مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (3) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (3) 2023

التقارب المنتظم وفق طريقة سيزارو من رتب محددة لمتسلسلة فوربيه

الدكتور نبيل علي *

الدكتور منير مخلوف **

يونس السلطان ***

(تاريخ الإيداع 22/ 3/ 2023 – تاريخ النشر 11/ 7/ 2023)

□ ملخّص □

في هذا البحث، قمنا بدراسة مسألة التقارب المنتظم وفق طريقة سيزارو (C,α) من رتب محددة لمتسلسلة فورييه لدوال مستمرة دورية بدورٍ قدره $2h$ $(0 < h)$ بحيث $(n = 1,2,3, \dots \dots)$. $(-1, -1/2^n) \ni \alpha$.

الكلمات المفتاحية: تقارب منتظم ، طريقة سيزارو ، متسلسلة فورييه.

*أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.

**أستاذ– قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة البعث– حمص– سورية.

*** طالب دراسات عليا(ماجستير)– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس– سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (3) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (3) 2023

Uniform Convergence According to Cesaro means of Determinant order of Fourier series

Dr. Nabil Ali*
Dr. Monir makhlof **
Younis Alsulta***

(Received 22/3/2023.Accepted 11/7/2023)

□ABSTRACT □

In this research ,we did a study the problem uniform convergence of determinant order Cesaro means (C,α) of Fourier series for periodic continuous functions with period $2h$. $(0 < h)$ where $\alpha \in \left(-1,-\frac{1}{2^n}\right)$. $(n = 1,2,3, \dots \dots)$.

Keywords: uniform convergence ,Cesaro method,Fourier series.

*Assistant Professor,Department of Mathematicts, Faculty of Science ,Tartous University ,Tartous, Syria.

** Professor,Department of Mathematicts, Faculty of Science ,Al-Baath University ,Homs ,Syria.

***Postgraduate Student (Master) ,Department of Mathematicts, Faculty of Science ,Tartous University ,Tartous ,Syria.

مقدمة:

تهدف دراستُنا إلى إيجاد مجموع متسلسلةٍ متباعدة بطريقة سيزارو من رتب محددة ، لأنَّه من الممكن أن تكون هذه المتسلسلة متباعدة ولكن يوجد لها مجموع وفق طريقة جمعٍ ما معينة. سواءً كانت هذه الطريقة خطيّة أم غير خطيّة، وتوجد هناك طرائق عديدة لقابلية جمع المتسلسلات منها: آبل و هولدر و ريمان و ريس و الطريقة المصفوفية وطريقة نيورلند وطريقة نيورلند المعممة وغيرها من الطرائق الخطيّة الأخرى.

هدف البحث :

يهدف هذا العمل إلى مناقشة دراسة التقارب المنتظم لمتسلسلة فورييه وفق طريقة سيزارو من رتب محددة وتحديد الشروط اللازمة التي تضمن هذه التقارب.

مواد وطرائق البحث :

في هذا العمل نحتاج إلى بعض التعاريف والرموز المستخدمة ونذكر منها:

تعريف1: [2] طريقة سيزارو (C,α) (Cesaro Method)

لتكن $\sum u_k(x)$ متسلسلة دوال ما و $S_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ $(n=0,1,\dots)$ الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لها عندئذٍ لكل عدد حقيقي α $(\alpha\neq -1,-2,\dots)$

تُعرف طريقة سيزارو لمتسلسلات الدوال الاختيارية بالشكل الآتي

$$\sigma_n^\alpha(x)=\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}S_k(x)=\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha}u_k(x),\ n=0,1,\dots \qquad (1)$$

بحيث

$$A_0^\alpha=1,\ A_k^\alpha=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k)}{k!},k=1,2,\dots$$

نسمي المتتالية $\{A_k^\alpha\}_{k=0}^{\infty}$ بمتتالية أعداد سيزارو من الرتبةα ، ونرمز بـ $\sigma_m^\alpha(F,x)$ $(m=0,1,\dots)$ طريقة سيزارو (C,α) لمتسلسلة فورييه للدالة $F(x)$ القابلة للجمع وفق سيزارو و حيث

$$F(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{h}x+b_n\sin\frac{n\pi}{h}x\right)$$

تعريف2: [3] الكثافة$\boldsymbol{\rho(S)}$: تعرف الكثافة $\rho(S)$ بالعلاقة :

$$\rho(S)=\limsup_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}$$

حيث s_n عدد عناصر المجموعة S و $s_n\leq n$

مبرهنة لوزين Lusin Theorem: [7] لتكن $X\subseteq R^n$ مجموعة مقيسة، وفق قياس ليبيغ المنتهيّ ولتكن الدالة $f:X\to\overline{R}$ قيوسة وفق ليبيغ ومحدودة تقريباً في كل مكان عندئذٍ من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ توجد مجموعة مغلقة مثل $F_\varepsilon\subset X$ بحيث أن مقصور الدالة f على F_ε هو $f\,|_{F_\varepsilon}$ دالة مستمرة و يتحقق: $\mu(X\backslash F_\varepsilon)<\varepsilon$ (حيث μ قياس ليبيغ على R^n)

