مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (2) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (2) 2023

التغطية المرتبة لمخاريط الدوال مع خواص الترتيب في الفضاء RIS

سلمان عيسى*

أ.د . ابراهيم ابراهيم**

(تاريخ الإيداع ٨/٣ / 2023 – تاريخ النشر ٥/٦ / 2023)

□ ملخّص □

نقوم في هذا المقال بالبرهان على وجود تغطية مرتبة ومتكافئة لثلاثة أنواع من المخاريط وهي $K(T); M(T); L(T)$ المؤلفة من الدوال المتناقصة والمعاد ترتيبها والمعرفة على نصف المحور الحقيقي الموجب، حيث الدوال شبه المنظمة لها على الترتيب هي ρ_K ; ρ_M ; ρ_L معرفة بشكلٍ وحيد.

الكلمات المفتاحية: التغطية المرتبة، مخاريط الدوال، الفضاء RIS.

---

*طالب دراسات عليا/ دكتوراه في -قسم الرياضيات- كلية العلوم - جامعة البعث.

** أستاذ دكتور في قسم الرياضيات- كلية العلوم - جامعة البعث.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (2) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (2) 2023

A Note On The Ordered Cover Of the Cones Of Functions With The Properties Of The Ordering In The Space RIS.

Sulman Isaa*
Professor Ibrahim Ibrahim**

(Received 8/3/2023.Accepted 5/6/2023)

□ABSTRACT □

In this paper, we prove the existence of an equivalent ordered cover for three types of the following Cones: $K(T); M(T); L(T)$ which are consisting of reordered decreasing functions defined on the half line of positive real numbers, where the quasi-norm functions of theses cones: ρ_K ; ρ_M ; ρ_L respectively are unique.
Key words and phrases: The ordered cover, The cones of functions and The space RIS.

*PhD student - Department of Mathematics – Faculty of Science- Al Baath University
**Professor at Department of Mathematics – Faculty of Science- Al Baath University

المقدمة

تلعب فضاءات الدوال دوراً مهماً في حل مختلف المسائل النظرية و التطبيقية في الرياضيات حيث درس الرياضيون أمثال نيكولسكي ، بيسوف ، امانوف ،غولدمان..... خواص هذه الدوال وتطبيقاتها في نظرية التفاضل و المعادلات التفاضلية و قد تمكنوا من بناء نظرية الطمر Embedding في فضاءات الكمون (Potential) الكلاسيكية وقد تم استكمال هذه الدراسة في تطوير نظرية الفضاءات المعممة مثل فضاءات بيسل و ريس ولورنتز وأورليش .

في عام 2010 قام (М. Л. Гольдман) بدراسة فضاء الكمون على الفضاء الإقليدي نوني البعد على الفضاء RIS و دراسة كمون بيسل و ريس المعممتين كحالة خاصة من الفضاءRIS . و ثم دراسة الخصائص التكاملية لكمون بيسل و ريس المعممتين و طمرها في الفضاءRIS . [6]

في عام 2013 قام (M. L. Goldman , P. P. Zabreiko) بدراسة فضاء باناخ الذي يحتوي على مخروط كيفي من الدوال القيوسة الموجبة و ذلك بالنسبة للدالة شبه منظمة التي تنتمي إلى الفضاء الأمثل مع الأخذ بعين الأعتبار الفضاء RIS و مقارنة النتائج. [7]

في عام 2016 قام (Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман) بدراسة فضاء باناخ الأمثل الذي يحتوي على مخروط من الدوال الموجبة مع خواص الترتيب، و تم إيجاد النتائج العامة للقيم المثلى المتوافقة مع علاقة الترتيب. والسؤال المطروح هو إيجاد التغطية المرتبة و المتكافئة لهذه المخاريط. [2]

في عام 2018 قام (Бокаев Н.А., Гольдман М.Л., Каршыгина Г.Ж) بدراسة التغطية المرتبة و المتكافئة لمخروطين من الدوال الموجبة مع خواص الترتيب المتعلقة بكمون بيسل و ريس المعممتين. [3]

في هذا البحث تمت دراسة ثلاثة أنواع من مخاريط الدوال المتناقصة و المعاد ترتيبها على نصف المحور الحقيقي الموجب و دراسة التغطية المرتبة لهذه المخاريط.

هدفنا العام من هذا البحث هو دراسة الخصائص التكاملية لكمون بيسل و ريس المعممة

وبشكل خاص إيجاد التغطية المرتبة لمخاريط الدوال $K(T);M(T);L(T)$ المتعلقة بكمون بيسل و ريس المعممة .

1 − 1 التعاريف الأساسية و الشروط الرئيسية:

ليكن $(S,\sum,\mu)$ فضاء قياس ، حيث $\sum$ − هو σ− الجبر.

و لتكن $M_0^+ = \{ f \in M_0 \,; f \geq 0\}$ حيث M_0 مجموعة كل الدوال الموجبة و القيوسة وفق μ و $f\colon S \to \mathbb{R}$ و $M_0^+ \subseteq M_0$.

