مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (1) 2023
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (1) 2023

متراجحات ماركوف بيرنشتين مع دوال الوزن في فضاء ليبغ

الدكتورة عائدة صائمة *

الدكتور محمد علي **

عبير محمد ابو علي ***

(تاريخ الإيداع 28/ 8/ 2022 – تاريخ النشر 29/ 1/ 2023)

□ ملخّص □

تناولنا في هذا البحث دراسة متراجحة ماركوف بيرنشتين لكثيرات الحدود العقدية مع دوال وزن أسية $e^{-r^2\frac{z}{2}}$ على المجال $]-\infty,+\infty[$، وقمنا أيضاً بدراسة متراجحة ماركوف بيرنشتين من أجل كثيرات الحدود الجبرية من الدرجة $2m$ ومن الدرجة m مع دوال وزن جبرية على المجال $[1,+\infty[$ لدالة الوزن $(\frac{1}{x^2})^{-n}$، ولدالة الوزن $(\frac{1}{t})^{-n}$ على المجال $]0,+\infty[$.

الكلمات المفتاحية: متراجحة ماركوف بيرنشتين – دالة الوزن – فضاء موزن– فضاء ليبغ .

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.

** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (1) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (1) 2023

Makrov-Bernstein With weight functions In LupAs Space

Dr.Auda Saema*
Dr .Mohammad Ali **
Abeer Abo Ali***

(Received 28/8/2022.Accepted 29/1/2023)

□ABSTRACT □

In this research we dealt with the study of the Makrov-Bernstein inequality of the complex polynomial and with an exponential weight functions $e^{-r^2\frac{z}{2}}$ on the domain
$]-\infty,+\infty[$, we also studied the Integral Makrov-Bernstein inequality for the algebraic polynomials of degree $2m$ and degree m and with algebraic weight functions on the domain $[1,+\infty[$ of $(\frac{1}{x^2})^{-n}$, on the domain $]0,+\infty[$ of $(\frac{1}{t})^{-n}$.

Keywords Makrov-Bernstein inequality, weight functions, Weight Space , L_p-space.

* Master, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.
** Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
*** Postgraduate Student (Master), Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.

مقدمة

تلعب دوال الوزن في نظرية الدوال دوراً هاماً، ففي بعض الأحيان وعند إيجاد دراسة ما لا نستطيع الوصول إلى نتيجة معينة وعندما نضرب الدالة المدروسة بدالة وزن من صف معين ينتج لدينا المطلوب بسهولة.

في بحثنا هذا قمنا بدراسة متراجحات ماركوف – بيرنشتين في فضاءات موّزنة، وقد استخدمنا دوال وزن جبرية للحصول على متراجحة ماركوف – بيرنشتين على فضاءات كثيرات الحدود الجبرية من الدرجة m والدرجة $2m$، كما أننا قمنا باستخدام دوال وزن أسية للحصول على متراجحة ماركوف – بيرنشتين على فضاء كثيرات الحدود المثلثية والعقدية.

ونشير إلى أنه تم الحصول على متراجحة ماركوف – بيرنشتين سابقاً من أجل دوال وزن مختلفة نذكر منها:

١- في عام 2015 [1] استخدم Ahmad Marouf دالة الوزن $w(\theta) = sin^{2r}\frac{\theta}{2}$ للحصول على متراجحة ماركوف – بيرنشتين.

٢- في عام2021 [2] استخدم Sergekalmykov Be`la Nagy and Vilmos Totik دالة الوزن $w_E(e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\frac{cos\frac{t}{2}}{\sqrt{sin^2\frac{\beta}{2}-sin^2\frac{t}{2}}}$ حيث $t \in (-\beta, \beta)$ للحصول على متراجحة ماركوف – بيرنشتين.

أهمية البحث وأهدفه

إن لهذا البحث أهمية كبيرة في االعديد من مسائل التحليل الرياضي ولاسيما نظرية التقريب. ونهدف في بحثنا هذا الحصول على النتائج التالية:

١-متراجحات من النوع ماركوف – بيرنشتين مع دوال وزن أسية وكثيرات حدود مثلثية وعقدية على كامل المحور الحقيقي.

