	0.0000000000	6.84208 E - 17
0.4	7.32747E-15	0.0000000000	8.62202 E - 17
0.5	1.22125E-14	2.25432 E-16	1.450054 E-16
0.6	1.11022E-14	3.054318 E-16	1.581701 E-16
0.7	5.77316E-15	4.16981 E-16	2.212561 E-16
0.8	1.77636E-15	4.22061E-16	2.3438612 E-16
0.9	8.88178E-16	4.44089 E - 16	2.44025 E - 16
1.0	0.000000000	0.0000000000	2.54036 E - 16



الشكل(8): الحل العددي $P(x)$ مع الحل الدقيق: $u(x)$ — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).



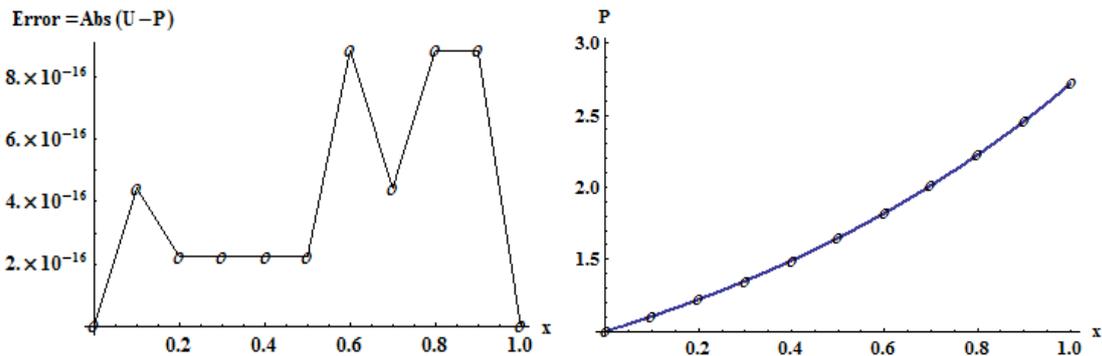
الشكل(9): الحل العددي $P^{(12)}(x)$ مع الحل الدقيق: $u^{(12)}(x)$ — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (2).

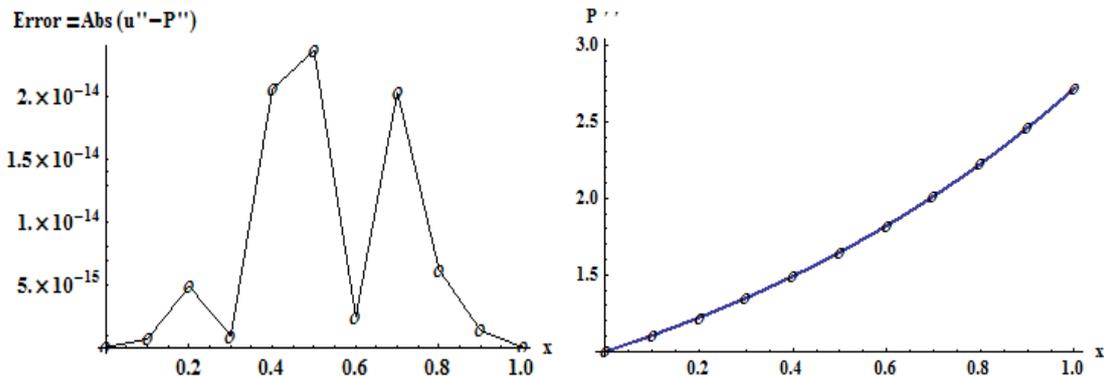
الجدول(5): مقارنات الحلول العددية لطريقتنا المقترحة مع طريقتين في [9] بخطوة $h=0.1$

x_i	الحل الدقيق	Cubic Poly. Sol. [9,2018]	Cubic Non-Poly. Sol. [9,2018]	طريقتنا المقترحة
0.1	1.1051709180756477	-----	-----	1.1051709180756473
0.2	1.2214027581601699	1.2214020778	1.2214020778	1.2214027581601696
0.3	1.3498588075760032	-----	-----	1.349858807576003
0.4	1.4918246976412703	1.4918236132	1.4918236132	1.4918246976412701
0.5	1.6487212707001282	-----	-----	1.648721270700128
0.6	1.822118800390509	1.8221176295	1.8221176295	1.8221188003905082
0.7	2.0137527074704766	-----	-----	2.013752707470476
0.8	2.225540928492468	2.2255400739	2.2255400739	2.225540928492467
0.9	2.45960311115695	-----	-----	2.459603111156949