تعريف1 − 1 : [1]

يقال عن الدّالة العددية $\rho\colon M_0^+ \to [0,\infty]$ بأنها دالة شبه منظمة (دالة مثلى) إذا حققت الخصائص التالية وذلك من أجل جميع الدوال $f,g,f_n \in M_0^+$ حيث $n \in \mathbb{N}$:

1. $\rho(f)=0 \Leftrightarrow f=0 \;\; \mu\text{–}a.e \;;\; \rho(\alpha f)=\alpha\rho(f)\,;$ $\rho(f+g) \leq \rho(f)+\rho(g)$
2. $0 \leq g \leq f \;\; \mu\text{–}a.e \;\; \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$ (خاصة الترتيب)
3. $f_n \uparrow f \;\mu\text{–}a.e \;\Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ (خاصة فاتو)
4. $0<\mu(E)<+\infty \Rightarrow \rho(\chi_E)<+\infty \,, \int_E f\,d\mu < C_E\rho(f), f \in M_0^+$

الجدير بالذكر أن الدالة شبه المنظمة هي دالة منتهية من أجل الدالة المميزة χ_E .

في هذه الحالة يتحقق لدينا $f_n \uparrow f \Leftrightarrow f_n \leq f_{n+1}; \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu - a.e$

$\mu - a.e$ تعني تقريبا في كل مكان

تعريف $2-1$: [1]

إذا كانت ρ الدالة شبه منظمة و لنرمز بـ $X = X(\rho)$ لمجموعة كل الدوال $f \in M_0^+$ التي تحقق $\rho(|f|) < \infty$. عندئذ X تشكل فضاء باناخ مزودةً بالنظيم:

$$\|f\|_X = \rho(|f|), f \in X$$

مبرهنة $1-1$:

إن الفضاء X هو فضاء باناخ .

يلزمنا لإثبات هذه المبرهنة التمهيدية الآتية:

تمهيدية$1-1$: [1,2]

لتكن ρ دالة شبه منظمة و X فضاء باناخ بحيث $X \subset M_0^+$ ، ولتكن $f_n \in X, n \in \mathbb{N}$ عندئذ:

1− إذا كان $f_n \uparrow f\ a.e$ فإنه إما $\|f\| \uparrow \infty, f \notin X$ أو $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X, f \notin X$.

2− إذا كان $f_n \longrightarrow f\ a.e$ و $\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \|f_n\|_X < \infty$ فإن

$$\|f\|_X \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \|f_n\|_X \ , f \in X$$

برهان التمهيدية$1-1$:

لتكن $f \in X$ عندئذٍ $f \in M_0^+$. بعبارة أخرى، $\rho(|f|) < \infty$ أي بحسب الخاصة 4 في التعريف $1-1$ يعطي $|f| < \infty\ a.e$ وبالتالي $f \in M_0^+$.

1− ينتج مباشرة من الخاصة 3 الواردة في التعريف $1-1$.

2− بفرض أنّ $h_n(x) = \inf_{m\geq n} |f_m(x)|$ و منه $0 \leq |h_n| \uparrow |f|\ a.e$ وبالتالي $\rho(h_n) \uparrow \rho(f)$ و هي تتوافق مع 2 و 3 الواردة في التعريف$1-1$.

لتكن $h_n \leq |f_m| a.e, m \geq n$ فإنه $\rho(h_n) \uparrow \rho(|f_m|), m \geq n$ (بموجب الخاصة 2 الواردة في التعريف$1-1$) و بالتالي يكون :

$$\rho(h_n) \leq \inf_{m\geq n} \rho(|f_m|) = \inf_{m\geq n} |f_m(x)|$$

و منه

$$\|f\|_X = \rho(|f|) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \rho(h_n) \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf_{m\geq n} \|f_m\|_X = \lim_{m\longrightarrow\infty} \inf_{m\geq n} \|f_m\|_X$$

برهان المبرهنة$1-1$:

لتكن $f_k \in X, k = m+1, \dots, n$ حيث أن $0 \leq m \leq n-1$ عندئذ :

$$(i) \quad \left\|\sum_{k=m+1}^{n} f_k\right\|_X \leq \left\|\sum_{k=m+1}^{n} |f_k|\right\|_X \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=m+1}^{n} \|f_m\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

و هذه العلاقة من خواص النظيم .

بفرض $t = \sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k|, t_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$ واستناداً للتمهيدية $1-1$ يكون $t_n \uparrow t$

$$\|t\|_X = \lim_{n\to\infty}\|t_n\|_X \le 2^{\frac{1}{p}} \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}} \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ومنه $t \in X$.

إذا كان $t \in M_0^+$ محققاً الخاصة $|t| < \infty\ a.e$ ، عندها تكون السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|$ متقاربة في كل مكان تقريبا Almost Everywhere ومنه السلسلة $\sum_{k=m+1}^{\infty} f_k$ متقاربة بالمطلق في كل مكان تقريبا و عليه $f = \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k \in M_0^+$ ، إضافة إلى أنّ $|f| < t \in X; f \in X$

$$\|f\|_X \le \|t\|_X \le 2^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

بفرض $s_n = \sum_{k=m+1}^{n} f_k$ و لنبرهن أن $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ في كل مكان تقريبا و منه $\lim_{n\to\infty} s_n - s_m = f - s_m$ في كل مكان تقريبا بموجب (i).