٢-متراجحات من النوع ماركوف – بيرنشتين مع دوال وزن جبرية مختلفة وكثيرات حدود جبرية على كامل المحور الحقيقي.

٣-متراجحات من النوع ماركوف – بيرنشتين مع دوال وزن جبرية مختلفة وكثيرات حدود جبرية على كامل المحور الحقيقي الموجب فقط.

طرائق البحث وموارده

إن هذا البحث يقع ضمن اختصاص التحليل الرياضي وبشكل خاص نظرية الدوال وهو يملك صيغة نظرية نستخدم فيها طرائق رياضية مناسبة للوصول إلى المتراجحات التي ذكرناها سابقاً.

تعاريف ومصطلحات ومبرهنات مساعدة:

تعاريف:

تعريف فضاء ليبغ [3]: هو فضاء كل الدوال القابلة للقياس على المجال $[a,b]$ والتي تحقق الشرط:

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

ويرمز له بالرمز $L_p[a,b]$، أما النظيم فهو يأخذ الشكل $||f||_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$حيث $0 < p < \infty$ وفي حالة $p = \infty$ يرمز لهذا الفضاء بالرمز L_∞ والنظيم يأخذ الشكل $||f||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

تعريف فضاء ليبغ الموزن [3]: يرمز له بالرمز $L_p(V,W)$ ويعرف بأنه فضاء جميع الدوال f المعرف على المجال $V = [a,b]$ التي من أجلها يكون:

$$\int_a^b |f|^p . w(x)\, dx < \infty$$

حيث: W دالة مختلفة عن الصفر وقابلة للقياس على المجال V وتدعى دالة الوزن وبكلام آخر يمكن القول:

$f \in L_p[v,w]$ على المجال $[a,b]$ إذا كان $f.w \in L_p[a,b]$

تعريف متراجحة ماركوف بيرنشتين [1]: تعرف على انها المتراجحة التي تعطي العلاقة بين نظيم التابع ونظيم مشتقة من المرتبة (n) في نفس الفضاء A ، أي تملك الشكل العام الآتي $||f^{(n)}||_A \leq c||f||_A$.

تعريف الفضاء $E_{(m,n)}$ [4]: يدعى فضاء الدوال المثلثية العقدية من الدرجة m ويعرف بأنه فضاء كثيرات الحدود المثلثية العقدية الموّزن الذي يتألف من عناصر الفضاء $E_{(m)}$ مع دالة الوزن

$$w(z) = e^{-r^2\frac{z}{2}} \qquad ; n = m + r$$

حيثr عدد صحيح موجب تماماً، m درجة كثيرة الحدود وحيث أن كل عنصر من عناصر الفضاء $E_{(m,n)}$ يأخذ الشكل:

$$E_{(m,n)}(z) = e^{-r^2\frac{z}{2}} E_{(m)}(z)$$

والنظيم في هذا الفضاء يأخذ الشكل:

$$\left\|E_{(m,n)}(z)\right\| = (\int_{-\infty}^{+\infty} |E_{m,n}(z)|^p dz)^{\frac{1}{p}}$$

تعريف الفضاء [4] $H_{(m,n)}$: هو فضاء الدوال الجبرية من الدرجة $2m$ مع دالة الوزن $w(x) = (\frac{1}{x^2})^{-n}$ المعرف على المجال $[1,+\infty[$، وحيث أن كل عنصر من عناصر الفضاء $H_{(m,n)}$ يأخذ الشكل:

$$H_{(m,n)}(x) = H_m(x)(\frac{1}{x^2})^{-r}$$

حيث أن $H_m(x) = \frac{g(x)}{(\frac{1}{x^2})^m}$ بحيث $g(x)$ كثيرة حدود جبرية من الدرجة $2m$ ومنه أصبح لدينا

$$H_{(m,n)}(x) = \frac{g(x)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^m}(\frac{1}{x^2})^{-r}$$

$$= g(x)(\frac{1}{x^2})^{-(r+m)}$$
$$= g(x)(\frac{1}{x^2})^{-n}$$

تعريف الفضاء $B_{(m,n)}$ [4]: هو فضاء الدوال الجبرية من الدرجة m مع دالة الوزن $w(t) = (\frac{1}{t})^{-n}$ المعرف على المجال $]0,+\infty[$، والذي يعتبر فضاء جزئي من $H_{(m,n)}$.

