مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (4) 2022
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

علاقات التَداخل بين فضاءات هير– موري المتجانسة ذات الأس المتغيِر

الدكتور محمد علي*
الدكتور حسن بدور**
الطَالب علي جاسر***

(تاريخ الإيداع 16/6/ 2022 – تاريخ النشر24/8/ 2022)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث إحدى مسائل التَحليل التَابعي وهي مسألة تداخل الفضاءات التَابعية، وبشكل خاص درسنا التَداخل بين فضاءات هير – موري المتجانسة ذات الأس المتغير من النَمط $\{\alpha(.)$ ، λ ، $p(.)$ ، $q\}$ من أجل

حالات مختلفة للوسطاء $\alpha(.)$ ، λ ، $p(.)$ ، q، بدايةً درسنا تداخل هذا الفضاء من أجل $\alpha_1(.) \le \alpha_2(.)$ ثم درسنا حالة $q_1 \le q_2$ ومن ثم الحالة $p_1(.) \le p_2(.)$ و $\alpha_1(.) \le \alpha_2(.)$ و $q_1 \le q_2$ في الوقت ذاته.

انتقلنا بعد ذلك الى دراسة التَداخل بين فضاءات هير – موري الضَعيفة المتجانسة ذات الأس المتغير.

وأخيرا درسنا التَداخل بين فضاءات هير– موري المتجانسة ذات الأس المتغير من النمط $\{q(.), p, \lambda, \alpha\}$ من أجل $q_1(.) \le q_2(.)$.

الكلمات المفتاحية: التَداخل، فضاء هير – موري المتجانس ذو الأس المتغير.

*أستاذ– قسم الرياضَيات – كليَة العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية
** أستاذ– قسم الرياضيَات– كليَة العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية
*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضَيات– كليَة العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (4) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

Inclusion relations between HERZ-M0RREY Spaces with Variable Exponent

Dr. Mohamad Ali*

Dr. Hassan Baddour**

Ali Jasser***

(Received 16/6/2022.Accepted 24/8/2022)

□ABSTRACT □

In this paper, we study problem at functional analysis, it is inclusion of function spaces, especially we study the inclusion between HERZ-M0RREY Spaces with variable exponent type $\{q ، p(.) ، \lambda ، \alpha(.)\}$ for different cases of the parameters $\alpha(.), \lambda, p(.), q$, first we study the inclusion for $\alpha_1(.) \leq \alpha_2(.)$, then for $q_1 \leq q_2$ and then for $p_1(.) \leq p_2(.)$ and $\alpha_1(.) \leq \alpha_2(.)$ and $q_1 \leq q_2$ at the same time. then, we study the inclusion between weak HERZ-M0RREY Spaces with variable exponent. Finally, we study the inclusion between HERZ-M0RREY Spaces with variable exponent type $\{q(.), p, \lambda, \alpha\}$ for $q_1(.) \leq q_2(.)$.

Keywords:inclusion,HERZ-M0RREYSpaceswithVariableExponent.

*Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.
** Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.
***Master student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.

مقدمـة:

يقسم التَحليل التَابعي بشكل عام إلى مجموعة من الفروع الرَئيسية، إحدى هذه الفروع هي نظرية الفضاءات التَابعية، والتي تنقسم بدورها الى موضوعات عديدة، إحدى هذه الموضوعات هو موضوع تداخل الفضاءات التَابعية، وتتلخص نتائج نظرية تداخل الفضاءات التَابعية من خلال الإجابة على السؤال التالي:

اذا كان لدينا فضاء توابع ما معرف من خلال وسيط، ما العلاقة بين الفضاءات التَابعية التي تنشأ عند إعطاء قيم مختلفة لهذا الوسيط؟

مثل هذه الدِراسة تمَت على بعض الفضاءات التَابعية الشَهيرة مثل فضاءات هولدر[1] ,[18]، فضاءات ليبيغ[2]، فضاءات أورليتش[3] ،[2]، فضاءات موري [6] ، [5] ، [4] .

في بحثنا هذا، فقد توصلنا إلى بعض النتائج التي تخص تداخل فضاءات هير– موري المتجانسة ذات الأس المتغير $\mathscr{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha(.),\lambda}$ ، ونتيجة لذلك توصلنا إلى نتائج تخص تداخل فضاءات هير المتجانسة ذات الأس المتغير $\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha(.)}$.

فضاء موري قُدِم أول مرة عام *1938* من قبل *Morrey* [7]، وفضاء هير قُدِم أول مرة عام *1968* من قبل *Herz* .

أما عن فضاء هير–موري المتجانس قُدِم عام *2005* من قبل *LU* و*XU* [8] والذي جاء كتعميم لفضائي هير وموري، ويُعتبر فضاء هير– موري المتجانس ذو الأس المتغير تعميم لفضاء هير – موري المتجانس.