لدينا

$$\|s_n - s_m\|_X = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} f_k\right\|_X \le 2^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=m+1}^{n}\|f_k\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ومنه

$$\sup_{n\ge m+1}\|s_n - s_m\|_X \le 2^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\|f_k\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} s_n - s_m = f - s_m\ a.e$ و $\lim_{n\to\infty}\inf\|s_n - s_m\|_X < \infty$. هذه العلاقة متوافقة مع 2 الواردة في التمهيدية $1-1$ و من هنا ينتج أن:

$$\|f - s_m\|_X \le \lim_{n\to\infty}\inf\|s_n - s_m\|_X \le \sup_{n\ge m+1}\|s_n - s_m\|_X \le 2^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\|f_k\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

و عليه $\lim_{m\to\infty}\|f - s_m\|_X = 0$ و منه $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ متقاربة من الدالة f في X و بذلك يكون الفضاء X فضاءً تاماً .

تعريف$3-1$: [3]: تعرف في M_0^+ علاقتي الترتيب و التكافؤ $f \prec g$ و اللتان تحققان مايلي :

$$f \prec f;\ f \prec g, g \prec h \Rightarrow f \prec h; f \approx g \Leftrightarrow f \prec g \prec f$$

حيث أن علاقة الترتيب محققة في كل مكان تقريبا $\mu - a.e$

$$f \le g\ \ \mu - a.e\ \Rightarrow f \prec g$$
$$f_n \uparrow f_{n+1} \Rightarrow f_n \underline{\uparrow} f$$

والرمز $f_n \underline{\uparrow} f$ يعني أنّ

$$f_n \prec f_{n+1}; f = [sup]f_n; f_n \prec f$$

و مثال على علاقة الترتيب $\rho(f) \le \rho(g) \Leftarrow f \le g \Leftrightarrow f \prec g\ \ \mu - a.e$ و هذا ينتج مباشرة من الخاصة الثانية في التعريف $1-1$.

سيكون اهتمامنا في هذا البحث منصباً في علاقة الترتيب المتعلقة بالدالة المتناقصة و المعاد ترتيبها .

تعريف$4-1$: [4]: لتكن $f \in M_0^+$ عندئذ دالة التوزيع $\mu_f: [0,+\infty) \to [0,+\infty]$ تُعطى بالعلاقة الآتية :

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in R : |f(x)| > y\};\ y \in [0,+\infty)$$

حيث $\lambda_f\,(y) < \infty$ وبذلك يوجد $y_0 \in [0,\infty)$ بحيث $\lambda_f\,(y_0) < \infty$.

تعريف$5-1$: [4]بفرض أن $f \in M_0^+$ عندئذ فإن الدالة اللامتغيرة و المعاد ترتيبها f^* هي الدالة العكسية لدالة التوزيع λ_f والتي تعطى بالعلاقة الآتية :

$$f^*(t) = inf\{\, y \in [0,\infty)\,;\, \lambda_f\,(y) \le t\};\ \ t \in R_+ = (0;\infty) \qquad (1,1)$$

إن f^* متناقصة و مستمرة من اليمين أياً كانت $t \in R_+$ ، والدالتين f^* و$|f|$ متساويتين بالقياس

$$\mu_n\{\, x \in R^n : |f(x)| > y\} = \mu_1\{\, t \in R_+ : f^*(t) > y\}, y \in R_+$$

حيث μ هو قياس ليبيغ و بالإضافة إلى أنه إذا كان $f \in M_0^+$ عندها

$$\lambda_f\,(y)\ \longrightarrow 0; (y \longrightarrow 0) \Leftrightarrow |f(x)| \le \infty(\mu - a.e)$$

تُعرف علاقات التكافؤ($[[3],3]$) في M_0^+ الآتية :

$$f \prec g \Leftrightarrow f^*(t) \le g^*(t); t \in \big(0,\mu(s)\big) \qquad (1,2)$$

$$f \prec g \Leftrightarrow \int_0^t f^*(t)d\tau \le \int_0^t g^*(t)d\tau\,; t \in \big(0,\mu(s)\big) \qquad (1,3)$$

تُمثل العلاقة (1,2) علاقة الترتيب بين الدوال اللامتغيرة و المعاد ترتيبها f^* و g^* .

و تُمثل العلاقة (1,3) تكامل الدوال اللامتغيرة والمعاد ترتيبها للدالتين f^* و g^* والتي هي محققة في كل مكان تقريبا بالنسبة لـ μ.

إن العلاقة (1,3) تعطي العلاقة (1,2).

تعريف$5-1$: [3]لتكن ρ دالة منظمة ،عندئذ يقال إن ρ تتوافق مع علاقة الترتيب $\prec$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall\, f,g \in M_0^+; f \prec g \Leftrightarrow \rho(f) \le \rho(g)$$

و هذا واضح في الشرط الثاني في التعريف $1-1$لأجل أي دالة منظمة:

$$f \le g(\mu - a.e) \Rightarrow \rho(f) \le \rho(g)$$

تعريف$6-1$:[3] تسمى الدالة شبه المنظمة ρ بالدالة اللامتغيرة و المعاد ترتيبها إذا و فقط إذا توافقت مع علاقة الترتيب (1,2)

$$f^* \le g^* \Rightarrow \rho(f) \le \rho(g)$$

و إذا كان $X = X(\rho)$ ،حيث ρ الدالة شبه المنظمة و المعاد ترتيبها ، فإننا دعو X بالفضاء اللامتغير و المعاد ترتيبه (RIS) ، حيث $\|f\|_X = \rho(|f|)$.

ومثال على الفضاء (RIS) فضاء ليبيغ $L_p(\mathbb{R}^n)$.