كل عنصر من عناصر الفضاء $B_{(m,n)}$ يأخذ الشكل: $B_{(m,n)}(t) = B_m(t)\ (\frac{1}{t})^{-r}$حيث أن $B_m(t) = \frac{g(t)}{(\frac{1}{t})^m}$ بحيث $g(t)$ كثيرة حدود جبرية من الدرجة m، ومنه أصبح لدينا

$$B_{(m,n)}(t) = \frac{g(t)}{(\frac{1}{t})^m}\ (\frac{1}{t})^{-r}$$
$$= g(t)(\frac{1}{t})^{-(r+m)}$$
$$= g(t)(\frac{1}{t})^{-n}$$

سوف نرمز $E_{(m,n)}$ لفضاء كثيرات الحدود المثلثية مع دالة وزن أسية $e^{-r^2\frac{z}{2}}$، وسنرمز بـ $H_{(m,n)}$ لفضاء كثيرات الحدود الجبرية من الدرجة $2m$ مع دالة الوزن الجبرية $w(x) = (\frac{1}{x^2})^{-n}$، وسنرمز بـ $B_{(m,n)}$ لفضاء كثيرات الحدود الجبرية من الدرجة m مع دالة الوزن الجبرية $w(t) = (\frac{1}{t})^{-n}$.

عندئذٍ نجد مايلي:

١–نستطيع أن نقابل كل عنصر من عناصر الفضاء $E_{(m,n)}$ بعنصر من الفضاء $H_{(m,n)}$ [4][5] عبر التحويل الآتي:

$$(\frac{1}{x^2}) \leftrightarrow e^{r\frac{z}{2}}$$

أي أن $$E_{(m)}(z)\ e^{-r^2\frac{z}{2}} = H_{(m)}(x)\ (\frac{1}{x^2})^{-r}$$

٢–نستطيع أن نقابل كل عنصر من عناصر الفضاء $B_{(m,n)}$ بعنصر من الفضاء $H_{(m,n)}$ [4][5] عبر التحويل الآتي: $t \leftrightarrow x^2$ حيث $x > 0$

أي أن $$B_{(m)}(t)(\frac{1}{t})^{-r} = H_{(m)}(x)\ (\frac{1}{x^2})^{-r}$$

النتائج والمناقشة:

المبرهنة الآتية حصلنا فيها على متراجحة ماركوف – بيرنشتين على $E_{(m,n)}$ من أجل دوال وزن أسية في فضاء ليبغ الموزن.

مبرهنة1:

إذا كانت $E_{(m)}$ كثيرة حدود مثلثية من الدرجة m و$1 < p < +\infty$ و r عدد صحيح موجب تماماً، فإن العلاقة الآتية محققة:

$$\left\|E'_{(m)}(\mathrm{z})\ e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p \le ((m+r)+\frac{r^2}{2})\ \left\|E_{(m)}\ (\mathrm{z})\ e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p \quad \dots(1)$$

البرهان:

لتكن لدينا $E_{(m)}\,(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}$ كثيرة حدود مثلثية من الدرجة n ، ولتكن متراجحة ماركوف – بيرنشتين من أجل كثيرات الحدود المثلثية من الدرجة n هي:

$$\|T_n{}'\| \le n\,\left\|T_n\right\| \dots (2)$$

بالاستفادة من (2) نحصل على:

$$\left\|(E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}})'\right\|_p \le (m+r)\,\left\|E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p \quad \dots (3)$$

$$\left(E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right)' = E'_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}} + E_{(m)}(\mathrm{z})(-\frac{r^2}{2}\,e^{-r^2\frac{z}{2}})$$

$$\left(E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right)' = E'_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}} - \frac{r^2}{2}E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}$$

$$E'_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}} = \left(E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right)' + \frac{r^2}{2}E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}$$

