

## دراسة تحليلية لمعادلة شرودنغر الخطية للهزاز التوافقي بوجود كمون تابعي دلّتا ديراك

الدكتور أحمد شفيق بيشاني\*

الدكتور عدنان علي أحمد\*\*

الاء عدنان معلا\*\*\*

(تاريخ الإيداع 2022 /8/14 – تاريخ النشر 2022 /11/17)

□ ملخص □

تم إضافة كمون تابعي ديراك  $\Omega_1\delta(x - x_1) + \Omega_2\delta(x - x_2)$  إلى كمون الهزاز التوافقي  $\frac{1}{2}mw^2x^2$  في معادلة شرودنغر الخطية ، ومن ثم تحويلها إلى معادلة تفاضلية تدعى معادلة ويبر تقبل تابع القطع المكافئ الأسطواني  $D_V(x)$  حلاً لها ، وكذلك تم التمكن من ربط الحلول على يمين ويسار كل من التابعين مما سمح لنا بالحصول على معادلة جديدة ، حلّ تلك المعادلة سمح لنا بتبيان تأثير الحدود المضافة على طاقة طيف الهزاز التوافقي .  
الكلمات المفتاحية: هزاز توافقي ، كمون تابعي ديراك، توابع القطع المكافئ الأسطواني ، معادلة شرودنغر الخطية ، معادلة ويبر .

\* أستاذ - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة طرطوس - طرطوس - سوريا

\*\*مهاضر - كلية الهندسة التقنية - جامعة طرطوس - طرطوس - سوريا

\*\*\* طالبة دراسات عليا (ماجستير) - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة طرطوس - طرطوس - سوريا

## Analytical study of the linear Schrödinger equation for the harmonic oscillator with a potential Dirac delta function

Dr.Ahmad Shafiq Bishani\*

Dr.Adnan Ali Ahmad\*\*

Alaa Adnan moualla\*\*\*

(Received 14/8/2022.Accepted 17/11/2022)

### □ABSTRACT □

The potential of the Dirac function  $\Omega_1\delta(x - x_1) + \Omega_2\delta(x - x_2)$  was added to the potential of the harmonic vibrator  $\frac{1}{2}mw^2x^2$  in the linear schrodinger equation ,and then converted into a differential equation called Weber's equation. The weber's equation accepts cylindrical parabola function  $D_\nu(x)$  as a solution , and it was also possible to connect the solutions to the right and left of each both functions which allowed us to obtain a new equation . Solving that equation allowed to us show the effect of the added limits on the spectrum of the harmonic vibrator.

**Key words:** Harmonic Oscillator , Two Dirac function Potential , Parabolic Cylinder Functions , linear Schrödinger equation , weber equation .

---

\*Professor ,Department of physics , Faculty of Sciences ,Tartous university, Tartous , Syria.

\*\* lecturer , Faculty of Technical Engineering , Tartous University,Tartous , Syria.

\*\*\*Master Student , Department of physics , Faculty of Sciences ,Tartous University, Tartous , Syria.

## مقدمة:

تحظى دراسة الهزاز التوافقي بأهمية كبيرة تكمن في تواجده ضمن معظم مجالات الفيزياء ، نستطيع من خلاله معرفة كيفية حل معادلة شرودنغر الخطية التي تعد من أبسط المعادلات و التي ظهر حلها من خلال كثير حدود هرميتي، وتعطى صيغتها بالعلاقة:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi(x) = 0$$

الكمون المفروض هو كمون الهزاز التوافقي  $\frac{mw^2x^2}{2}$ .

أمكن دراسة فكرة جديدة تعمل على إضافة كمون الحفرة الكمونية إلى كمون الهزاز التوافقي، وذلك لما تملكه من أهمية لدى العديد من الباحثين [1,2] ولاسيما في مجال النموذج الطبقي النووي ، ولما له من أهمية في التأثير على السويات الطاقية وبالتالي على طيف طاقة الهزاز التوافقي [3]. إن أهم هذه الدراسات [4] أشارت إلى إدخال كمون تابع دلتا إلى كمون الهزاز التوافقي في معادلة شرودنغر الخطية وفق الصيغة:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - \frac{1}{2}mw^2x^2 - \frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x - x_0) \right] \psi(x) = 0$$