$1-2$ التغطية المرتبة لثلاثة مخاريط مع خواص الترتيب:

يتم ،في هذا البحث، دراسة التغطية المرتبة لثلاثة أنواع من مخاريط الدوال الموجبة والتي هي $K_\varphi; M_\varphi; L\varphi$.

لتكن[3] $\Omega(T), T \in (0,\infty)$ مجموعة كل الدوال $\varphi : R_+ \to R_+$ التي تحقق الشروط الآتية:

$$\begin{Bmatrix} 1)\ 0 < \varphi(t) \downarrow; \varphi(t+0) = \varphi(t);\ \int_0^t \varphi d\xi < \infty\,; t \in (0,T) \\ 2)\ if\ T < \infty \Rightarrow \varphi(t) = 0; T \in [T,\infty) \end{Bmatrix} \qquad (2,1)$$

في حالة $\varphi \in \Omega(T), n \in \mathbb{N}$ فإننا نضع الدوال :

$$f_\varphi(t,\tau) = \varphi(\max\{t,\tau\}) = \begin{cases} \varphi(t); 0 \le \tau \le t \\ \varphi(\tau); t < \tau < \infty \end{cases} \qquad (2,2)$$

$$m_{\varphi}(t,\tau) = \varphi(\max\{2^n t, 2^n \tau\}) = \begin{cases} \varphi(2^n t); 0 \le \tau \le t \\ \varphi(2^n \tau); t < \tau < \infty \end{cases} \quad (2,3)$$

$$l_{\varphi}(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\xi)d\xi \ ; \tau \in (0,t) \\ \varphi(\tau); t < \tau < T \end{cases} \quad (2,4)$$

إذا كان $T < \infty$ فإن

$$f_{\varphi}(,\tau) = 0; t < T, \tau \in \mathbb{R}_+$$

$$m_{\varphi}(t,\tau) = 0; t \ge 2^{-n}T, \tau \in \mathbb{R}_+$$

و هذا ينتج من الخاصة الثانية للدالة φ .

ليكن $E = E(0,T)$ فضاء (RIS) كل الدوال القيوسة على$(0,T)$ المتناقصة و المعاد ترتيبها بالنسبة لقياس ليبيغ μ.

$$E \downarrow = E \downarrow (0,T) = \{g \in E(0,T); 0 \le g \downarrow in\ (0,T)\}$$

نستخدم في هذه الحالة ثلاثة دوال $f_{\varphi}; m_{\varphi}; l_{\varphi}$ متعلقة بثلاثة مخاريط $K_{\varphi}; M_{\varphi}; L\varphi$ على الترتيب ، موجبة على $\mathbb{R}_+$ حيث الدالة شبه المنظمة لهذه المخاريط وحيدة $\rho_K\ ; \rho_M\ ; \rho_L$ على الترتيب .

$$K(T) = K_{\varphi,\tilde{E}}(T)$$
$$= \left\{h_1(t) = h_1(g,t) = \int_0^{\infty} f_{\varphi}(t,\tau)g(\tau)d\tau; g_1 \in \tilde{E} \downarrow (0,T)\right\} \quad (2,5)$$

$$\rho_{K(T)}(h_1) = inf\{\|g_1\|_{\tilde{E}}; g_1 \in \tilde{E} \downarrow (0,T); h_1(g_1,t) = h_1(t);\ t \in \mathbb{R}_+\} \quad (2,6)$$

$$M(T) = M_{\varphi,\tilde{E}}(T)$$
$$= \left\{h_2(t) = h_2(g,t) = \int_0^{\infty} m_{\varphi}(t,\tau)g_2(\tau)d\tau; g_2 \in \tilde{E} \downarrow (0,T)\right\} \quad (2,7)$$

$$\rho_{'(T)}(h_2) = inf\{\|g_2\|_{\tilde{E}}; g_2 \in \tilde{E} \downarrow (0,T); h_2(g_2,t) = h_2(t);\ t \in \mathbb{R}_+\} \quad (2,8)$$

$$L(T) = L_{\varphi,\tilde{E}}(T) = \left\{h_3(t) = h_3(g,t) = \int_0^{\infty} l_{\varphi}(t,\tau)g_3(\tau)d\tau; g_3 \in \tilde{E} \downarrow (0,T)\right\} \quad (2,9)$$

$$\rho_{'(T)}(h_3) = inf\{\|g_3\|_{\tilde{E}}; g_3 \in \tilde{E} \downarrow (0,T); h_3(g_3,t) = h_3(t);\ t \in \mathbb{R}_+\} \quad (2,10)$$

في العلاقة (2,6) تتحقق من أجل كل الدوال $g_1 \in \tilde{E} \downarrow (0,T)$ و من أجل $h_1(g,t)$ في التكامل في العلاقة (2,5) يتحقق من أجل الدالة $h_1 \in K(T)$

و كذلك بالنسبة للعلاقتين (2,8) و(2,10) ، تعني الدالة الموجبة الوحيدة

$$h_1 \in K(T)\ ; \ \alpha \ge 0 \Rightarrow \rho_{K(T)}(\alpha h_1) = \alpha \rho_{K(T)}(h_1)$$

وكذلك الأمر بالنسبة إلى $\rho_M\ ; \rho_L$.