بأخذ النظيم لكل من الطرفين نجد أن:

$$\left\|E'_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p \le \left\|\left(E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right)'\right\|_p + \frac{r^2}{2}\,\left\|E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p \quad \dots (4)$$

بالاستفادة من(3) وبالتعويض في (4) نجد أن:

$$\left\|E'_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p \le (m+r)\,\left\|E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p + \frac{r^2}{2}\,\left\|E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p$$

ومنه نجد أن:

$$\left\|E'_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p \le \left((m+r)+\frac{r^2}{2}\right)\,\left\|E_{(m)}(\mathrm{z})\,e^{-r^2\frac{z}{2}}\right\|_p$$

وهو المطلوب.

* حصلنا في المبرهنة التالية على متراجحة ماركوف . بيرنشتين من أجل كثيرات الحدود الجبرية باستخدام دوال وزن جبرية.

مبرهنة 2:

ليكن $H_{(m,n)}$ فضاء الدوال الجبرية من الدرجة $2m$ مع دالة الوزن $w(x) = (\frac{1}{x^2})^{-r}$ المعرف على المجال

$]1,+\infty[$، و r عدد صحيح موجب تماماً و $1 < p < +\infty$ ، عندئذٍ العلاقة الآتية محققة:

$$\left\|H'_{(m)}(x)(\frac{1}{x^2})^{-r}\right\|_p \le \frac{4}{r}\left((m+r)+\frac{r^2}{2}\right)\,\left\|H_{(m)}(x)(\frac{1}{x^2})^{-r}\right\|_p \quad \dots (5)$$

البرهان:

نعلم أن كل عنصر من عناصر الفضاء $H_{(m,n)}$ يمكن كتابته بالشكل $H_m(x)(\frac{1}{x^2})^{-r}$

بالاستفادة من التحويل $(\frac{1}{x^2}) \leftrightarrow e^{+r\frac{z}{2}}$ نجد أن $H_m(x) = E_m(z)$ ومنه:

$$\frac{-2}{x^3} = \frac{re^{r\frac{z}{2}}}{2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2}{x^3} \cdot \frac{2}{r} e^{-r\frac{z}{2}} \quad \dots (6)$$

$$\frac{dH_m(x)}{dx} = \frac{dE_m(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \dots (7)$$

$$H'_m(x) = E'_m(z) \cdot \frac{-4}{x^3 . r} e^{-r\frac{z}{2}}$$

$$H'_m(x) = -4E'_m(z) \cdot \frac{e^{-r\frac{z}{2}}}{x . e^{-r\frac{z}{2}} . r}$$

$$H'_m(x)\, x = \frac{-4}{r} E'_m(z)$$

$$H'_m(x)\, x\; e^{-r^2\frac{z}{2}} = \frac{-4}{r} E'_m(z)\, e^{-r^2\frac{z}{2}}$$

$$\left\| H'_{(m)}(x)\, e^{-r^2\frac{z}{2}} \right\|_p \le \|x\|_p \left\| H'_m(x) e^{-r^2\frac{z}{2}} \right\|_p = \frac{4}{r} \left\| E'_m(z) e^{-r^2\frac{z}{2}} \right\|_p \quad \dots (8)$$

بالاستفادة من (1) وبالتعويض في (8) نجد أن

$$\left\| H'_{(m)}(x) (\frac{1}{x^2})^{-r} \right\|_p \le \frac{4}{r} \left((m+r) + \frac{r^2}{2} \right) \left\| E_m(z) e^{-r^2\frac{z}{2}} \right\|_p =$$

$$= \frac{4}{r} \left((m+r) + \frac{r^2}{2} \right) \left\| H_{(m)}(x) (\frac{1}{x^2})^{-r} \right\|_p$$

وهو المطلوب.