المناقشة و النتائج:$[1,3,4,5,6,7,8,9]$

لتكن f دالة مستمرة تقريباً في كل مكان على المجال $[-h,h]$ $(0<h)$. متسلسلة فورييه للدالة f عند النقطةt تعرف بالشكل:

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{h}t+b_n\sin\frac{n\pi}{h}t\right)$$

حيث

$$a_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}f(t)\cos\frac{n\pi}{h}t\,dt\qquad ;n=0,1,2,\dots.$$

و

$$b_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}f(t)\sin\frac{n\pi}{h}t\,dt\qquad ;n=1,2,\dots.$$

سنعتمد في هذا البحث الرموز الآتية:

نرمز بـ $L^0=L^0[-h,h]$ إلى فضاء ليبيغ (Lebesgue) للدوال القابلة للقياس والمحدودة تقريباً في كل مكان على المجال $[-h,h]$ و $L^1=L^1[-h,h]$ إلى فضاء كل الدوال القابلة للمكاملة حسب ليبيغ من الرتبة الأولى على المجال $[-h,h]$ و $C[-h,h]$ هو فضاء الدوال المستمرة على المجال $[-h,h]$ والمزود بالنظيم $\| f \|_C$ نظيم للدوال المستمرة f.

نرمز بـ μE إلى قياس ليبيغ للمجموعة E .

نرمزبـ $B_{1,\alpha},B_{2,\alpha},\dots$ ثوابت موجبة

- **مطابقة بارسيفال:**

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}[f(t)]^2\,\mathrm{dt}=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2$$

علاقات مساعدة : $[2]$

$$A_n^{\alpha}=\frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\qquad,\alpha\neq-1,-2,\dots,\tag{2}$$

$$A_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}A_k^{\alpha-1}\qquad,n=0,1,\dots,\alpha\neq-1,-2,\dots\tag{3}$$

$$(-1)^tA_n^{\alpha}>0,\ n\geq\ell,\ \alpha\in(-\ell-1,-\ell)\qquad,\ell\in Z^{(+)}\tag{4}$$

تمهيدية 1 : بفرض ان $g(t)\geq 0$ معرفة في المجموعة E حيث $(\mu\boldsymbol{E}>0)$ وإذا كان

$$\frac{1}{\mu E}\int_E g(u)du\geq A>0\ ,\ \frac{1}{\mu E}\int_E g^2(u)du\leq B$$

من أجل أي $\delta\in(0,1)$ فإن أي مجموعة جزئية $\acute{E}$ من المجموعة E ، بحيث إن$g(t)\geq$ δA،هي مجموعة قيوسة وقياسها أكبر أو تساوي $(1-\delta)^2\frac{A^2}{B}\cdot\mu E$

تمهيدية 2: بفرض أن $\delta > 0, \eta \in (0,\pi), N_0 \in \mathbb{N}$ عندئذ من أجل كل دالة $f \in C[-h,h]$ توجد دالة $g \in C[-h,h]$ وكثيرات حدود مثلثية $T(t)$ والتي تعطى بالشكل الآتي:

$$T(t) = \sum_{m=N_0}^{\bar{N}} a_m \cos\frac{m\pi}{h}\mathrm{t} + b_m \sin\frac{m\pi}{h}\mathrm{t}$$

بحيث :

$$\mu\{t \in [-h,h]: g(t) = f(t)\} = 2h - \eta$$

$$\parallel g \parallel_C \leq \frac{13}{\eta} \cdot \parallel f \parallel_C$$

$$\parallel g - T \parallel_C \leq \delta$$

الآن ننتقل لإثبات المبرهنات الآتية:

مبرهنة(1):

لتكن $\{m_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ متتالية ما متزايدة من الأعداد الطبيعية ولتكن $f_0 \in C[-h,h]$ $(0 < h)$ عندئذ من أجل كل $\alpha \in (-1, -1/2^n)$ $(n = 1,2,3, \dots \dots)$ يتحقق ما يلي:

$$\mu\left\{t \in [-h,h]: \limsup_{\nu\to\infty}\left|\sigma_{m_\nu}^{\alpha}(f_0,t)\right| = +\infty\right\} > 0$$

الإثبات:

بفرض أن

$$Q_m(t) = \sum_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\ln^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}t \quad , \; m = 1,2,3, \dots.$$

حيث $\varepsilon_j = \mp 1$ و علاوة على ذلك لدينا :

$$\left\|\sum_{\nu=N}^{M+N-1} \varepsilon_\nu e^{i\nu t}\right\|_C \leq 5\sqrt{M}$$

حيث N, M أعداد موجبة .

ومنه نجد أن:

$$\max_{2^m \leq k < 2^{m+1}} \left\|\sum_{j=2^m}^{k} \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\ln^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}t\right\|_C \leq$$

$$\leq \frac{2}{\ln^2 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^m} \cdot m^2} \max_{2^m \leq k < 2^{m+1}} \left\|\sum_{j=2^m}^{k} \varepsilon_j \cos\frac{j\pi}{h}t\right\|_C \leq \frac{25}{m^2} \tag{5}$$

فإذاً

$$\|Q_m(t)\|_C \leq \frac{25}{m^2}, \; m = 1,2,3, \dots \tag{6}$$

الآن لنضع

$$f_0(t) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\ln^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}t \tag{7}$$

وبما أن المتسلسلة (7) تتقارب بشكل منتظم فأن الدالة $f_0(t)$ مستمرة، ونرمز بـ $S_k(f_0,t)$ $(k=0,1,\dots)$ إلى الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فورييه للدالة $f_0(t)$.