ملاحظة$(\mathbf{2,1})$: إذا كان $\varphi \in \Omega(T), n \in \mathbb{N}$ فإن المتراجحة الآتية محققة

$$\varphi(2^n t) \le \varphi(t);\ \varphi(t) \le \frac{1}{t}\int_0^t \varphi d\xi \quad (2,11)$$

تنتج هذه المتراجحة من الدالة المتناقصة المرتبة φ

$$\int_0^t \varphi(\xi)d\xi \ge \varphi(t)t \Rightarrow \varphi(t) \le \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\xi)d\xi$$

وذلك لأنّ

$$m_{\varphi}(t,\tau) \le f_{\varphi}(t,\tau) \le l_{\varphi}(t,\tau)\ \ ; t,\tau \in \mathbb{R}_+ \quad (2,12)$$

ملاحظة$(\mathbf{2,2})$: بفرض أن $t \in \mathbb{R}_+$ و لنقم بتثبيت τ ،عندها نجد أنّ

$$f_\varphi(t,.) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)\,; m_\varphi(t,.) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)\,; l_\varphi(t,.) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+) \qquad (2{,}13)$$

في الحالة $T < \infty$ ، يتحقق الشرط $(2{,}13)$ من أجل كل $\varphi \in \Omega(T)$ ، وفي الفضاء RIS فإن الدوال الآتية: $0 \le f_\varphi(t,\tau)\,, m_\varphi(t,\tau)\,, l_\varphi(t,\tau)$ موجبة.

هذه الدوال المتناقصة محدودة بالنسبة للمتغير τ وهي تنتمي إلى $L_1(R_+) \cap L_\infty(R_+)$ و بالتالي $\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ فضاء (RIS) .

في حالة $T = \infty$ و من العلاقة $(2{,}13)$ تتحقق لأجل كل $t \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi(\tau)\chi_{(t,\infty)}(\tau) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)\rho_{K(T)}(h); h \in K(T) \qquad (2{,}14)$$

من الشرط في $(2{,}13)$ ينتج مايلي : من أجل كل $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 \le h(t) \le \left\|f_\varphi(t,.)\right\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)}\rho_{K(T)}(h); h \in K(T) \qquad (2{,}15)$$

$$0 \le m(t) \le \left\|m_\varphi(t,.)\right\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)}\rho_{M(T)}(h); m \in M(T) \qquad (2{,}16)$$

$$0 \le l(t) \le \left\|l_\varphi(t,.)\right\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)}\rho_{L(T)}(h); l \in L(T) \qquad (2{,}17)$$

من الواضح أنه لأجل $h \in K(T)$ في العلاقة $(2{,}5)$ و من متراجحة هولدر ينتج أن :

$$0 \le h(t) \le \left\|f_\varphi(t,.)\right\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)}\|g\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)}; \forall g \in \tilde{E} \downarrow (0,T)$$

في هذه العلاقة نجد أنه لكل $g \in \tilde{E} \downarrow (0,T)$ لأجل $h(g,t) = h(t)$ محققة في $(2{,}6)$ و المتراجحة $(2{,}15)$. و كذلك بنفس الأسلوب للعلاقتين $(2{,}16)$و$(2{,}17)$.

إضافة لذلك من العلاقات $(2{,}16) - (2{,}15)$ ينتج الدوال في العلاقات $(2{,}6),(2{,}8),(2{,}10)$ و هذا واضح من أجل كل $h \in K(T)$ فإن $\rho_{K(T)}(h) = 0$ وبالتالي $h(t) = 0$ حيث $t \in \mathbb{R}_+$. و كذلك الأمر بالنسبة لـ $m \in M(T)$ و $l \in L(T)$.

بفرض لدينا مجموعة جزئية $M \subset M_0^+(\mathbb{R})$ و علاقة الترتيب الآتية $\prec$ المحققة في كل مكان تقريبا و ليكن $h_1, h_2 \in M$ و $h_1 \le h_2$ في كل مكان تقريبا على $\mathbb{R}_+$ فإن $h_1 \prec h_2$.

بفرض لدينا بعض المخاريط $K, L \subset M$ حيث دالتيهما المنظمتين ρ_K, ρ_L ، عندما نعرف علاقة الترتيب بين مخاريط الدوال – التغطية المتكافئة– و تكون مع ثوابت التغطية c_0, c_1

تعريف$(2,1)$:[6] يقال أن المخروط M يغطي المخروط K أو (K مغطى بـM) أي $K \prec M$ مع ثوابت التغطية $c_0 \in (0,\infty)$ و $c_1 \in [0,\infty)$ إذا كان من أجل $h_1 \in K$ يمكنه إيجاد $h_2 \in M$ بحيث يتحقق الشرطان الآتيان:

$$\rho_M(h_2) \le c_0\rho_K(h_1)$$
$$h_1(t) \le h_2(t) + c_1\rho_K(h_1);\ \mu - a.e \qquad (2{,}18)$$

عند القول $K \le M$ فهذا يعني أنه إذا كان المخروط M يغطي تماما المخروط K .

و $K \cong M$ التغطية المتكافئة لمخاريط الدوال أي أن :

$$K \le M \Rightarrow K \prec M$$
$$K \cong M \Rightarrow M \prec K \prec M \Rightarrow K \approx M \qquad (2{,}19)$$

في البداية علاقة الترتيب بين الدوال

$$\forall f_1, f_2 \in M_0^+(\mathbb{R}_+); f_1 \prec f_2 \Leftrightarrow f_1 \le f_2\ \mu - a.e\ on\ \mathbb{R}_+$$

وتعرف علاقة الترتيب لأجل الدالتين $f_1, f_2 \in M(R_+)$ فإن $f_1 \prec f_2$ كمايلي:

$$\int_0^t f_1^*(t)d\tau \le \int_0^t f_2^*(t)d\tau\,; t \in R_+ \qquad (2{,}20)$$

حيث إنّ الدالة f^* هي الدالة المتناقصة و المعاد ترتيبها للدالة f الواردة في التعريف$1-1$.