قُدمت مؤخراً العديد من الدِراسات الَتي تخص فضاءات هير – موري المتجانسة ذات الأس المتغير نذكر منها:

- في عام *2010* درس *Izuki* محدودية المؤثِرات شبه الخطية في فضاءات هير – موري المتجانسة ذات الأس المتغير [9].
- في عام *2010* درس *Izuki* التكاملات الكسرية في فضاءات هير – موري المتجانسة ذات الأس المتغير[10].

أهميَة البحث وأهدافـه:

تكمن أهميَة البحث من كونه يعنى بدراسة علاقة الفضاءات التَابعية بين بعضها البعض، ويتجلَى الهدف الرئيس من هذا البحث بدراسة وتحديد العلاقة بين فضاءات هير – موري المتجانسة ذات الأس المتغير.

طرائق البحث وموادُه:

يقع ضمن اختصاص الرياضيَات النَظرية وبشكل خاص ضمن التَحليل التَابعي ونظرية الدوال، لذلك فإن الطريقة المتَبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيَات نظرية الدوال وبعض النَظريات الأساسية في التَحليل التَابعي.

تعاريف ومفاهيم أساسيَة:

تعريف 1 [11]: متراجحة هولدر (Holder's inequality) :

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و $1 < p, q < \infty$ بحيث أن : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ولتكن $f \in L^p$ و $g \in L^q$

عندئذٍ تتحقق المتراجحة الأتية:

$$\int_{\Omega} |fg|\, dx \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

والَتي تُسمى متراجحة هولدر.

تعريف 2 [12]: فضاء ليبيغ (Lebesgue space) :

يُعرف فضاء ليبيغ $L^P(\Omega)$ ($1 \leq P < \infty$) بأنه مجموعة كل التَوابع f القابلة للقياس والَتي تحقق الشرط الآتي:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

وكما هو معلوم فإنَ فضاء ليبيغ يشكل فضاء باناخ إذا عُرف عليه النظيم الآتي [13]:

$$\| f \|_{L^P(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

درس Subramain عام 1978 العلاقة بين الفضاءات $L^P(\Omega)$ وقدم المبرهنة التالية [14] :

مبرهنة مساعدة :إذا كان $0 < p_1 \leq p_2 < \infty$ و $\mu(\Omega) < \infty$ عندئذٍ فإن $\| f \|_{L^{p_1}}(\Omega) \leq \| f \|_{L^{p_2}}(\Omega)$ و

$$L^{p_2}(\Omega) \subseteq L^{p_1}(\Omega)$$

أي أن الصّف $L^{p_1}(\Omega)$ هو أعم و أشمل من الصّف $L^{p_2}(\Omega)$.

تعريف 3 [15]: فضاء ليبيغ ذو الأس المتغِير (Lebesgue space with Variable Exponent) :

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و $p(.) : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ تابع قيوس يُعرف فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{P(.)}(\Omega)$ بأنه مجموعة كل التَوابع القيوسة f على Ω والَتي تحقق الشَرط الآتي :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx < \infty \; For \; some \; \lambda > 0$$

إن فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير يشكِل فضاء باناخ إذا عُرف عليه النَظيم الآتي:

$$\| f \|_{L^{P(.)}} = \inf_{\lambda > 0} \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

ملاحظة 1:

إذا كانت p(.) = p (أي ثابت) فإن $L^{P(.)}(\Omega) \equiv L^P(\Omega)$. أي أنَ فضاء ليبيغ هو حالة خاصة من فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير.

تعريف 4 [16]:

فضاء هير المتجانس ذو الأس المتغيِر

(The homogeneous Herz space with variable exponent):

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ حيث $\mu(\Omega) < \infty$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $q(.) \in \rho(\Omega)$ ، يُعرَف فضاء هير المتجانس ذو الأس المتغير

: $\dot{k}^{\alpha}_{p,q(.)}(\Omega)$

$$\dot{k}^{\alpha}_{p,q(.)}(\Omega) = \left\{ f \in L^{q(.)}_{loc}(\Omega/\{0\}) : \| f \|_{\dot{k}^{\alpha}_{p,q(.)}(\Omega)} < \infty \right\}$$

حيث: $\| f \|_{\dot{k}^{\alpha}_{p,q(.)}(\Omega)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{L} 2^{K\alpha p} \| f\chi_k \|^{p}_{L^{q(.)}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{P}}$ و

$B_K = B(0, 2^K) = \{x \in \Omega : |x| \le 2^k\}$ و $A_K = B_K / B_{K-1}$ و $\chi_K = \chi_{A_K}$ و $K \in \mathbb{Z}$.