مبرهنة 3:

ليكن $B_{(m,n)}$ فضاء الدوال الجبرية من الدرجة m مع دالة الوزن $w(t) = (\frac{1}{t})^{-r}$ المعرف على المجال $]0, +\infty[$ و r عدد صحيح موجب تماماً و $1 < p < +\infty$ عندئذٍ العلاقة الآتية محققة:

$$\left\| \sqrt{t}\, B'_m(t)\, (\frac{1}{t})^{-r} \right\|_p \le \frac{2}{r} \left((m+r) + \frac{r^2}{2} \right) \left\| B_{(m)}(t) (\frac{1}{t})^{-r} \right\|_p \dots (9)$$

البرهان:

نعلم أن كل عنصر من عناصر الفضاء $B_{(m,n)}(t)$ يمكن كتابته بالشكل: $B_{(m,n)}(t) = B_m(t)\, (\frac{1}{t})^{-r}$

بالاستفادة من التحويل $t \leftrightarrow x^2$ حيث $x > 0$ نجد أن $B_m(t) = H_m(x)$ ومنه:

$$\frac{dt}{dx} = 2x = 2\sqrt{t} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \dots (10)$$

$$B_m(t) = \frac{g(t)}{(\frac{1}{t})^m} = H_m(x) \quad \dots (11)$$

$$\frac{dB_m(t)}{dt} = \frac{dH_m(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \;\Longrightarrow\; B'_m(t) = H'_m(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$2\sqrt{t}\, B'_m(t) = H'_m(x)$$

$$2\sqrt{t}\, B'_m(t)\ (\frac{1}{t})^{-r} = H'_m(x)\ (\frac{1}{t})^{-r}$$

$$\left\|2\sqrt{t}\, B'_m(t)\ (\frac{1}{t})^{-r}\right\|_p = 2\left\|\sqrt{t}\, B'_m(t)\ (\frac{1}{t})^{-r}\right\|_p = \left\|H'_m(x)\ (\frac{1}{t})^{-r}\ \right\|_p \dots (12)$$

بالاستفادة من (5) وبالتعويض في (12) نجد أن:

$$2\left\|\sqrt{t}\, B'_m(t)\ (\frac{1}{t})^{-r}\right\|_p = \left\|H'_m(x)\ (\frac{1}{t})^{-r}\ \right\|_p \le \frac{4}{r}\left((m+r)+\frac{r^2}{2}\right)\left\|H_{(m)}(x)(\frac{1}{t})^{-r}\right\|_p$$

ومنه نجد أن:

$$\left\|\sqrt{t}\, B'_m(t)\ (\frac{1}{t})^{-r}\right\|_p \le \frac{2}{r}\left((m+r)+\frac{r^2}{2}\right)\left\|B_{(m)}(t)(\frac{1}{t})^{-r}\ \ \right\|_p$$

وهو المطلوب.

في نهاية بحثنا هذا نتج لدينا المبرهنة التالية التي فيها حصلنا على متراجحة ماركوف بيرنشتين مع دوال وزن جبرية.

مبرهنة 4:

ليكن $B_{(m,n)}(t)$ فضاء الدوال الجبرية من الدرجة m مع دالة الوزن $w(t) = (\frac{1}{t})^{-r}$ المعرف على المجال $]0,+\infty[$، و r عدد موجب تماماً، و $1 < p < +\infty$ عندئذٍ العلاقة الآتية محققة:

$$\left\|\ B'_m(t)\ (\frac{1}{t})^{-r}\right\|_p \le \frac{2}{r}\left((m+r)+\frac{r^2}{2}\right)\left\|B_{(m)}(t)(\frac{1}{t})^{-r}\ \ \right\|_p \quad \dots (13)$$

البرهان:

نعلم أن كل عنصر من عناصر الفضاء $B_{(m,n)}(t)$ يمكن كتابته بالشكل: $B_{(m,n)}(t) = B_m(t)\ (\frac{1}{t})^{-r}$