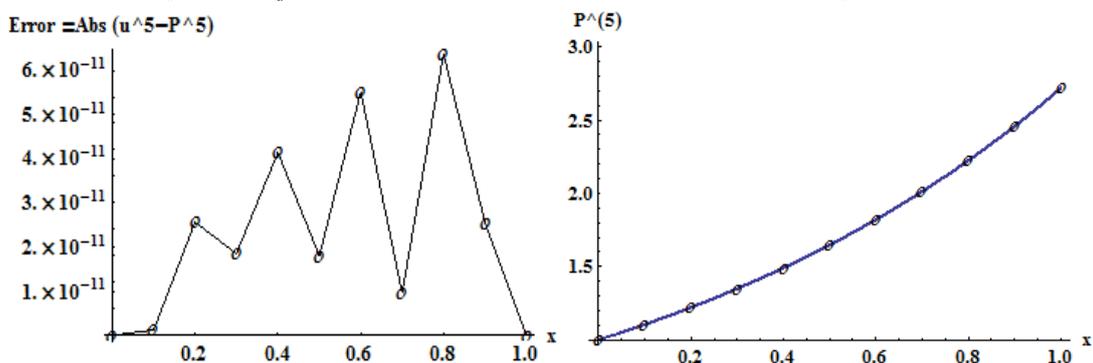
الجدول(6): مقارنات للأخطاء المطلقة $|u(x_i) - P(x_i)|$ في الحل العددي لطريقتنا مع طريقتين في [9].

x_i	Cubic Poly. Sol. [9,2018]	Cubic Non-Poly. Sol. [9,2018]	طريقتنا المقترحة
0.1	-----	-----	4.44089 E-16
0.2	3.71E-04	6.80E-07	2.32945 E-16
0.3	-----	-----	2.58046 E-16
0.4	5.92E-04	1.08E-06	2.92765 E-16
0.5	-----	-----	2.22045 E-16
0.6	6.35E-04	1.17E-06	4.440891 E-16
0.7	-----	-----	6.600293 E-16
0.8	4.59E-04	8.54E-07	8.632171 E-16
0.9	-----	-----	8.881784 E-16

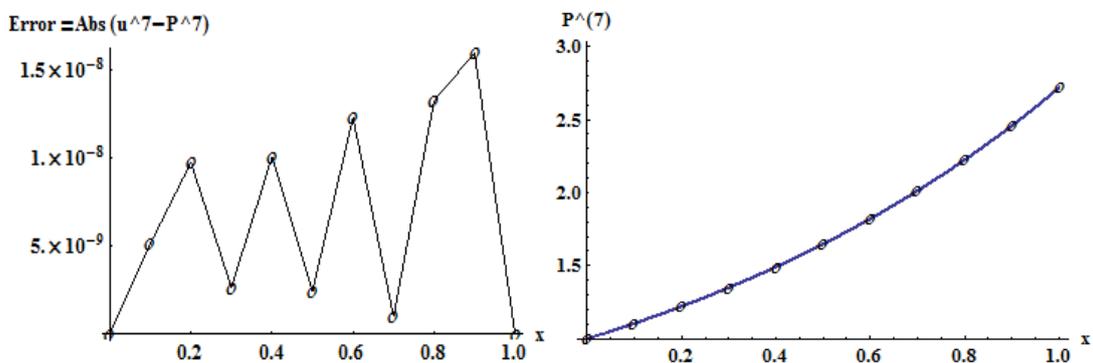
الشكل (12): الحل العددي $P(x)$: $\circ \circ \circ$ مع الحل الدقيق: $u(x)$ — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (3).



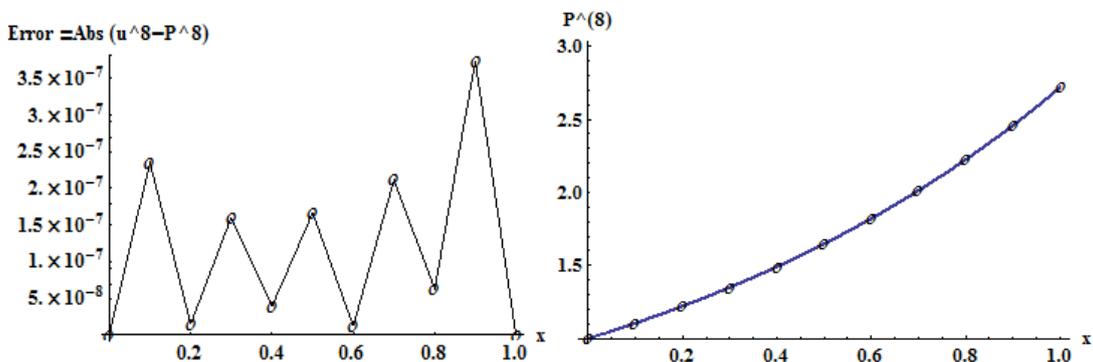
الشكل (13): الحل العددي $P''(x)$ مع الحل الدقيق $u''(x)$ — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (3).