تعريف 5 [16]:

فضاء هير الضَعيف المتجانس ذو الأس المتغير

(The weak homogeneous Herz space with variable exponent):

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ حيث $\mu(\Omega) < \infty$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $q(.) \in \rho(\Omega)$ ، يُعرَف فضاء هير الضَعيف المتجانس ذو الأس المتغير بأنه مجموعة كل التَوابع القيوسة $f \in L^{q(.)}_{loc}(\Omega/\{0\})$ بحيث:

$$\| f \|_{W\dot{k}^{\alpha}_{p,q(.)}(\Omega)} = \sup_{\gamma > 0} \gamma \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha P} \, m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q(.)}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

حيث: $m_k(\gamma, f) = |\{x \in A_K : |f(x)| > \gamma\}|$

$B_K = B(0, 2^K) = \{x \in \Omega : |x| \le 2^k\}$ و $A_K = B_K / B_{K-1}$ و $\chi_K = \chi_{A_K}$ و $K \in \mathbb{Z}$.

تعريف 6 [17]:

فضاء هير – موري المتجانس (the homogeneous Herz – Morrey space):

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ حيث $\mu(\Omega) < \infty$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $0 < p \le \infty$ و $0 < q < \infty$ و $0 \le \lambda < \infty$

عندئذٍ يُعرف فضاء هير – موري المتجانس $\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\Omega)$:

$$\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\Omega) = \left\{ f \in L^{q}_{loc}(\Omega/\{0\}) : \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\Omega)} < \infty \right\}$$

حيث : $\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\Omega)} = \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{L} 2^{K\alpha p} \| f\chi_k \|^{p}_{L^{q}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{P}}$ و

$B_K = B(0, 2^K) = \{x \in \Omega : |x| \le 2^k\}$ و $A_K = B_K / B_{K-1}$ و $\chi_K = \chi_{A_K}$ و $K \in \mathbb{Z}$.

تعريف 7 [17] :

فضاء هير – موري الضَعيف المتجانس

:(The homogeneous weak HERZ–MORREY space)

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ حيث $\mu(\Omega) < \infty$ و $0 < p \leq \infty$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\lambda \geq 0$ و $0 < q < \infty$ عندئذٍ يُعرف فضاء هير – موري الضَعيف المتجانس $W\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\Omega)$ بأنه مجموعة كل التَوابع القيوسة $f \in L^q_{loc}(\Omega/\{0\})$ بحيث :

$$\| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\gamma > 0} \gamma \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha P} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

حيث : $m_k(\gamma, f) = |\{x \in A_K : |f(x)| > \gamma\}|$.

تعريف 8 [15]:

فضاء هير – موري المتجانس ذو الأس المتغير

: (The homogeneous HERZ – MORREY space with variable exponent)

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ حيث $\mu(\Omega) < \infty$ و $\alpha(.)$ تابع قيوس محدود ذو قيم حقيقية في $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و $0 < q < \infty$

و $p(.) : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ و $0 < \lambda < \infty$ ، يُعرَف فضاء هير – موري المتجانس ذو الأس المتغير $\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha(.),\lambda}(\Omega)$ بأنه مجموعة كل التَوابع القيوسة $f \in L^q_{loc}(\Omega/\{0\})$ بحيث :

$$\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha(.),\lambda}(\Omega)} = \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{-L\lambda}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha(.)p(.)} \| f\chi_k \|_{L^q(\Omega)}^{p(.)} \right)^{\frac{1}{p(.)}} < \infty$$

حيث : $B_K = B(0, 2^K) = \{x \in \Omega : |x| \leq 2^k\}$ و $A_K = B_K/B_{K-1}$ و $\chi_K = \chi_{A_K}$ و $K \in \mathbb{Z}$.

ملاحظة 2:

إذا وضعنا $\lambda = 0$ فإن فضاء هير – موري المتجانس ذو الأس المتغِير $\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha(.),\lambda}(\Omega)$ سيتحول إلى فضاء هير المتجانس ذو الأس المتغير $\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha(.)}(\Omega)$.

تعريف 9 [15]:

فضاء هير – موري الضَعيف المتجانس ذو الأس المتغير

:(The homogeneous weak Herz – Morrey space with variable exponent)

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ حيث $\mu(\Omega) < \infty$ و $0 < q < \infty$ و $p(.) : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ تابع قيوس و $0 < \lambda < \infty$

و $\alpha(.) \in \Omega$ يُعرَف فضاء هير – موري الضَعيف المتجانس ذو الأس المتغير $W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha(.),\lambda}(\Omega)$ بأنَه مجموعة كل التَوابع القيوسة $f \in L^q_{loc}(\Omega/\{0\})$ بحيث :

$$\| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha(.)P.)}\, m_k(\gamma,f)^{\frac{p(.)}{q}}\right)^{\frac{1}{p(.)}} < \infty$$

حيث : $m_k(\gamma,f) = |\{x \in A_K : |f(x)| > \gamma\}|$

ملاحظة 3:

إذا وضعنا $\lambda = 0$ فإن فضاء هير – موري الضَعيف المتجانس ذو الأس المتغيِر $W\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)$ سيتحول إلي فضاء هير الضَعيف المتجانس ذو الأس المتغيِر $W\dot{k}\,{}^{\alpha(.)}_{p(.),q}(\Omega)$.