فإذا كان $f_1 \le f_2$ محقق في كل مكان تقريبا على R_+ فإن $f_1^* \le f_2^*$ محقق في كل مكان تقريبا على R_+ و بذلك تكون العلاقة (2,20) محققة.

ستتم الآن دراسة التغطية المرتبة لثلاثة مخاريط من الدوال و هي $K(T), M(T), L(T)$ و الحصول على النتيجة التالية:

مبرهنة$(\mathbf{2,1})$: (1) – من العلاقات السابقة من (2,1) و حتى (2,13) تتحقق التغطية المرتبة

$$(I) \qquad M(T) \le K(T)\,; K(T) \le L(T) \qquad (2,21)$$

مع ثوابت التغطية $c_0(I) \le 1+\varepsilon\,, \varepsilon > 0\,; c_1(I) = 0$

(2)– بفرض الشروط في (1) محققة ، إضافة إلى ذلك يوجد $c \in [1,\infty)$ بحيث

$$\varphi(t) \le c\varphi(2^n t); t \in (0,2^{-n}) \qquad (2,22)$$

في العلاقة (2,22) نجد $T=\infty$ من أجل كل $t \in \mathbb{R}_+$ وبذلك تكون التغطية الكاملة محققة

$$(II) \qquad K(T) \le M(T) \qquad (2,23)$$

مع ثابت التغطية $c_0(II) \le c2^n \|\sigma_{2^n}\|$ حيث $c_0(II)=0$ إذا كان $T=\infty$

$$c_1(II) = \left\|f_\varphi(2^{-n}T)\right\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)}\,; T<\infty \qquad (2,24)$$

هنا لدينا $(\sigma_{2^n} g, \tau) = g(2^n \tau);\ \tau \in \mathbb{R}_+$ مؤثر التمديد

$\|\sigma_{2^n}\|$ نظيم هذا المؤثر $\sigma_{2^n}: \tilde{E}(\mathbb{R}_+) \to \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$

(3)– بفرض الشروط الواردة في (1) محققة ، بالإضافة إلى أنّ

$$A_\varphi \equiv A_\varphi(T) = \sup_{t \in (0,T)} \frac{\int_0^t \varphi d\tau}{t\varphi(t)} \qquad (2,25)$$

عندها تكون التغطية الكاملة

$$(III) \qquad L(T) \le K(T) \qquad (2,26)$$

مع ثوابت التغطية

$$c_0(III) \le (1+\varepsilon)A_\varphi\,, \forall\ \varepsilon > 0 \qquad (2,27)$$

$$c_0(III) = 0\ if\ T=\infty\,,$$

$$c_1(III) = \left\|l_\varphi(T,.)\right\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} if\ T<\infty \qquad (2,28)$$

يلزمنا لإثبات المبرهنة (2,1) بعضاً من التمهيديات و الملاحظات:

تمهيدية$(\mathbf{2,4})$: في الشرط (3) من المبرهنة (2,1) تتحقق العلاقة (2,22) مع الثابت $c = 2^n A_\varphi$ و منه التغطية (2,23) مع ثابت التغطية $c_0(II) \le A_\varphi 2^n \|\sigma_{2^n}\|$ و $c_1(II)$ في (2,24) .

تمهيدية$(\mathbf{2,1})$: تعني الشروط في (3) في المبرهنة (2,1) التغطية المتكافئة للمخاريط

$$M(T) \cong L(T) \cong K(T)$$

وهذا واضح من التمهيدية (2,4) حيث

$$M(T) \le L(T) \le K(T)$$

إضافة إلى العلاقة (2,21) فإنها تعطي التكافؤ بين المخاريط.

ملاحظة$(\mathbf{2,1})$: تعني الشروط في (2) من المبرهنة (2,1) التغطية المتكافئة بين المخاريط

$$M(T) \cong K(T) \qquad (2,29)$$

وهذا ناتج من علاقات التغطية (2,21) و (2,23).

أول قسم في المبرهنة هو التغطية $M(T) \le K(T)$ ،والقسم الثاني من المبرهنة هو التغطية $K(T) \le M(T)$ ، أي أن المخروطين $M(T), K(T)$ يغطيان بعضهما البعض أو التغطية المتكافئة للمخروطين $M(T), K(T)$.

برهان صحة المبرهنة :(2,1)

(1) – لتكن $h_1 \in K(T)$ و لنوجد $h_3 \in L(T)$ بحيث يكون $h_1 \le h_3$.