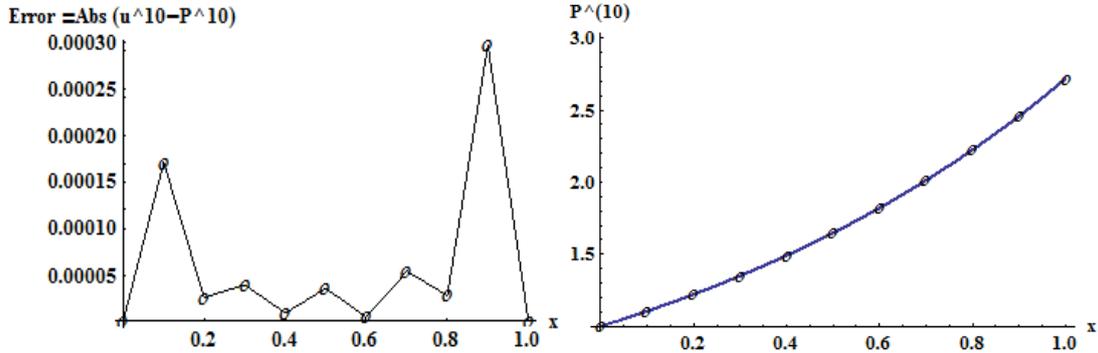
الشكل (14): الحل العددي $P^5(x)$ مع الحل الدقيق $u^5(x)$ — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (3).



الشكل (15): الحل العددي $P^7(x)$ مع الحل الدقيق $u^7(x)$ — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (3).



الشكل (16): الحل العددي $P^8(x)$ مع الحل الدقيق $u^8(x)$ — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (3).



الشكل (17): الحل العددي $P^{(10)}(x)$ مع الحل الدقيق: $u^{(10)}(x)$ والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (3).

مسألة 4: لنأخذ مسألة المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة 14 الآتية:

$$u^{(14)}(x) + u(x)u^{(4)}(x) - u'(x)u'''(x) =$$

$$3/2 + x^2 + 14 \cos x - 3/2 \cos(2x) - x \sin x, \quad 0 \leq x \leq 5,$$

وفق الشروط الابتدائية:

$$u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(0) = 2, u'''(0) = 0, u^{(4)}(0) = -4, u^{(5)}(0) = 0, u^{(6)}(0) = 6,$$

$$u^{(7)}(0) = 0, u^{(8)}(0) = -8, u^{(9)}(0) = 0, u^{(10)}(0) = 10, u^{(11)}(0) = 0, u^{(12)}(0) = -12, u^{(13)}(0) = 0$$

وتملك الحل التحليلي الدقيق $u(x) = x \sin(x)$.

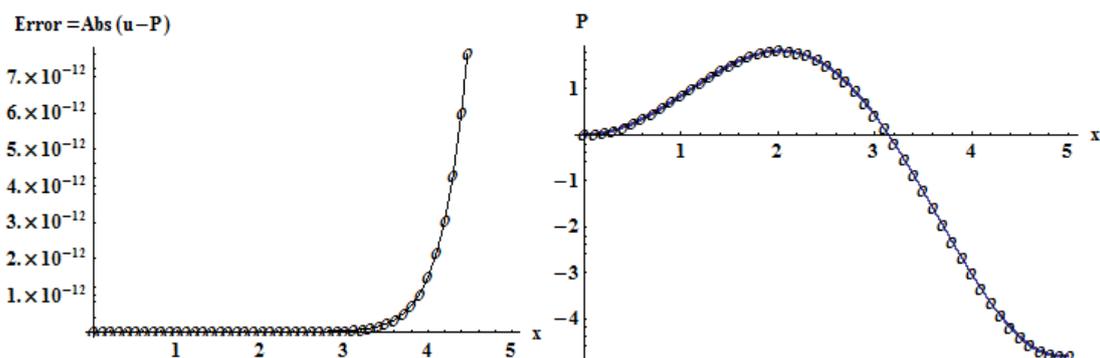
نضع في الجدول (7) بعض قيم الحل العددي لطريقتنا المقترحة في المجال $[0,5]$ باستخدام خطوة $h=0.1$ ، كما ونضع في الجدول (8) الأخطاء المطلقة في الحل العددي ومشتقات الحل لطريقتنا المقترحة. في الأشكال (18)-(22) نرسم الحل العددي والأخطاء المطلقة الناتجة عن الحل العددي بطريقتنا بالإضافة إلى الحلول العددية لبعض مشتقات الحل والأخطاء المطلقة الناتجة حتى المرتبة الحادية عشرة.