لدينا $S_0=S_1=0$ و

$$S_k(f_0,t)=\sum_{m=1}^{s-1}Q_m(t)+\sum_{j=2^s}^{k}\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\log_2^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}t \qquad (8)$$

بحيث $2^s\le k<2^{s+1}$ $(s\ge 2)$

وباستخدام العلاقات (8) ، (6) ، (5)، نجد

$$\sup_{k\ge 1}\|S_k(f_0,t)\|_C\le 75 \qquad (9)$$

الآن لتكن $\alpha\in(-1,-1/2^n)$ $(n=1,2,3,\dots)$ ولنرمز بـ $\sigma_n^\alpha(f_0,t)$ $(n=0,1,\dots)$ لمتتالية سيزارو من الرتبة α لمتسلسلة فورييه للدالة $f_0(x)$ وليكن $2^p\le n<2^{p+1}$ $(p=3,4,\dots)$ ومن العلاقة (8) نجد :

$$A_n^\alpha\cdot\sigma_n^\alpha(f_0,t)=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}\cdot S_k(f_0,t)=\sum_{k=2}^{2^{p-1}-1}A_{n-k}^{\alpha-1}\cdot S_k(f_0,t)+\sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1}A_{n-k}^{\alpha-1}$$
$$\cdot\left(\sum_{m=1}^{p-2}Q_m(t)+\sum_{j=2^{p-1}}^{k}\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\ln^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}t\right)+\sum_{k=2^p}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}$$
$$\cdot\left(\sum_{m=1}^{p-1}Q_m(t)+\sum_{j=2^p}^{k}\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\ln^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}t\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{2^{p-1}-1}A_{n-k}^{\alpha-1}\cdot S_k(f_0,t)+\sum_{k=2^{p-1}}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}\cdot\sum_{m=1}^{p-2}Q_m(t)$$
$$+\sum_{k=2^{p-1}}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}\sum_{j=2^{p-1}}^{k}\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\ln^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}t=\sum_{l=1}^{3}I_l(t)$$

ومن العلاقات (6) ,(4) -(2) و(9) نجد أن:

$$|I_1(t)|\le 75\sum_{k=2}^{2^{p-1}-1}|A_{n-k}^{\alpha-1}|=75\left(A_{n-2p-1}^\alpha-A_{n-2}^\alpha\right)$$
$$<B_{1,\alpha}\cdot A_n^\alpha \qquad (10)$$

حيث $B_{1,\alpha},B_{2,\alpha},\dots$ ثوابت موجبة و

$$|I_2(t)|\le 50A_{n-2^{p-1}}^\alpha<B_{2,\alpha}\cdot A_n^\alpha \qquad (11)$$

ونلاحظ ان

$$\frac{h}{\pi}\int_{-h}^{h}|I_3(t)|dt \geq \left|\frac{h}{\pi}\int_{-h}^{h} I_3(t)\cos\frac{n\pi}{h}tdt\right| =$$
$$= \left|\frac{h}{\pi}\int_{-h}^{h}\sum_{k=2^{p-1}}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}\sum_{j=2p-1}^{k}\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\ln^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}\mathrm{t}\cos\frac{n\pi}{h}tdt\right| =$$
$$= \left|\frac{h}{\pi}\int_{-h}^{h}\sum_{j=2^{p-1}}^{n} A_{n-j}^{\alpha}\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\ln^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}\mathrm{t}\cos\frac{n\pi}{h}tdt\right| = \frac{h}{\sqrt{n}\ln^2 n} \qquad (12)$$

باستخدام مطابقة بارسيفال نحصل على:

$$\frac{1}{h}\cdot\int_{-h}^{h}|I_3(t)|^2dh = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{j=2^{p-1}}^{n} A_{n-j}^{\alpha}\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j}\ln^2 j}\cos\frac{j\pi}{h}t\right]^2dt = \sum_{j=2^{p-1}}^{n}\frac{\left(A_{n-j}^{\alpha}\right)^2}{j\cdot\ln^4 j}$$
$$< \frac{B_{3,\alpha}}{n\ln^4 n}. \qquad (13)$$

من العلاقات $(12), (13)$ والتمهيدية 1 نحصل على:

$$\mu\left\{t\in(-h,h): |I_3(t)| \geq \frac{h}{2\sqrt{n}\ln^2 n}\right\} \geq \frac{h^2}{8B_{3,\alpha}}. \qquad (14)$$