حيث أن حل المعادلة  $\psi(x)$  مستمر في جميع نقاط الفراغ ما عدا نقطة الانقطاع التفاضلي  $x = x_0$  مكان تواجد التابع  $\delta$ ، وتجلت الفكرة الأساسية للعملية التحليلية في تحويل معادلة شرودنغر الخطية إلى معادلة قابلة للحل، والاستفادة من الشروط الحدية عندئذ، والعمل على ربط الحلول على يمين ويسار التابع  $\delta$ ، وذلك للوصول إلى الحل التحليلي المطلوب والموضح بالصيغة التالية:

$$2\Omega D^+_{\nu}(x_0)D^-_{\nu}(x_0) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} = 0$$

لذلك كان اهتمامنا في وضع إطار تحليلي بإضافة جديدة لكمون الهزاز التوافقي ، وذلك بإدخال كمون تابعي دلتا إلى الكمون المفروض، وإجراء الدراسة التحليلية لها. وعلى الرغم من أن الدراسة المشار إليها تتم في البعد الواحد إلا أنها تمهد الطريق لدراسة المسألة في البعد الثلاثي.

## أهمية البحث وأهدافه:

تتمثل أهمية هذا البحث في إمكانية دراسة معادلة شرودنغر الخطية بعد إضافة كمون تابعي ديراك إلى كمون الهزاز التوافقي وتحويلها إلى معادلة قابلة للحل وتملك حلاً معروفة وهي معادلة وبيبر، ومن ثم حل المعادلة الناتجة حلاً تحليلياً بالاستفادة من الشروط الحدية المطبقة عند الانقطاعين التفاضليين ، ويهدف ذلك إلى توضيح أهمية الكمون اللانهائي بالإضافة إلى فهم أكبر للعمليات الرياضية الداخلة في هذه الدراسة .

## طريقة البحث ومواده:

تعطى معادلة شرودنجر الخطية (linear Schrödinger equation) للهزاز التوافقي بالصيغة:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - \frac{1}{2}mw^2x^2 \right] \psi(x) = 0 \quad (1)$$

يعبر عن الكمون الكلي المضاف إلى كمون الهزاز التوافقي بالعلاقة:

$$V(x) = \frac{1}{2}mw^2x^2 + \frac{\hbar^2}{m} [\Omega_1\delta(x - x_1) + \Omega_2\delta(x - x_2)]$$

حيث أن:  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  استطاعة التابع  $\delta$  عند كل من النقطتين  $x_1$  و  $x_2$  على الترتيب.

من أجل ذلك تصبح المعادلة (1) بالصيغة:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ E - \frac{1}{2}mw^2x^2 - \frac{\hbar^2}{m} [\Omega_1\delta(x - x_1) + \Omega_2\delta(x - x_2)] \right\} \psi(x) = 0 \quad (2)$$

إن الحد المضاف للكمون يظهر من خلال تابع ديراك أو ما يسمى تابع دلتا  $\delta(x)$  [5]:

$$\delta(x - x_1) = \begin{cases} \infty & x = x_1 \\ 0 & x \neq x_1 \end{cases}$$

$$\delta(x - x_2) = \begin{cases} \infty & x = x_2 \\ 0 & x \neq x_2 \end{cases}$$

لهذا السبب يسمى الحد المضاف بالحد اللانهائي أو الكمون اللانهائي الذي يعبر عن أكبر استطاعة ممكنة قد تؤثر على سويات الطاقة في طيف الهزاز التوافقي.