الجدول (7): الحل العددي لطريقتنا المقترحة مع الحل الدقيق بخطوة $h=0.1$

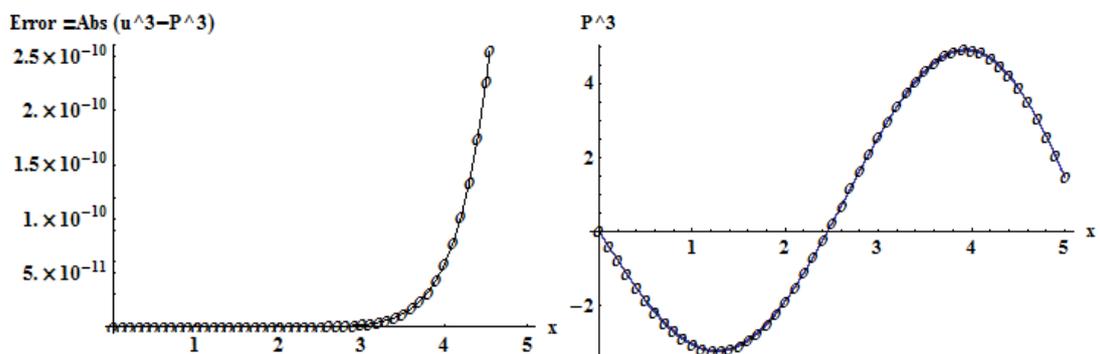
x_i	الحل الدقيق	الحل العددي بطريقتنا المقترحة
0.5	0.2397127693021015	0.23971276930210159
1.0	0.8414709848078965	0.8414709848078966
1.5	1.4962424799060816	1.4962424799060816
2.0	1.8185948536513634	1.818594853651363
2.5	1.496180360259891	1.4961803602598922
3.0	0.4233600241796016	0.423360024179624
3.5	-1.2277412969136694	-1.227741296913455
4.0	-3.027209981231713	-3.0272099812302096
4.5	-4.3988855294929365	-4.398885529484593
5.0	-4.794621373315692	-4.794621373277071

الجدول(8): الأخطاء المطلقة في الحل العددي ومشتقات الحل لطريقتنا المقترحة.

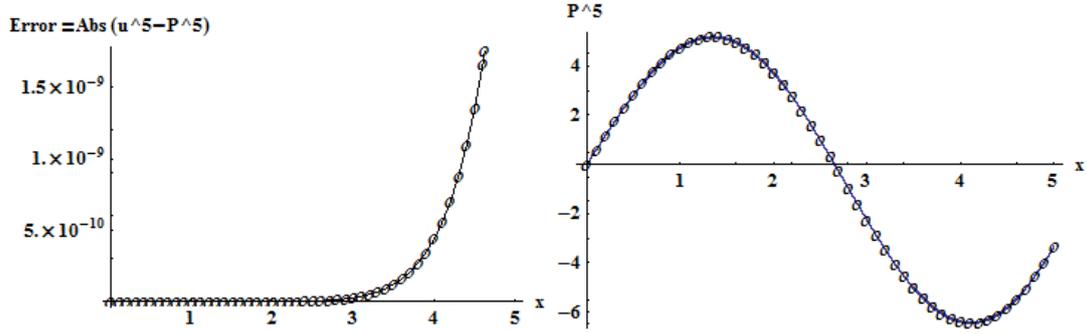
x_i	$ u(x_i) - P(x_i) $	$ u'(x_i) - P'(x_i) $	$ u''(x_i) - P''(x_i) $
0.5	8.32667 E -17	1.11022 E -16	6.66134 E -16
1.0	1.11022 E -16	4.44089 E -16	6.38378 E-16
1.5	2.432891 E-16	3.432785 E -16	1.003152 E -15
2.0	4.44089 E -16	5.27356 E -16	3.55271 E -15
2.5	1.11022 E -15	9.10383 E -15	5.06262 E -14
3.0	2.2371 E -14	1.10578 E -13	5.01821 E -13
3.5	2.14495 E -13	8.94396 E -13	3.46878 E -12
4.0	1.50324 E -12	5.4694 E -12	1.85287 E -11
4.5	8.34355 E-12	2.69746 E -11	8.11822 E -11
5.0	3.86216 E -11	1.12298 E -10	3.03858 E -10