من العلاقات $(2), (10)-(14)$ و $\sigma_n^{\alpha}(f_0,t) = (A_n^{\alpha})^{-1}\sum_{l=1}^{3} I_l(t)$ و بفرض أنه يوجد عدد طبيعي n_α وثوابت موجبة $B_{4,\alpha}$ و $B_{5,\alpha}$ نجد أن:

$$\mu\left\{t\in(-h,h): |\sigma_n^{\alpha}(f_0,t)| \geq \frac{B_{4,\alpha}}{n^{\alpha+1/2}\ln^2 n}\right\} \geq B_{5,\alpha} > 0,\ n \geq n_\alpha \qquad (15)$$

لتكن $M = \{m_k\}_{k=1}^{\infty} \to \infty$ متتالية متزايدة من الأعداد الطبيعية ولتكن

$$G_M^{(\alpha)} = \bigcap_{q=1}^{\infty}\bigcup_{n=q}^{\infty} G_{m_n}^{(\alpha)}$$

حيث

$$G_s^{(\alpha)} = \left\{t\in(-h,h): |\sigma_s^{\alpha}(f_0,t)| \geq \frac{B_{4,\alpha}}{s^{\alpha+1/2}\ln^2 s}\right\} \qquad ,s \geq 1.$$

من العلاقة (15) ينتج ان $\mu G_M^{(\alpha)} \geq B_{5,\alpha} > 0$ بحيث $x_0 \in G_M^{(\alpha)}$ ، وبالتالي توجد متتالية من الأعداد الطبيعية $n_k = n_k(t_0)$ بحيث $t_0 \in G_{m_{n_k}}^{(\alpha)}$ $(k = 1,2,\ldots)$ ومنه نجد أن:

$$\left|\sigma_{m_{n_k}}^{\alpha}(f_0,t_0)\right| \geq \frac{B_{4,\alpha}}{m_{n_k}^{\alpha+1/2}\ln^2 m_{n_k}}, k = 1,2,\ldots.$$

ومن أجل أي $t \in G_M^{(\alpha)}$ يكون لدينا $\left|\sigma_{m_n}^{\alpha}(f_0,t)\right| = +\infty$ $\operatorname{Lim} sup_{n\to\infty}$ وبهذا يكون إثبات المبرهنة١ قد تم .

الآن ننتقل لإثبات المبرهنة الآتية:

مبرهنة(2):

لتكن S مجموعة من الأعداد الطبيعية و $\rho(S) = 1$ عندئذٍ من أجل أي عدد موجب ε و الدالة $f \in L^0[-h,h]$ $(0 < h)$ يمكننا إيجاد دالة $g \in C[-h,h]$ بحيث

$$\mu\{t: g \neq f\} < \varepsilon$$

ومن أجل $\alpha < 0$ $(\alpha \neq -1, -2, \dots)$ فإن طرائق سيزارو $\sigma_m^\alpha(g,t)$ لمتسلسلة فوربيه المثلثية للدالة g تتقارب بانتظام على المجال $[-h,h]$ عندما $m \to \infty$ $(m \in S)$.

الإثبات:

لتكن $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية كثيرات حدود مثلثية وبتطبيق التمهيدية ٢ من أجل $j = 1,2,\dots,k$ $(k = 1,2,\dots)$ يكون لدينا

$$\bar{T}_j^{(k)}(t) = \sum_{\nu=M_{j-1}^{(k)}+1}^{M_j^{(k)}} a_\nu^{(k,j)} \cos\frac{\nu\pi}{h} t + b_\nu^{(k,j)} \sin\frac{\nu\pi}{h} t$$

بحيث :

$$N_k = M_0^{(k)} < M_1^{(k)} < M_2^{(k)} < \dots < M_k^{(k)} = \bar{N}_k \qquad (16)$$

و تحقق الشروط الآتية :

$$\bar{g}_j^{(k)}(t) = f_k(t),\ t \in E_j^{(k)} \qquad (17)$$

$$\mu E_j^{(k)} > 2h - 2^{-j}, \qquad (18)$$

$$\left\|\bar{g}_j^{(k)}(t)\right\|_C \leq 2^{j+4} \cdot \|f_k(t)\|_C \qquad (19)$$

$$\left\|\bar{g}_j^{(k)}(t) - \bar{T}_j^{(k)}(t)\right\|_C \leq 4^{-k} \qquad (20)$$

$$N_{k+1} = k \cdot 2^k \cdot (\bar{N}_k + 1) \cdot \left[\sum_{m=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} l\left(\bar{T}_i^{(m)}\right) + 1\right] + 1 \quad ; N_1 = 1 \qquad (21)$$

بحيث إن

$$l\left(\bar{T}_i^{(m)}\right) = \sum_{\nu=M_{i-1}^{(m)}+1}^{M_i^{(m)}} \left(\left|a_\nu^{(m,i)}\right| + \left|b_\nu^{(m,i)}\right|\right), i = 1,2,\dots,m, m = 1,2,\dots$$

و

$$\widetilde{N}_{k+1} = k \cdot (\bar{N}_k + 1) \cdot \left[\sum_{m=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} l\left(\bar{T}_i^{(m)}\right) + 1\right] + 1 \ , \bar{N}_1 = 0, \qquad (22)$$

$$S = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left[\tilde{N}_j, N_j\right]$$