تعريف 10 [10]:

فضاء هير – موري المتجانس ذو الأس المتغير من النَمط $\{q(.), p, \lambda, \alpha\}$

:(HERZ−M0RREY Spaces with variable exponent type$\{q(.), p, \lambda, \alpha\}$)

لكن $0 < p < \infty$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $0 \le \lambda < \infty$ و $q(.) : \Omega \longrightarrow [1,\infty)$ عندئذٍ يُعرف فضاء هير – موري المتجانس ذو الأس المتغير $\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha,\lambda}_{p,q(.)}(\Omega)$ بأنَه مجموعة كل التَوابع $f \in L^{q(.)}_{LOC}(\Omega/\{0\})$ بحيث :

$$\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha,\lambda}_{p,q(.)}(\Omega)} = \sup_{L\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha p}\ \| f\chi_k \|^{p}_{L^{q(.)}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

النَتائج والمناقشة:

توصَلنا في المبرهنة الآتية إلى علاقات التَداخل بين فضاءات هير – موري المتجانسة ذات الأس المتغير $\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)$:

مـبرهـنـة 1)

1) إذا كانت $0 < \alpha_1(.) \le \alpha_2(.) < \infty$ عندئذٍ فإن: $\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)$.

2) إذا كانت $0 < q_1 \le q_2 < \infty$ عندئذٍ فإن: $\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_2}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_1}(\Omega)$.

3) إذا كانت $0 < \alpha_1(.) \le \alpha_2(.) < \infty$ و $0 < p_1(.) \le p_2(.) < \infty$ و $0 < q_1 \le q_2 < \infty$ عندئذٍ فإن : $\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p_2(.),q_2}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p_1(.),q_1}(\Omega)$.

الإثبات :

1) لتكن $f \in \dot{Mk}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)$ عندئذٍ يكفي أن نبرهن أنَ:

$$\| f \|_{\dot{Mk}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)} \le \| f \|_{\dot{Mk}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)}$$

$$\| f \|_{\dot{Mk}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)} = \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_1(.)p(.)} \| f\chi_k \|^{p(.)}_{L^q(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p(.)}}$$

$$\le \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}} \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{L} \left(2^{K\alpha_1(.)p(.)} \right)^{\frac{\alpha_2(.)}{\alpha_1(.)}} \right)^{\frac{\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} \left(\| f\chi_k \|^{P(.)}_{L^q(\Omega)} \right)^{\frac{\alpha_2(.)}{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)}} \right)^{\frac{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}} \right]^{\frac{1}{P(.)}}$$

$$\le \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}} \left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p(.)} \right)^{\frac{\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}} \left(\left(\sum_{K=-\infty}^{L} \left(\| f\chi_k \|^{P(.)}_{L^q(\Omega)} \right)^{\frac{\alpha_2(.)}{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)}} \right)^{\frac{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}} \right) \right]^{\frac{1}{P(.)}}$$

$$\le \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}} \left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p(.)} \right) \left(\sum_{K=-\infty}^{L} \left(\| f\chi_k \|^{P(.)}_{L^q(\Omega)} \right)^{\frac{\alpha_2(.)}{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)} \frac{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}} \right) \right]^{\frac{1}{P(.)}}$$

$$\le \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p(.)} \| f\chi_k \|^{p(.)}_{L^q(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p(.)}} = \| f \|_{\dot{Mk}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)} < \infty$$

وبالتَالي فإن $f \in \dot{Mk}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)$ وعليه : $\dot{Mk}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega) \subseteq \dot{Mk}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p(.),q}(\Omega)$.

2) لتكن $f \in \dot{Mk}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_2}(\Omega)$ عندئذٍ يكفي أن نبرهن انَ:

$$\| f \|_{\dot{Mk}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_1}(\Omega)} \le \| f \|_{\dot{Mk}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_2}(\Omega)}$$

$$\| f \|_{\dot{Mk}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_1}(\Omega)} = \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha(.)p(.)} \| f\chi_k \|^{p(.)}_{L^{q_1}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p(.)}}$$

ولدينا من المبرهنة المساعدة إذا كان $0 < q_1 \le q_2 < \infty$ و $\mu(\Omega) < \infty$ عندئذٍ فإن : $\| f \|_{L^{q_1}}(\Omega) \le \| f \|_{L^{q_2}}(\Omega)$ وبالعودة إلى البرهان،

$$\| f \|_{\dot{Mk}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_1}(\Omega)} = \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{-L\lambda}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha(.)p(.)} \| f\chi_k \|^{p(.)}_{L^{q_1}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p(.)}}$$

$$\le \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{-L\lambda}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha(.)p(.)} \| f\chi_k \|^{p(.)}_{L^{q_2}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p(.)}}$$

$$= \| f \|_{\dot{Mk}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_2}(\Omega)} < \infty$$