بالاستفادة من التحويل $t \leftrightarrow x^2$ نجد أن $B_m(t) = H_m(x)$ ومنه ليكن $x > 0$ و $t > 0$ فإن:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{x^2} = e^{r\frac{z}{2}}$$

$$\frac{-1}{t^2}\ dt = \frac{r}{2} e^{r\frac{z}{2}}\, dz$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2}{t^2\ .re^{r\frac{z}{2}}}$$

لدينا $B_m(t) = E_m(z)$

بالتالي نجد $\frac{dB_m(t)}{dt} = \frac{dE_m(z)}{dz}.\frac{dz}{dt}$

بالاستفادة من التحويل $\frac{1}{x^2} \leftrightarrow e^{r\frac{z}{2}}$ والتحويل $t \leftrightarrow x^2$

$$B'_m(t) = E'_m(z)\ .\left(\frac{-2}{t^2\ .re^{r\frac{z}{2}}}\right) = -2E'_m(z)\ .\left(\frac{1}{e^{-r\frac{z}{2}}\ .re^{-r\frac{z}{2}}}\, e^{-r\frac{z}{2}}\right)$$

$$= -2E'_m(z)(\frac{1}{t\ .r})$$

$$B'_m(t)\ \ .t = -\frac{2}{r}\ E'_m(z)$$

$$B'_m(t) \quad t\, e^{-r^2\frac{z}{2}} = -\frac{2}{r}\ E'_m(z)\, e^{-r^2\frac{z}{2}}$$

$$\left\| B'_m(t)\ e^{-r^2\frac{z}{2}} \right\|_p \le \|t\|_p \left\| B'_m(t)\ e^{-r^2\frac{z}{2}} \right\|_p = \frac{2}{r} \left\| E'_m(z)\, e^{-r^2\frac{z}{2}} \right\|_p$$

بالاستفادة من (1) وبالتعويض في (14) نجد أن:

$$\left\| B'_m(t)\, (\frac{1}{t})^{-r} \right\|_p \le \frac{2}{r}\left((m+r) + \frac{r^2}{2} \right) \left\| E_m(z)\ e^{-r^2\frac{z}{2}} \right\|_p =$$

$$= \frac{2}{r}\left((m+r) + \frac{r^2}{2} \right) \left\| B_{(m)}(t) (\frac{1}{t})^{-r} \right\|_p$$

وهو المطلوب.

النتائج والتوصيات:

مما سبق توصلنا من هذا البحث إلى دراسة متراجحة ماركوف بيرنشتين مع دوال وزن جبرية وأسية، التي تفيد في حل العديد من مسائل التحليل الرياضي ولا سيما نظرية التقريب وذلك باستخدام طرائق رياضية مناسبة للوصل الى المتراجحة المطلوبة، ونوصي بدراسة هذا الموضوع من أجل دوال وزن أخرى مختلفة.

المراجع:

[1]- AHMAD MAROUF , *On Markov And Bernstien Inequalities In Weighted Lp For Real Polynomail .T*ishreen University Journal for Research and scientific stuies. Basic Scien Ces Series Vol.(37) No.(6) 2015.

[2]- Sergekalmykov Be`la Nagy and Vilmos Totik, Bernestein-and Markov–Type inequalities, arxiv: 2014.0234 V2 [math.ev]21 May 2021.

[3]- GUVEN. A; ISRAFILOV, D-M. Multiplier Theorems in Weighted smirnov space. J.Korean Math Soc,45, No 6, 2008,1535-1548.

[4]- T.kilgore, *Interpolation properties of polynomial of degree at most 2n Weighted by* $(1+x^2)^{-r}$, East J.Approx. 7(2001), nol,9-25.

[5]- T.kilgore, *Markov and Bernsties inequalities in Lp for some Weighted algebraic and trigonometric poly mails*, Journal of Inequalities and Application. 4 (2005), 413-321.