عندئذً من العلاقات (22), (21), (16) ينتج ان

$$\widetilde{N}_1 < N_1 < \bar{N}_1 < \widetilde{N}_2 < N_2 < \bar{N}_2 < \dots < \widetilde{N}_k < N_k < \bar{N}_k < \dots$$

ومنه نحصل على

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\widetilde{N}_k}{N_k} = 0$$

الآن ليكن s_n عدد عناصر المجموعة S بحيث $s_n \leq n$ عندئذٍ نجد

$$\frac{s_{N_k}}{N_k} = \frac{\sum_{s=1}^{k} \left(N_s - \widetilde{N}_s + 1\right)}{N_k} > \frac{N_k - \widetilde{N}_k}{N_k} = 1 - \frac{\widetilde{N}_k}{N_k}$$

والتي تحقق $\rho(S) = 1$ وبفرض أن $\varepsilon \in (0,2h)$ و $f \in L^0[-h,h]$، ثم بتطبيق مبرهنة لوزين

يمكن إيجاد دالة $\bar{f} \in C[-h,h]$ تحقق أن $\mu\left\{t: \frac{7}{f}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$ و $\theta = \max\{\| J \|_e, 1\}$ ومن ثم توجد متتالية جزئية $\left\{f_{k_s}(t)\right\}_{s=1}^{\infty}$ للمتتالية $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون

$$\lim_{p\to\infty}\left\|\sum_{s=1}^{p} f_{k_s}(t) - \bar{f}(t)\right\|_C = 0 \ , \left\|f_{k_s}(t)\right\|_C \le \frac{6\theta}{4^s}, s \ge 2 \qquad (23)$$

حيث

$$k_1 > \lambda = \left[\log_{\frac{1}{2}} \varepsilon\right] + 2$$

ومن العلاقة (23) نحصل على

$$\left\|f_{k_1}\right\|_C \le \| \bar{f} \|_C + \sum_{n=2}^{\infty} \left\|f_{k_n}(t)\right\|_C = \frac{3\theta}{2} \qquad (24)$$

$$\left\|f_{k_s}(t)\right\|_C \le \frac{6\theta}{4^s} \qquad , s = 1,2, \ldots . \qquad (25)$$

الان، بفرض أن

$$T_s(t) = \bar{T}_{s+\lambda}^{(\nu_s)}(t) = \sum_{r=m_s}^{\bar{m}_s} \bar{a}_r^{(s)} \cos\frac{r\pi}{h} t + \bar{b}_r^{(s)} \sin\frac{r\pi}{h} t$$

بحيث

$$M_{s+\lambda-1}^{(\nu_s)} + 1 = m_s,\ M_{s+\lambda}^{(\nu_0)} = m_s;\ a_r^{(\nu_s,\, s+\lambda)} = \bar{a}_r^{(s)},\ b_r^{(\nu_s, s+\lambda)} = \bar{b}_r^{(s)}$$

ومن أجل كل $s = 1,2, \ldots$ يتحقق ما يلي:

$$\mu G_s > 2h - 2^{-s-\lambda}, \qquad (26)$$

$$g_s(t) = f_{k_s}(t),\ t \in G_s \qquad (27)$$

$$\left\|g_s(t)\right\|_C < \theta \cdot 2^{-s+\lambda+13}, \qquad (28)$$

$$\left\|\sum_{r=1}^{s} \left(T_r(t) - g_r(t)\right)\right\|_C \le 4^{-s+2} \qquad (29)$$

$$\left\|f_{\nu_s}(t)\right\|_C \le \theta \cdot 4^{-s+4} \qquad (30)$$

وليكن

$$T_1(t) = T_{\lambda+1}^{(k_1)}(t),\ G_1 = E_{\lambda+1}^{(k_1)},\ g_1(t) = \bar{g}_{\lambda+1}^{(k_1)}(t),\ f_{\nu_1}(t) = f_{k_1}(t)$$

الآن، عندما $s = 1$ نجد أنه من (20) ,(19) , (18) , (17) و (25) أن:

$$g_1(t) = \bar{g}_{\lambda+1}^{(k_1)}(t) = f_{k_1}(t), t \in G_1$$

$$\mu G_1 = \mu E_{\lambda+1}^{(k_1)} > 2\pi - 2^{-1-\lambda}$$

$$\|g_1\|_C = \left\|\bar{g}_{\lambda+1}^{(k_1)}\right\|_C \le 2^{\lambda+5} \cdot \left\|f_{k_1}(t)\right\|_C \le 3\theta \cdot 2^{\lambda+4} < \theta \cdot 2^{\lambda+12}$$

$$\|T_1 - g_1\|_C = \left\|\bar{T}_{\lambda+1}^{(k_1)} - \bar{g}_{\lambda+1}^{(k_1)}\right\|_C \le 4^{-k_1} \le 4$$

$$\left\|f_{\nu_1}\right\|_C = \left\|f_{k_1}\right\|_C \le 3\theta/2 < \theta \cdot 4^3$$