وعليه فإنَ $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_1}(\Omega)$ وبالتَالي : $\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_2}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_1}(\Omega)$

3) لتكن $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p_2(.),q_2}(\Omega)$ ، عندئذٍ يكفي أن نبرهن أنَ:

$$\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p_1(.),q_1}(\Omega)} \le \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p_2(.),q_2}(\Omega)}$$

$$\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p_1(.),q_1}(\Omega)} = \sup_{L\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_1(.)p_1(.)} \| f\chi_k \|^{p_1(.)}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p_1(.)}}$$

$$\le \sup_{L\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}}\left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L}\left(2^{K\alpha_1(.)p_1(.)}\right)^{\frac{\alpha_2(.)P_2(.)}{\alpha_1(.)P_1(.)}}\right)^{\frac{\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_2(.)}}\left(\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left(\| f\chi_k \|^{p_1(.)}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{\alpha_2(.)P_2(.)}{\alpha_2(.)P_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)P_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_2(.)}}\right]^{\frac{1}{p_1(.)}}$$

$$\le \sup_{L\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}}\left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)}\right)^{\frac{\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_2(.)}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L}\left(\| f\chi_k \|^{p_2(.)}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{\alpha_2(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)P_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_2(.)}}\right]^{\frac{1}{p_1(.)}}$$

$$\le \sup_{L\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}}\left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)}\right)^{\frac{\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_1(.)}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L}\left(\| f\chi_k \|^{p_2(.)}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{\alpha_2(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)P_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_1(.)}}\right]^{\frac{1}{p_2(.)}}$$

$$\le \sup_{L\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}}\left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)}\right)^{\frac{\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_1(.)}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L}\left(\| f\chi_k \|^{p_2(.)}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{\alpha_2(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}\cdot\frac{\alpha_2(.)P_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)P_1(.)}}\right)\right]^{\frac{1}{p_2(.)}}$$

$$\le \sup_{L\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)} \| f\chi_k \|^{P_2(.)}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p_2(.)}}$$

وبحسب البند (2)

$$\le \sup_{L\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)} \| f\chi_k \|^{P_2(.)}_{L^{q_2}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p_2(.)}}:$$

$$= \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p_2(.),q_2}(\Omega)} < \infty$$

وعليه فإن $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p_1(.),q_1}(\Omega)$ وبالتَالي: $\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p_2(.),q_2}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p_1(.),q_1}(\Omega)$.

وكنتيجة مباشرة للمبرهنة السَابقة إذا وضعنا $\lambda = 0$ نحصل على بعض علاقات التَداخل بين فضاءات هير المتجانسة ذات الأس المتغير $\dot{k}^{\alpha(.)}_{p(.),q}(\Omega)$:

نتيجة 1)

1) إذا كانت $0 < \alpha_1(.) \le \alpha_2(.) < \infty$ عندئذٍ فإن: $\dot{k}^{\alpha_2(.)}_{p(.),q}(\Omega) \subseteq \dot{k}^{\alpha_1(.)}_{p(.),q}(\Omega)$.

2) إذا كانت $0 < q_1 \le q_2 < \infty$ عندئذٍ فإن: $\dot{k}^{\alpha(.)}_{p(.),q_2}(\Omega) \subseteq \dot{k}^{\alpha(.)}_{p(.),q_1}(\Omega)$.

3) إذا كانت $0 < \alpha_1(.) \le \alpha_2(.) < \infty$ و $0 < p_1(.) \le p_2(.) < \infty$ و $0 < q_1 \le q_2 < \infty$ عندئذٍ فإن : $\dot{k}_{p_1(.),q_1}^{\alpha_1(.)}(\Omega) \subseteq \dot{k}_{p_2(.),q_2}^{\alpha_2(.)}(\Omega)$.

مبرهنة 2)

1) إذا كانت $0 < \alpha_1(.) \le \alpha_2(.) < \infty$ عندئذٍ فإن $W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_1(.),\lambda}(\Omega) \subseteq W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_2(.),\lambda}(\Omega)$.

2) إذا كانت $0 < q_1 \le q_2 < \infty$ عندئذٍ فإن: $W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q_2}^{\alpha(.),\lambda}(\Omega) \subseteq W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q_1}^{\alpha(.),\lambda}(\Omega)$.

3) إذا كانت $0 < \alpha_1(.) \le \alpha_2(.) < \infty$ و $0 < p_1(.) \le p_2(.) < \infty$ و $0 < q_2 \le q_1 < \infty$ عندئذٍ فإن : $W\mathcal{M}\dot{k}_{p_1(.),q_1}^{\alpha_1(.),\lambda}(\Omega) \subseteq W\mathcal{M}\dot{k}_{p_2(.),q_2}^{\alpha_2(.),\lambda}(\Omega)$.