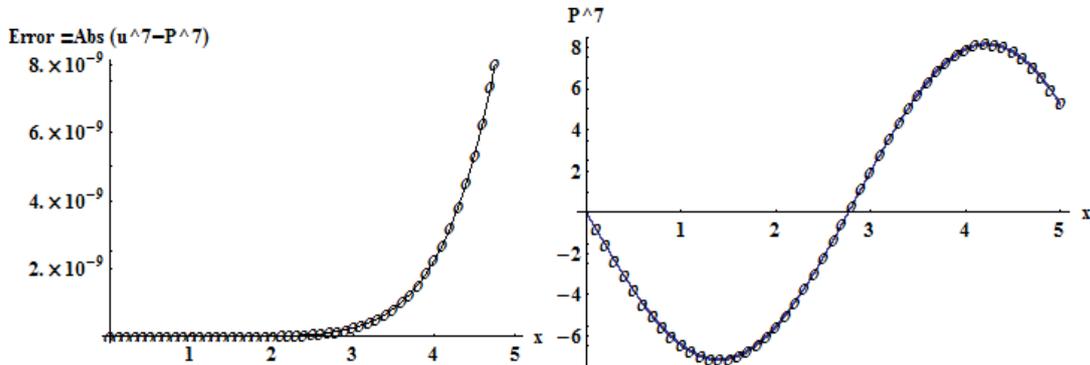
الشكل (18): الحل العددي $P(x)$: مع الحل الدقيق: $u(x)$ — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (4).



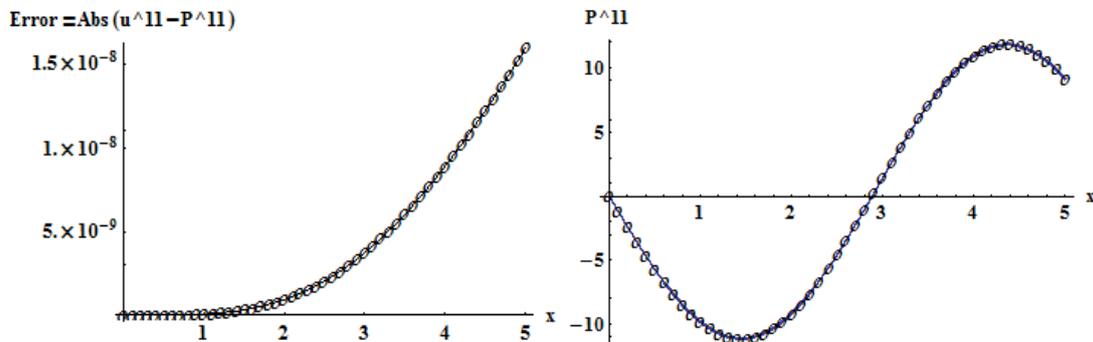
الشكل (19): الحل العددي $P'''(x)$: مع الحل الدقيق: $u'''(x)$ — والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (4).



الشكل (20): الحل العددي $P^5(x)$ مع الحل الدقيق $u^5(x)$ والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (4).



الشكل (21): الحل العددي $P^7(x)$ مع الحل الدقيق $u^7(x)$ والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (4).



الشكل (22): الحل العددي $P^{11}(x)$ مع الحل الدقيق $u^{11}(x)$ والخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة (4).