إن حل المعادلة (2) يعبر عنه بالتابع  $\psi(x)$  وهو مستمر في جميع نقاط الفضاء ما عدا النقطتين

$x = x_1$  و  $x = x_2$  مكان تواجد تابعي دلتا بسبب وجود انقطاع تفاضلي عند هاتين النقطتين، فيتشكل

لدينا ثلاث مناطق في كمون الهزاز كما في الشكل (1):

ومن أجل إتمام إجراء هذه الدراسة:

أولاً: تم تحويل معادلة شرودنجر الخطية إلى معادلة قابلة للحل وهي

معادلة ويبير (weber function) كونها تمتلك حلاً معروفة،

وذلك بإدخال متحولات جديدة [5] أي:

بفرض أن:  $\xi = \sqrt{2}\lambda x$  وكذلك  $\lambda^2 = \frac{mw}{\hbar}$  وأيضاً  $\varepsilon = \frac{E}{\hbar w}$

فعدنئذ يكون:  $\frac{d^2}{dx^2} = 2\lambda^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$

وعلى اعتبار  $\lambda^2 = \frac{1}{2}$  يصبح لدينا العلاقة  $\xi = x$  وهو بعد التابع دلتا

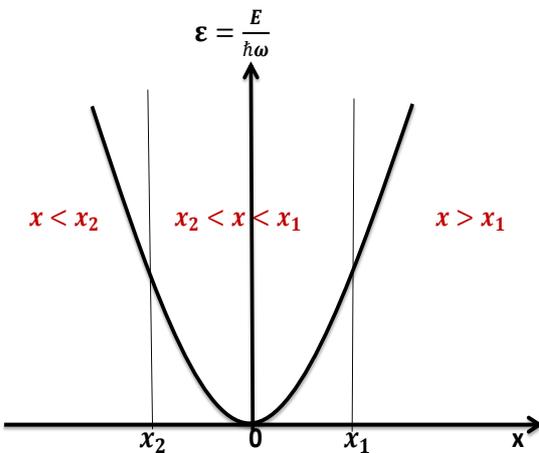
$\delta$  عن مركز الهزاز التوافقي

ويتم توضيح ذلك إذا علمنا أن  $\hbar c = 197.32 \text{ MeV.Fer}$  وكذلك

$mc^2 = 939.6 \text{ MeV}$  وأيضاً

$\hbar w = 20 \text{ MeV}$  لوجدنا أن:  $\lambda^2 = 0.495 \text{ MeV}$

ومنه المعادلة (1) تأخذ الصيغة [6,7,8]:



الشكل (1) الهزاز التوافقي وتابعي ديراك

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \left(\varepsilon - \frac{\xi^2}{4}\right)\psi(\xi) = 0 \quad (3)$$

إذا رمزنا  $\varepsilon = \nu + \frac{1}{2}$  عندئذ يمكن كتابة المعادلة (3) بالعلاقة [6,7]:

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4}\right)\psi(\xi) = 0 \quad (4)$$

يُعبّر عن حلول المعادلة (4)  $\psi(x)$  من خلال توابع القطع المكافئ الأسطواني أو ما تسمى بتوابع ويبر،

وهي أربع توابع تعطى بالشكل التالي [7,8]:

$$D_\nu(\xi), D_\nu(-\xi), D_{-\nu-1}(i\xi), D_{-\nu-1}(-i\xi)$$

حيث أن كل تابع من التوابع السابقة يعبر عنه بصيغة رياضية تختلف عن التابع الأخر.

يعطى التابع  $D_\nu(\xi)$  بدلالة التوابع الأخرى بالعلاقة [9,10,11]:

$$\begin{aligned} D_\nu(\xi) &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{v\frac{\pi i}{2}} D_{-\nu-1}(i\xi) + e^{-v\frac{\pi i}{2}} D_{-1-\nu}(-i\xi) \right] \\ &= e^{-v\pi i} D_\nu(-\xi) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-\frac{(v+1)\pi i}{2}} D_{-\nu-1}(i\xi) \\ &= e^{v\pi i} D_\nu(-\xi) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\frac{v+1}{2}\pi i} D_{-\nu-1}(i\xi) \end{aligned} \quad (5)$$

وقد يكتب بدلالة كثيرة الحدود الهرميتية إذا كانت  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$  عدد صحيح موجب بالشكل [4,12]:

$$D_\nu(\xi) = 2^{\frac{-\nu}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_\nu(\xi) \quad (6)$$

ومن الصيغ الأخرى لدينا العلاقة [7]:

$$D_\nu(\xi) = \left[ \cos \pi \left( \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] Y_1 - \left[ \sin \pi \left( \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] Y_2 \quad (7)$$

على اعتبار أن:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2^{-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{4}}} y_1 \\ Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2^{-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{4}}} y_2 \end{aligned}$$