الإثبات:

1) لتكن $f \in W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_2(.),\lambda}(\Omega)$ عندئذٍ يكفي أن نبرهن أن:

$$\| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_1(.),\lambda}(\Omega)} \le \| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_2(.),\lambda}(\Omega)}$$

$$\| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_1(.),\lambda}(\Omega)} = \sup_{\gamma > 0} \gamma \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_1(.)P(.)} m_k(\gamma, f)^{\frac{p(.)}{q}} \right)^{\frac{1}{p(.)}}$$

$$\le \sup_{\gamma > 0} \gamma \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} \left(2^{K\alpha_1(.)P(.)} \right)^{\frac{\alpha_2(.)}{\alpha_1(.)}} \right)^{\frac{\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} \left(m_k(\gamma, f)^{\frac{p(.)}{q}} \right)^{\frac{\alpha_2(.)}{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)}} \right)^{\frac{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}} \right]^{\frac{1}{p(.)}}$$

$$\le \sup_{\gamma > 0} \gamma \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)P(.)} \right)^{\frac{\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} \left(m_k(\gamma, f)^{\frac{p(.)}{q}} \right)^{\frac{\alpha_2(.)}{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)} \frac{\alpha_2(.)-\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}} \right) \right]^{\frac{1}{p(.)}}$$

$$\le \sup_{\gamma > 0} \gamma \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)P(.)} m_k(\gamma, f)^{\frac{p(.)}{q}} \right)^{\frac{1}{p(.)}} = \| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_2(.),\lambda}(\Omega)} < \infty$$

(الخطوة الأخيرة من كون : $0 < \alpha_1(.) \le \alpha_2(.) < \infty$ بالتالي : $\frac{\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)} \le 1$)

وعليه فإن $f \in W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_1(.),\lambda}(\Omega)$ وبالتالي : $W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_2(.),\lambda}(\Omega) \subseteq W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q}^{\alpha_1(.),\lambda}(\Omega)$

2) لتكن $f \in W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q_1}^{\alpha(.),\lambda}(\Omega)$ عندئذٍ يكفي أن نبرهن أنَ:

$$\| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q_2}^{\alpha(.),\lambda}(\Omega)} \le \| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}_{p(.),q_1}^{\alpha(.),\lambda}(\Omega)}$$

$$\| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_2}(\Omega)} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha(.)P(.)} m_k(\gamma,f)^{\frac{p(.)}{q_2}} \right)^{\frac{1}{p(.)}}$$

$$\leq \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} \left(2^{K\alpha(.)P(.)}\right)^{\frac{q_2}{q_2-q_1}} \right)^{\frac{q_2-q_1}{q_2}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} \left(m_k(\gamma,f)^{\frac{p(.)}{q_2}} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right]^{\frac{1}{p(.)}}$$

$$\leq \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} \left(2^{K\alpha(.)P(.)}\right)^{\frac{q_2}{q_2-q_1}\frac{q_2-q_1}{q_2}} \right) \left(\sum_{K=-\infty}^{L} m_k(\gamma,f)^{\frac{p(.)}{q_1}} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right]^{\frac{1}{p(.)}}$$

$$\leq \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha(.)P(.)} m_k(\gamma,f)^{\frac{p(.)}{q_1}} \right)^{\frac{1}{p(.)}} = \| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_1}(\Omega)} < \infty$$

وعليه فإن $f \in W\mathcal{M}\dot{k}{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_2}(\Omega)$ وبالتالي : $W\mathcal{M}\dot{k}{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_1}(\Omega) \subseteq W\mathcal{M}\dot{k}{}^{\alpha(.),\lambda}_{p(.),q_2}(\Omega)$

3) لتكن $f \in W\mathcal{M}\dot{k}{}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p_2(.),q_2}(\Omega)$ عندئذٍ يكفي أن نبرهن أن:

$$\| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}{}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p_1(.),q_1}(\Omega)} \leq \| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}{}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p_2(.),q_2}(\Omega)}$$

$$\| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p_1(.),q_1}(\Omega)} = \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_1(.)P_1(.)} m_k(\gamma,f)^{\frac{P_1(.)}{q_1}}\right)^{\frac{1}{P_1(.)}}$$

$$\le \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L}\left(2^{K\alpha_1(.)P_1(.)}\right)^{\frac{\alpha_2(.)p_2(.)}{\alpha_1(.)P_1(.)}}\right)^{\frac{\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)p_2(.)}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L}\left(m_k(\gamma,f)^{\frac{P_1(.)}{q_1}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)p_2(.)}{\alpha_2(.)p_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)p_2(.)-\alpha}{\alpha_2(.)p_2}}\right.$$

$$\le \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)}\right)^{\frac{\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)p_2(.)}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L}\left(m_k(\gamma,f)^{\frac{P_2(.)}{q_1}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)p_1(.)}{\alpha_2(.)p_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)p_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)p_2(.)}}\right]^{\frac{1}{P_1(}}$$

$$\le \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)}\right)^{\frac{\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)p_1(.)}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L}\left(m_k(\gamma,f)^{\frac{P_2(.)}{q_1}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)p_1(.)}{\alpha_2(.)p_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)p_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)p_1(.)}}\right]^{\frac{1}{P_2}}$$