بفرض أنّ $h_1 \in K(T)$ عندئذ من أجل أي ثابت $c > 0$ يوجد $g_3 \in \tilde{E} \downarrow (0,T)$ بحيث يكون $h_1(t) = h_1(g_3, t); t \in \mathbb{R}_+$ و

$$\|g_3\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \le c\rho_{K(T)}(h_1)\ ;\ (2,6),(2,8)$$

الآن بفرض $h_3(t) = h_3(g_3, t)$

$$h_3(t) = \int_0^\infty l_\varphi(t,\tau) g_3(t) d\tau \in L(T)$$

$$\rho_{L(T)}(h_3) \le \|g_3\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)}\ \ (2,9),(2,10)$$

ومن العلاقة (2,12) ينتج أن :

$$h_1(t) = \int_0^\infty f_\varphi(t,\tau) g_3(\tau) d\tau \le \int_0^\infty l_\varphi(t,\tau) g_3(\tau) d\tau = h_3(t)$$

إضافة إلى ذلك

$$\rho_{L(T)}(h_3) \le \|g_3\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \le c\rho_{K(T)}(h_1)$$

و هذه العلاقة تبينّ أن $K(T) \le L(T)$ مع ثوابت التغطية $c_0(I) > 1$ و $c_1(A) = 0$ أختيارية .

وبنفس الأسلوب يمكننا إثبات انّ $M(T) \le K(T)$.

(2) – بفرض أنّ $h_1 \in K(T)$ عندها

$$\exists g_1 \in \tilde{E} \downarrow (0,T); h(t) = h(g_1, t); \|g_1\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \le 2\rho_{K(T)}(h)$$

ولدينا

$$g_2(\tau) = c2^n g_2(2^n\tau) \in \tilde{E} \downarrow (0,2^{-n}T) \qquad (2,30)$$

بفرض $c \in [1,\infty)$ ،عندها نجد من شروط العلاقة(2,22) الواردة في (2,5) أنّ

$$h_1 \in K(T) \Rightarrow h_1(t) = \int_0^\infty f_\varphi(t,\tau) g(\tau) d\tau == \int_0^\infty m_\varphi(2^{-n}t, 2^{-n}\tau) g(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^\infty m_\varphi(2^{-n}t, s) g(s) ds$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^\infty m_\varphi(2^{-n}t, s) g_2(s) ds \qquad (2,31)$$

وهذا يعني $h_2(t) = \int_0^\infty m_\varphi(2^{-n}t, s) g_2(s) ds$

عندئذ في العلاقة (2,30)

$$\rho_{M(T)}(h_2) \le \|g_2\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} = c2^n \|\sigma_{2^n} g\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \le c2^n \|\sigma_{2^n}\| \|g\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)}$$

$$\le c2^{n+1} \|\sigma_{2^n}\| \rho_{K(T)}(h_1) \qquad (2,33)$$

هنا نلاحظ أن $\sigma_{2^n}(g_1, s) = g_1(2^n s)$ بحيث $\sigma_{2^n}: \tilde{E}(\mathbb{R}_+) \to \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ و

σ_{2^n} مؤثر محدود $\|\sigma_{2^n}\| < \infty$.

مما سبق نجد أنه لأجل $h_1 \in K(T)$ تمكنا من إيجاد إيجاد $h_2 \in M(T)$ المحقق للعلاقة $\rho_{M(T)}(h_2) \le c_0 \rho_{K(T)}(h_1)$ و ذلك عندما $c_0 = c2^{n+1}\|\sigma_{2^n}\| \in \mathbb{R}_+$

إضافة إلى ذلك، نجد من (2,31) و (2,32) أنّ:

$$h(t) = \frac{1}{c} h_2(2^{-n}t) = \frac{1}{c}\int_0^\infty m_\varphi(2^{-n}t, s)\, g_2(s) ds\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+$$

$$\frac{1}{c} h_2(t) = h(2^n t) = \int_0^\infty f_\varphi(2^n t, \tau)\, g_1(\tau) d\tau\ ; \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \qquad (2,34)$$

سنبرهن أنه من أجل $t \in (0, 2^{-n}T)$ تحقق العلاقة الآتية لأجل كل $\tau \in \mathbb{R}_+$

$$f_\varphi(2^n t, \tau) \ge \frac{1}{c} f_\varphi(t, \tau) \qquad (2,35)$$

$$f_\varphi(2^n t, \tau) = \begin{Bmatrix} \varphi(2^n t) & ; & 0 \le \tau \le 2^n t \\ \varphi(\tau) & ; & \tau > 2^n t \end{Bmatrix} \ge \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{c}\varphi(t); 0 \le \tau \le 2^n t \\ \varphi(\tau) \quad ; \quad \tau > 2^n t \end{Bmatrix} \ge \frac{1}{c} f_\varphi(t, \tau)$$

من (2,34) و (2,35) ينتج أن :

$$\frac{1}{c} h_2(t) \ge \frac{1}{c}\int_0^\infty f_\varphi(t, \tau)\, g_1(\tau) d\tau = \frac{1}{c} h_1(t)$$

$$h_1(t) \le h_2(t); t \in (0, 2^{-n}T) \qquad (2,36)$$

في حالة $T = \infty$ المتراجحة محققة من أجل كل $t \in \mathbb{R}_+$

في الحالة (2,15) و من أجل كل $t \in \mathbb{R}_+$

$$h_1(t) \le h_1(2^n T) \le \left\|f_\varphi(2^{-n}T, .)\right\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \rho_{K(T)}(h_1)$$

$$= h_2(t) + c_1 \rho_{K(T)}(h_!) \qquad (2,37)$$

المتراجحة (2,36) محققة عندما $T = \infty$

و عندما $T < \infty$ في (2,33) فإنها تبرهن صحة العلاقتين (2,23) و (2,24).