لنفرض أن الدوال $\left\{f_{\nu_s}(t)\right\}_{s=1}^{q}, \{g_s(t)\}_{s=1}^{q}$ والمجموعات $\{G_s\}_{s=1}^{q}$ وكثيرات الحدود $\{T_s(t)\}_{s=1}^{q}$ محدودة من أجل $s = 1,2, \ldots, q$ و الأعداد الطبيعية $k_1 = \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_q$ وتحقق الشروط

(30)−(26) ومن أجل $s = q + 1$ نختار الدالة $\mathrm{f}_{\nu_{q+1}}(t)$ بحيث $\nu_{\mathrm{q}+1} > \nu_{\mathrm{q}} + q + \lambda$ التي ينتج عنها:

$$\left\| f_{\nu_{q+1}}(t) - \left\{ f_{k_{q+1}}(t) - \sum_{r=1}^{q} \left(T_r(t) - g_r(t)\right) \right\} \right\|_C \leq 4^{-q} \qquad (31)$$

من العلاقات (31) , (29) , (25) نحصل على:

$$\left\| f_{\nu_{q+1}}(t) \right\|_C \leq \left\| f_{\nu_{q+1}}(t) - \left\{ f_{k_{q+1}}(t) - \sum_{r=1}^{q} \left(T_r(t) - g_r(t)\right) \right\} \right\|_C + \left\| f_{k_{q+1}}(t) \right\|_C$$

$$+ \left\| \sum_{r=1}^{q} \left(T_r(t) - g_r(t)\right) \right\|_C \leq \frac{1}{4^q} + \frac{6\theta}{4^{q+1}} + \frac{16}{4^q} < \theta \cdot 4^{-q+3}. \qquad (32)$$

الآن لنضع

$$T_{q+1}(t) = \bar{T}_{q+\lambda+1}^{(\nu_{q+1})}(t) = \sum_{r=m_{q+1}}^{\bar{m}_{q+1}} \bar{a}_r^{(q+1)} \cos\frac{r\pi}{h} t + \bar{b}_r^{(q+1)} \sin\frac{r\pi}{h} t$$

$$g_{q+1}(t) = f_{k_{q+1}}(t) + \bar{g}_{q+\lambda+1}^{(\nu_{q+1})}(t) - f_{\nu_{q+1}}(t)$$

$$G_{q+1} = E_{q+\lambda+1}^{(\nu_{q+1})}$$

فإننا نستنتج من العلاقات (18) , (17) أن

$$g_{q+1}(t) = f_{k_{q+1}}(t),\ t \in G_{q+1}$$

$$\mu G_{q+1} = \mu E_{q+\lambda+1}^{(\nu_{q+1})} > 2h - 2^{-q-\lambda-1}$$

وعلاوة على ذلك باستخدام العلاقات (32) ,(31) , (19) , عندما $s = q$ نحصل:

$$\left\| g_{q+1}(t) \right\|_C \leq \left\| f_{\nu_{q+1}}(t) - \left\{ f_{k_{q+1}}(t) - \sum_{r=1}^{q} \left(T_r(t) - g_r(t)\right) \right\} + \left\| \bar{g}_{\nu_{q+1}^{(q+\lambda+1)}}(t) \right\|_C \right.$$

$$+ \left\| \sum_{r=1}^{q} \left(T_r(t) - g_r(t)\right) \right\|_C < \frac{1}{4^q} + 2^{q+\lambda+5} \cdot \frac{64\theta}{4^q} + \frac{16}{4^q} < \theta \cdot 2^{-q+\lambda+12}$$

ومن العلاقات(20) و (31) يكون لدينا:

$$\left\| \sum_{r=1}^{q+1} \left(T_r(t) - g_r(t)\right) \right\|_C \leq \left\| \bar{g}_{q+\lambda+1}^{(\nu_{q+1})}(t) - \bar{T}_{q+\lambda+1}^{(\nu_{q+1})}(t) \right\|_C +$$

$$+ \left\| f_{\nu_{q+1}}(t) - \left\{ f_{k_{q+1}}(t) - \sum_{r=1}^{q} \left(T_r(t) - g_r(t)\right) \right\} \right\|_C < \frac{1}{4^{\nu_{q+1}}} + \frac{1}{4^q} < 4^{-q+1}$$

ومن أجل $s \geq 1$ وبفرض $E = \bigcap_{s=1}^{\infty} G_s$ ومن العلاقة (26) يكون لدينا $\mu E > 2h - \frac{\varepsilon}{2}$ ، و بفرض

$$g(t)=\sum_{q=1}^{\infty} g_q(t) \qquad (33)$$

يكون لدينا

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r\cos\frac{r\pi}{h}t+b_r\sin\frac{r\pi}{h}t=\sum_{q=1}^{\infty} T_q(t)$$

$$=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=m_q}^{\bar{m}_q} \bar{a}_r^{(q)}\cos\frac{r\pi}{h}t+\bar{b}_r^{(q)}\sin\frac{r\pi}{h}t \qquad (34)$$

بحيث

$$a_r=\bar{a}_r^{(q)},\ b_r=\bar{b}_r^{(q)},\ m_q\le r\le \bar{m}_q, q=1,2,\dots,$$