$$\le \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\left[\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)}\right)^{\frac{\alpha_1(.)}{\alpha_2(.)}}\left(\sum_{K=-\infty}^{L}\left(m_k(\gamma,f)^{\frac{P_2(.)}{q_1}}\right)^{\frac{\alpha_2(.)p_1(.)}{\alpha_2(.)p_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}\frac{\alpha_2(.)p_2(.)-\alpha_1(.)P_1(.)}{\alpha_2(.)p_1(.)}}\right)\right]^{\frac{1}{P_2(.)}}$$

$$\le \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)} m_k(\gamma,f)^{\frac{P_2(.)}{q_1}}\right)^{\frac{1}{P_2(.)}}$$

ومن البند (2)

$$\le \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha_2(.)p_2(.)} m_k(\gamma,f)^{\frac{P_2(.)}{q_2}}\right)^{\frac{1}{P_2(.)}} = \| f \|_{W\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p_2(.),q_2}(\Omega)} < \infty$$

وعليه فإن $f \in W\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p_1(.),q_1}(\Omega)$ والتالي:

$W\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha_2(.),\lambda}_{p_2(.),q_2}(\Omega) \subseteq W\mathcal{M}\dot{k}\,{}^{\alpha_1(.),\lambda}_{p_1(.),q_1}(\Omega)$.

وكنتيجة مباشرة للمبرهنة السَابقة إذا وضعنا $\lambda = 0$ نحصل على بعض علاقات التَداخل بين فضاءات هير الضَعيفة المتجانسة ذات الأس المتغير $W\dot{k}\,{}^{\alpha(.)}_{p(.),q}(\Omega)$:

نتيجة 2)

1) إذا كانت $0 < \alpha_1(.) \leq \alpha_2(.) < \infty$ عندئذٍ فإن $W\dot{k}^{\alpha_1(.)}_{p(.),q}(\Omega) \subseteq W\dot{k}^{\alpha_2(.)}_{p(.),q}(\Omega)$.

2) إذا كانت $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$ عندئذٍ فإن: $W\dot{k}_{p(.),q_2}(\Omega) \subseteq W\dot{k}^{\alpha(.)}_{p(.),q_1}(\Omega)$.

3) إذا كانت $0 < \alpha_1(.) \leq \alpha_2(.) < \infty$ و $0 < p_1(.) \leq p_2(.) < \infty$ و $0 < q_2 \leq q_1 < \infty$ عندئذٍ فإن : $W\dot{k}^{\alpha_1(.)}_{p_1(.),q_1}(\Omega) \subseteq W\dot{k}^{\alpha_2(.)}_{p_2(.),q_2}(\Omega)$.

وأخيرا درسنا علاقة التَداخل بين فضاءات هير – موري المتجانسة ذات الأس المتغير من النمط $\{\alpha, \lambda, p, q(.)\}$ من اجل الوسيط $q(.)$:

مبرهنة 3)

إذا كانت $0 < q_1(.) \leq q_2(.) < \infty$ عندئذٍ فإن: $\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1(.)}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2(.)}(\Omega)$.

الإثبات:

لتكن $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}(\Omega)$ عندئذٍ يكفي أن نبرهن أن :. $\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2(.)}(\Omega)} \leq \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1(.)}(\Omega)}$

$$\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1(.)}(\Omega)} = \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha p} \| f\chi_k \|^{p}_{L^{q_1(.)}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

لدينا : $\| f\chi_k \|_{L^{q_1(.)}(\Omega)} = \inf\left\{\xi > 0 : \rho_{q_{1(.)}}\left(\frac{f\chi_k}{\xi}\right) \leq 1\right\}$

حيث : $\rho_{q_{1(.)}}\left(\frac{f\chi_k}{\xi}\right) = \int_\Omega \left|\frac{f\chi_k}{\xi}\right|^{q_{1(x)}} dx$

ودون التَقليل من عمومية المسألة : بفرض

$$|f\chi_k| \geq \xi$$

وبما أن $q_1(x) \leq q_2(x) \Longleftarrow \left|\frac{f\chi_k}{\xi}\right|^{q_{1(x)}} \leq \left|\frac{f\chi_k}{\xi}\right|^{q_{2(x)}} \Leftarrow$

$$\int_\Omega \left|\frac{f\chi_k}{\xi}\right|^{q_{1(x)}} dx \leq \int_\Omega \left|\frac{f\chi_k}{\xi}\right|^{q_{2(x)}} dx \Longrightarrow \rho_{q_{1(.)}}\left(\frac{f\chi_k}{\xi}\right) \leq \rho_{q_{2(.)}}\left(\frac{f\chi_k}{\xi}\right) \Longrightarrow$$

$$\| f\chi_k \|_{L^{q_1(.)}(\Omega)} \leq \| f\chi_k \|_{L^{q_1(.)}(\Omega)}$$

بالعودة الى البرهان:

$$\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1(.)}(\Omega)} = \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha p} \| f\chi_k \|^{p}_{L^{q_1(.)}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{L \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{L\lambda}} \left(\sum_{K=-\infty}^{L} 2^{K\alpha p} \| f\chi_k \|^{p}_{L^{q_2(.)}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2(.)}(\Omega)} < \infty$$