(3) بفرض أن $h_3 \in L(T)$ و من العلاقتين (2,9) و (2,10) لأجل كل $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $g_3 \in \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ بحيث:

$$h_3(t) = h_3(g_3, t) = \int_0^\infty l_\varphi(t, \tau)\, g_3(\tau) d\tau; \|g_3\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \in (1 + \varepsilon)\rho_{L(T)}(h_3)$$

و لتكن $h_1 \in K(T)$ المعرفة بالعلاقة الآتية:

$$h_1(t) = h_1(g_3, t) = \int_0^\infty f_\varphi(t, \tau)\, A_\varphi g_3(\tau) d\tau; A_\varphi g_3(\tau) \in \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$$

$$\rho_{K(T)}(h_1) \le \left\|A_\varphi g_3\right\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} = A_\varphi \|g_3\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \le (1 + \varepsilon)\rho_{L(T)}(h_3) (2,38)$$

نلاحظ أنه $A_\varphi \ge 1$ ، في هذه الحالة من العلاقة (2,4) والمتراجحة (2,11) نحصل على

$$l_\varphi(t, \tau) \le \begin{Bmatrix} A_\varphi \varphi(t); 0 < \tau \le t \\ \varphi(t) \quad ; t < \tau \le \infty \end{Bmatrix} \le A_\varphi \begin{Bmatrix} \varphi(t) \quad ; 0 < \tau \le t \\ \varphi(\tau) \quad ; t < \tau \le \infty \end{Bmatrix} \le A_\varphi f_\varphi(t, \tau)\ ; t \in (0, T)$$

و منه نجد أن :

$$h_3(t) = \int_0^\infty l_\varphi(t, \tau)\, g_3(\tau) d\tau \le A_\varphi \int_0^\infty f_\varphi(t, \tau)\, g_3(\tau) d\tau = h_1(t) \quad (2,39)$$

من هنا نجد أنه إذا كان $T = \infty$ فإن التغطية $L(\infty) \le K(\infty)$ محققة مع ثوابت التغطية $c_1 = 0$ و $c_0 \le (1+\varepsilon)A_\varphi$ لأجل كل $\varepsilon > 0$.

في حالة $T < \infty$ فإن المتراجحة (2,39) تتحقق لأجل كل $t \in [T, \infty)$ و أيا كان t فإن $f_\varphi(t, \tau) = 0\ ;\ \tau \in \mathbb{R}_+$ أي أن $h_1(t) = 0; t \in [T, \infty)$ عندئذ فإن $g_3(\tau) = 0; t \in [T, \infty)$ أي أن:

$$h_3(t) = \int_0^T l_\varphi(t, \tau)\, g_1(\tau) d\tau$$

في العلاقة (2,4) عندما $t \in [T, \infty), \tau \in (0, T)$ فإن $\varphi(\xi) = 0; \xi \in [T, t)$ أي أن

$$l_\varphi(t, \tau) = \frac{1}{t}\int_0^T \varphi(\xi)\, d\xi \le \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(\xi)\, d\xi = l_\varphi(T, \tau) \Rightarrow l(t) \le l(T)$$

ينتج من هذه العلاقة ومن (2,17) أنه إذا كان $t \in [T, \infty)$ فإن $h_3(t) \le \left\| l_\varphi(T, .)\right\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \rho_{L(T)}(h_3); t \in \mathbb{R}_+$.

من (2,38)و (2,40) تنتج التغطية (2,26) مع ثوابت التغطية (2,27) و (2,28) وبذلك يتم المطلوب كاملاً.

النتائج و التوصيات:

١- النتيجة الأساسية هي دراسة مخاريط الدوال المتناقصة مع خواص الترتيب على نصف المحور الموجب في الفضاء $\boldsymbol{RIS}$.

٢- إيجاد التغطية المرتبة لهذه المخاريط .

٣- إن العلاقة $(\mathbf{1,3})$ تعطي العلاقة $(\mathbf{1,2})$ و لكن هل العكس غير صحيح بالضرورة؟

٤- هل يمكن إيجاد الطمر الأمثل لمخاريط الدوال $\boldsymbol{K_\varphi; M_\varphi; L\varphi}$ في الفضاء $\boldsymbol{RIS}$ ؟

٥- إن دراسة فضاءات كمون بيسل و ريس المعممتين هو أمر صعب للغاية ، هل يمكن استخدام النتيجة التي حصلنا عليها و تطبيقها في فضاءات الكمون؟

المراجع العلمية

[1] C. Bennett, R. C. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, 1988.

[2] Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман, “*Построение оптимальной оболочки для конуса неотрицателных функций со свойствами монотонности*”, Труды Матем.Института им. В.А.Стеклова, (2016) .

[3] Бокаев Н.А., Гольдман М.Л., Каршыгина Г.Ж. Конусы функций с условиями монотонности для обобщенных потенциалов *Бесселя* и Рисса,«Математические заметки» – 2018.

[4] Erik Kristiansson , *Decreasing Rearrangement and Lorentz L(p, q) Spaces,* Lech Maligranda, 2002

[5] M. L. Goldman , *Rearrangement Invariant Envelopes of Generalized Besov, Sobolev, and Calderon Spaces*, Contemporary Mathematics,2003

[6] М. Л. Гольдман*, “Об оптималных вложениях потенциалов Бесселя и Рисса*”, Труды Матем.Института им. В.А.Стеклова, (2010).

[7] M. L. Goldman , P. P. Zabreiko , Optimal Reconstruction of a Banach Function Space from a Cone of Nonnegative Functions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*,(2013).