• الاستنتاجات والتوصيات Conclusions and Recommendations :

تم إنشاء كثيرات حدود من الدرجة الثامنة عشرة كتقريب للحل الدقيق لمسائل القيم الحدية من مراتب عالية وقد تم تطبيقها مع خمس نقاط تجميع عند كل خطوة للحل العددي. تبين الدراسة التحليلية أن التقنية العددية المقترحة عندما تم تطبيقها على مسألة اختبار كانت موجودة بشكل وحيد، وأنها متسقة من المرتبة الثامنة عشرة. كما تبين النتائج العددية والمقارنات في الجداول (1)-(8) لطريقتنا المقترحة مع طريقة مويجات هار في [4] وطريقة Hassan في [6] وطريقة التحويل التفاضلي في [7] وطرائق الشرائح التكميلية في [9] وطريقة تكرار المتغير الامثلية في [11] أن طريقتنا أكثر دقة عددية من الطرائق الأخرى. وكذلك تظهر الأشكال (1)-(22) أن طريقتنا العددية المقترحة استطاعت إيجاد الحلول العددية بالإضافة إلى الحلول العددية لمشتقات الحل بدقة عالية. كما ويمكن للطريقة المقترحة إيجاد الحلول العددية لمسائل القيم الحدية والابتدائية من مراتب أقل من المرتبة الرابعة عشرة. ونظراً للدقة العددية والكفاءة العالية التي قدمتها الطريقة المقترحة، نوصي بالآتي:

استخدام الطريقة المقترحة لإيجاد الحلول العددية لمسائل القيم الحدية والابتدائية من المرتبتين الثالثة عشرة والرابعة عشرة. ثم تطوير تقنيات مشابهة للتقنية المقترحة لتشمل إيجاد الحلول العددية من مراتب أعلى 14.

• المراجع : Reference

1. ABBAS W., M. Fathy, M. Mostafa, Hesham A. M. A. *Galerkin Method for Nonlinear Higher-Order Boundary Value Problems Based on Chebyshev Polynomials*, Journal of Physics: Conference Series, 2128 (2021) 012035.
2. Al-Hayani W.(2015) *Adomian Decomposition Method with Green's Function for Solving Twelfth-Order Boundary Value Problems*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, , No. 8, 353 – 368.
3. AMIN R., K. Shah, I. Khan, M. Asif, K. M. Abualnaja, E. E. Mahmoud, and A. Abdel-Aty. *A powerful numerical technique for treating twelfth-order boundary value problems*(2020). Open Physics, 18, 1048–1062.
4. ARIFEEN Sh. U., S. Haq, A. Ghafoor, A. Ullah, P. Kumam and P. Chaipanya(2021). *Numerical Solutions Of Higher Order Boundary Value Problems Via Wavelet Approach*, *Advances in Difference Equations*, 2021:347,1-15.
5. FALADE, K.I, A. (2019) *Numerical Approach for Solving High-Order Boundary Value Problems*, *I.J. Mathematical Sciences and Computing*, Vol. 3, pp.1-16.
6. HASSAN N. E. *Numerical Solutions of Thirteen-Order Boundary Value Problems*. Tartous University Journal Research-Basic Science Series, 2021, Vol.5, No.2, 2021.

7. IFTIKHAR M., H. U. REHMAN, and M. YOUNIS, *Solution of Thirteenth Order Boundary Value Problems by Differential Transformation Method*, *Asian Journal of Mathematics and Applications*, Vol. (2014), 11 pages.
8. ISLAM N. (2020) *Bezier Polynomials and its Applications with the Tenth and Twelfth Order Boundary Value Problems*. *Journal of Information and Computing Science*. Vol. 15, No. 1, pp.052-066.
9. Khalid A. A and M. N. Naeem, (2018) *Cubic Spline Solution of linear fourteenth order boundary value problems*. *Ceylon Journal of Science* 47(3), 253-261.
10. MAHMOUD S. M. and EHSAAN S. (2017), *Approximate Solutions of Twelfth-Order Boundary Value Problems by Using Spline Technique*, *Tishreen University Journal Research-Basic Science Series* Vol. 39, No.5, pp.1-20.
11. NJOSEH I. N. and E., J. Mamadu (2017). *Optimal Variation Iteration Method For Solving Thirteenth-Order Boundary Value Problems*. *Nigerian Annals Of Natural Sciences*, VOL.16 , No.1, pp. 076 – 081.
12. NJOSEH I. N. and MAMADU E., J. (2016) *Numerical Solutions of a Generalized Nth Order Boundary Value Problems Using Power Series Approximation Method*, *Applied Mathematics*, Vol.7, pp.1215–1224.
13. ZHI S., F. LI, (2014) *Numerical solution of high-order differential equations by using periodized Shannon wavelets* *Applied Mathematical Modelling*, Vol., 38, pp.2235-2248.