وعليه فإن $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\Omega)$ وبالتالي: $\mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1(.)}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2(.)}(\Omega)$

نتيجة 3)

ينتج من المبرهنة السَابقة أنه من أجل $\lambda = 0$ و إذا كان $0 < q_1(.) \le q_2(.) < \infty$ فإنَ:

$\dot{k}\,^{\alpha}_{p,q_2(.)}(\Omega) \subseteq \dot{k}\,^{\alpha}_{p,q_1(.)}(\Omega)$.

الاستنتاجات والتَوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى تحديد بعض الشُروط الواجب تحققها للحصول على التَداخل بين فضاءات هير –

موري المتجانسة ذات الأس المتغير وهير – موري الضَعيفة المتجانسة ذات الأس المتغير.

ونوصي بدراسة التَداخل بين فضاءات هير – موري المتجانسة الموزونة ذات الأس المتغِير.

المراجع:

[1] LANDON, B, A. 2008, *Degree of Approximation of Holder Continuous Function.* PhD Thesis in Mathematics, Orlando, USA.

[2] MASTA, A, A; GUNAWAN, H; STYA-BUDHI, W. 2016, *Inclusion Properties of Orlicz and weak Orlicz spaces. J. Math. Fund. Sci*. Vol. 48, No. 3, pp. 193-203.

[3] TAQIYUDDIN, M; MASTA, A.A.2018, *Inclusion Properties of Orlicz Spaces and Weak Orlicz Spaces Generated by Concave Functions. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng*. Vol. pp. 288,1-5.

[4] GUNAWAN, H; HAKIM, D.I; LIMANTA, K.M; MASTA, A.A. 2017, *Inclusion properties of generalized Morrey spaces. Math. NACHR*. Vol. 290, pp. 332-340.

[5] GUNAWAN, H; HAKIM, D.I; NAKIA, E; SAWANO, Y. 2018, *On inclusion relation between weak Morrey spaces and Morrey spaces. Nonlinear Anal*. Vol. 168, pp.27-31.

[6] SAWANO, Y; TANAKA, H. 2005, *Morrey spaces for non-doubling measures. ACTA Math. Sin. Engl. Ser*. Vol. 21, No. 6, pp. 1535-1544.

[7] Morrey, c. 1938, *On the Solution of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equation. Transaction of The American Mathematical Society.* vol. 43, no. 1, pp. 126-166.

[8] LU, S; XU, L. 2005, *Boundedness of Rough Singular Integral Operators on The Homogeneous Herz - Morrey Spaces. Hokkaido Math. Journal.* vol. 34, pp. 299-314.

[9] IZUKI, M. 2010. *Boundedness of Sublinear Operators on Herz Spaces with Variable Exponent and Application to Wavelet Characterization. Analysis Mathematics*. vol. 36, no. 1, pp. 33-50.

[10] IZUKI, M. 2010, *Fractional integrals on Herz-Morrey spaces with variable exponent. Hiroshima MATH. J*. vol. 40, pp. 343-355.

[11] JUNGHENN, H.D. *Principles of Analysis. CRC Press, Taylor & Francis Group*,
2018, 541.

[12] CRUZ-URIBE, D; FIORENZA. A; RUZHANSKY. M; Wirth. J. 2014, *Variable Lebesgue Spaces and Hyperbolic Systems.* Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona, Birkhauser, 173.

[13] Cruz-Uribe, D, V; FIORENZA, A. 2013, *Variable Lebesgue Spaces. Foundations* and Harmonic Analysis. Birkhauser, 316.

[14] SUBRAMAIN, B. 1978, *on inclusion* $L_p(\mu) \subseteq L_q(v)$, *Amer. Math. Monthly*. Vol. 85, pp.479-481.

[15] RAHMAN, H. 2021, *Inclusion properties of the homogeneous Herz-Morrey with variable exponent. Cauchy*. Vol.7, no.1, pp,22-27.

[16] WANG, H; LIU, Z. 2020, *Boundedness of Singular Integral Operators on Weak Herz Spaces with Variable Exponent. Annals of Functional Analysis*. Vol. 11, no. 62, pp. 1108-1125.

[17] RAHMAN, H. 2020, *Inclusion properties of the homogeneous Herz-Morrey. Cauchy*. vol. 6, no. 3, pp. 117-121.

[18] علي، محمد. 2013، *دراسة وتقريب صف التوابع العقدية* H_0^{α}. *مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية–سلسلة العلوم الأساسية*. 35 (1) ، 17–9.