و

$$a_r=b_r=0, r\in\bigcup_{l=1}^{\infty}(\bar{m}_l,m_{l+1})\cup[0,m_1).$$

وبحكم التقارب المنتظم للمتسلسلة الواردة في العلاقة) (33ومن المتسلسلات الواردة في العلاقات (27), (23) ينتج ان $g(t)\in C[-h,h]$ بحيث $g(t)=\bar{f}(t)$ $(t\in E)$و $\mu\{t: f\neq g\}<\varepsilon$

علاوة على ذلك من العلاقات (32) , (24)نجد

$$\left\|\sum_{r=0}^{\bar{m}_q}\left(a_r\cos\frac{r\pi}{h}t+b_r\sin\frac{r\pi}{h}t\right)-g(t)\right\|_C \le\left\|\sum_{r=1}^{q}(T_r(t)-g_r(t))\right\|_C+\sum_{r=q+1}^{\infty}\|g_r\|_C,$$

$$\le 4^{-q+2}+\theta\cdot 2^{\lambda+13}\sum_{r=q+1}^{\infty}2^{-r}=4^{-q+2}+\theta\cdot 2^{-q+\lambda+13}$$

ومنه

$$\lim_{q\to\infty}\left\|\sum_{r=0}^{\bar{m}_q}\left(a_r\cos\frac{r\pi}{h}t+b_r\sin\frac{r\pi}{h}t\right)-g(t)\right\|_C=0$$

و بالتالي فإن العلاقة (34) تمثل متسلسلة فورييه للدالة $g(t)$.

لتكن $\alpha\neq -1,-2,\dots$ ونرمزلطريقة سيزارو $(C,1)$ لمتسلسلة فورييه للدالة$g(t)$ بالرمز $\sigma_n^1(g,t)$ $(n=1,2,\dots)$أي:

$$\sigma_n^1(g,t)=\frac{1}{n+1}\big(S_0(g,t)+S_1(g,t)+\cdots+S_n(g,t)\big)$$

حيث إن $S_n(g,t), n=0,1,\dots$ متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فورييه للدالة $g(t)$ ، وليكن $m\in S$ عدد صحيح موجب اختياري عندئذ نجد أن $m\in[\tilde{N}_k,N_k]$ $(k\in N)$ ، وليكن $a_r^2+b_r^2=0$ $(r\in S)$ عندئذٍ :

$$S_m(g,t)=S_{N_{k-1}}(g,t),\ \bar{N}_{k-1}\le m\le N_k \qquad (35)$$

من العلاقة (35) نحصل على:

$$(m+1)\sigma_m^1(g,t)-(\bar{N}_{k-1}+1)\sigma_{\bar{N}_{k-1}}^1(g,t)=$$
$$=S_{\bar{N}_{k-1}+1}(g,t)+\cdots+S_m(g,t)=(m-\bar{N}_{k-1})S_{\bar{N}_{k-1}}(g,t)$$

وبما أن

$$\sigma_{\bar{N}_{k-1}}^1(g,t)-S_{\bar{N}_{k-1}}(g,t)=\frac{m+1}{m-\bar{N}_{k-1}}\cdot\left(\sigma_{\bar{N}_{k-1}}^1(g,t)-\sigma_m^1(g,t)\right)\qquad(36)$$

فإنه من العلاقات(35) , (3) , (1)نجد أن:

$$\sigma_m^\alpha(g,t)-S_{\bar{N}_{k-1}}(g,t)\quad=\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{\nu=0}^{m}A_{m-\nu}^{\alpha-1}\left(S_\nu(g,t)-S_{\bar{N}_{k-1}}(g,t)\right)=$$
$$=\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{\nu=0}^{\bar{N}_{k-1}}A_{m-\nu}^{\alpha-1}\left(S_\nu(g,t)-S_{\bar{N}_{k-1}}(g,t)\right)\qquad(37)$$

ومن العلاقات (37) , (36) نحصل على:

$$\begin{aligned}\sigma_m^\alpha(g,t)-g(t)&\\&=\left(\sigma_m^\alpha(g,t)-S_{\bar{N}_{k-1}}(g,t)\right)+\left(S_{\bar{N}_{k-1}}(g,t)-\sigma_{\bar{N}_{k-1}}^1(g,t)\right)\\&+\left(\sigma_{\bar{N}_{k-1}}^1(g,t)-g(t)\right)\\&=\left(\sigma_{\bar{N}_{k-1}}^1(g,t)-g(t)\right)+\frac{m+1}{m-\bar{N}_{k-1}}\left(\sigma_m^1(g,t)-\sigma_{\bar{N}_{k-1}}^1(g,t)\right)\end{aligned}$$
$$+\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{\nu=0}^{\bar{N}_{k-1}}A_{m-\nu}^{\alpha-1}\left(S_\nu(g,t)-S_{\bar{N}_{k-1}}(g,t)\right)=I_{m,1}(t)+I_{m,2}(t)+I_{m,3}(t).\qquad(38)$$

إن $I_{m,1}(t)\to 0$ عندما $k,m\to\infty$ بشكل منتظم على المجال $[-h,h]$

$$\frac{m+1}{m-\bar{N}_{k-1}}\le\frac{\tilde{N}_k+1}{\tilde{N}_k-\bar{N}_{k-1}}<4$$

أيضاً $I_{m,2}(t)\to 0$ بشكل منتظم على المجال$[-\mathrm{h},\mathrm{h}]$. ومن العلاقة (4) نستنتج ان المتتالية A_ν^α $(\nu=0,1,\dots)$ لها إشارة ثابتة كبيرة بقدرٍ كافٍ. وهكذا من أجل m كبيرة بقدرٍ كافٍ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\left|I_{m,3}(t)\right|\quad&\le\frac{\left|A_{m-\bar{N}_{k-1}-1}^\alpha-A_m^\alpha\right|}{\left|A_m^\alpha\right|}\cdot\max_{0\le\nu\le\bar{N}_{k-1}}\left\|S_\nu(g,t)-S_{\bar{N}_{k-1}}(g,t)\right\|_c\\&\le\frac{\left|A_{m-\bar{N}_{k-1}-1}^\alpha-A_m^\alpha\right|}{\left|A_m^\alpha\right|}\cdot\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{m}l\left(\bar{T}_i^{(m)}\right)\end{aligned}$$

من العلاقة (2) ينتج ان

$$\left|\left(aA_{m-\bar{N}_{k-1}}^\alpha-A_m^\alpha\right)\cdot(A_m^\alpha)^{-1}\right|<B(\alpha)\bar{N}_{k-1}/m\le B(\alpha)\bar{N}_{k-1}/\tilde{N}_k$$

بحيث $B(\alpha)$ ثابت متعلق بـ α .

وايضاً $I_{m,3}(t)\to 0$ بشكل منتظم على المجال $[-h,h]$

وهكذا من العلاقة (38) نحصل على

$$\lim_{m\in S;m\to\infty}\left\|\sigma_m^\alpha(g,t)-g(t)\right\|_C=0$$

وبهذا يكون إثبات المبرهنة 2 قد تم.

النتائج التي تم الحصول عليها : في حالة خاصة يمكن إثبات المبرهنات السابقة في حالة $h = \pi$ وهي

نتيجة١:

لتكن $\{m_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة اختيارية من الأعداد الطبيعية ولتكن $f_0 \in C[-\pi,\pi]$

عندئذ من أجل $\alpha \in (-1,-1/2^n)$ $(n = 1,2,3,\dots\dots)$ يتحقق ما يلي:

$$\mu\left\{t \in [-\pi,\pi]: \limsup_{\nu\to\infty}\left|\sigma_{m_\nu}^{\alpha}(f_0,t)\right| = +\infty\right\} > 0$$

نتيجة ٢:

لتكن S مجموعة من الأعداد الطبيعية و $\rho(S) = 1$ عندئذٍ من أجل أي عدد موجب ε و الدالة $f \in L^0[-\pi,\pi]$ يمكننا إيجاد دالة $g \in C[-\pi,\pi]$ بحيث

$$\mu\{t: g \neq f\} < \varepsilon$$

ومن أجل $\alpha < 0$ $(\alpha \neq -1,-2,\dots.)$ فإن طرائق سيزارو $\sigma_m^{\alpha}(g,t)$ لمتسلسلة فورييه المثلثية للدالة g تتقارب بانتظام على المجال $[-\pi,\pi]$ عندما $m \to \infty$ $(m \in S)$.

التوصيات والمقترحات:

١- إمكانية دراسة قابلية جمع الدوال ومرافقاتها بإستخدام طريقة ريس–سيزارو.

٢_ إمكانية دراسة قابلية جمع الدوال و الدوال المشتقة المرافقة وذلك بإستخدام طريقة سيزارو_ أولر.

٣- إمكانية دراسة قابلية جمع الدوال بإستخدام طريقة سيزارو _ نيورلند .

المراجع

[1] A. Olevskii, 1978,*"The existence of functions with unremovable Carleman singularities*", Rep. Acad. Sci. USSR 238 (4) 796-799 (in Russian).

[2] A. Zigmund, 2003,"*Trigonometric Series*", vols. 1, 2 (combined), Cambridge University Press , p. 781.

[3] B. Kashin, G. Kosheleva, 1988," *An approach to correction theorems"*, Moscow Univ. Math. Bull. 43 (4) 1-5.

[4] D. Men'shov, 1971**,"** *Properties of Cesaro means of negative order and of certain other T-means for Fourier series of continuous functions"*, Math. USSR Sb. 15 (3) 415.

[5] D. Waterman, 1976**,"** *On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation*", Studia Math. LV 87-95.

[6] L. Galoyan, 2012,*"On convergence in the $L^1_{[0,1]}$ norm of some irregular linear means of Walsh-Fourier series"*, Proc. YSU, Phys. Math. Sci. (1) ,10-15.

[7] N. Luzin, 1912,"*On the fundamental theorem of calculus*", Sb. Math. 28 (2) 266-294 (in Russian).

[8] U. Goginava, 2006,*" The maximal operator of the $(C;\alpha)$ means of the Walsh-Fourier series"*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 26,127-135.

[9] Y. Katznelson, 1968,*" An Introduction to Harmonic Analysis"*, Wiley, New York, MR 40:1734.