أن:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \varepsilon \frac{x^2}{2!} + \left(-\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\right) \frac{x^4}{4!} + \left(-\varepsilon^3 - \frac{7}{2}\varepsilon\right) \frac{x^6}{6!} + \left(-\varepsilon^4 - 11\varepsilon^2 + \frac{15}{4}\right) \frac{x^8}{8!} \\ &\quad + \left(-\varepsilon^5 - 25\varepsilon^3 - \frac{211}{4}\varepsilon\right) \frac{x^{10}}{10!} + \dots \end{aligned}$$

علماً

وكذلك:

$$\begin{aligned} y_2 &= x - \varepsilon \frac{x^3}{3!} + \left(-\varepsilon^2 + \frac{3}{2}\right) \frac{x^5}{5!} + \left(-\varepsilon^3 - \frac{13}{2}\varepsilon\right) \frac{x^7}{7!} + \left(-\varepsilon^4 - 17\varepsilon^2 + \frac{63}{4}\right) \frac{x^9}{9!} + \\ &\quad \left(-\varepsilon^5 - 35\varepsilon^3 - \frac{531}{4}\varepsilon\right) \frac{x^{11}}{11!} + \dots \end{aligned}$$

ثانياً: يجب ربط حلول المعادلة (2) في المناطق الثلاث المتشكلة:

$$x < x_2 \quad , \quad x_2 < x < x_1 \quad , \quad x > x_1$$

بناءً على ذلك نوجد الشروط الحدية للانقطاعين التفاضليين  $x = x_1$  و  $x = x_2$

وكما نعلم أن إحدى خواص التابع الموجي  $\psi(x)$  الاستمرارية ، فيمكن كتابة شرط الاستمرارية في

النقطتين كالتالي:

$$\psi(x_1 + 0) = \psi(x_1 - 0) \quad (8)$$

$$\psi(x_2 + 0) = \psi(x_2 - 0) \quad (9)$$

لكن مشتق التابع الموجي غير مستمر عند كل من النقطتين، فيتم الربط بين مشتق التابع الموجي على

يمين ويسار كل من النقطتين  $x = x_1$  و  $x = x_2$  فنكتب شرط الربط بالعلاقة [13,14]

$$\psi'(x_1 + 0) - \psi'(x_1 - 0) = 2\Omega_1 \psi(x_1) \quad (10)$$

$$\psi'(x_2 + 0) - \psi'(x_2 - 0) = 2\Omega_2 \psi(x_2) \quad (11)$$

باعتبار التابعان  $D_v(x)$  و  $D_v(-x)$  هما تابعان خطيان مستقلان [7,12,15]، وبالاعتماد على

الشروط الحدية السابقة يمكننا كتابة الحل العام للمعادلة (4) بالشكل التالي:

$$\psi(x) = \begin{cases} c_1 D_v^+(x) & : x > x_1 \\ c_2 D_v^-(x) + c_3 D_v^+(x) & : x_2 < x < x_1 \\ c_4 D_v^-(x) & : x_2 > x \end{cases} \quad (12)$$

من أجل سهولة كتابة الحلول يمكن استخدام الترميز التالي:

$$D_v^+(x) = D_v(+x) \quad , \quad D_v^-(x) = D_v(-x)$$

بالتالي نحصل على العلاقة:

$$D_v^+(x) = D_v^-(-x) \quad (13)$$

الآن نطبق الشروط الحدية من أجل  $x = x_1$

فيمكن كتابة شرط الربط كالتالي:

$$c_1 D_v^+(x_1) - [c_2 D_v^-(x_1) + c_3 D_v^+(x_1)] = 2\Omega_1 c_1 D_v^+(x_1) \quad (14)$$

كما أن استمرارية التتابع الموجية تسمح بكتابة الصيغة:

$$c_1 D_v^+(x_1) = c_2 D_v^-(x_1) + c_3 D_v^+(x_1) \quad (15)$$

يتم إعادة كتابة شرط الربط بين الحلول بالشكل:

$$\begin{aligned} [c_2 D_v^-(x_1) + c_3 D_v^+(x_1)] c_1 D_v^+(x_1) - [c_2 D_v^-(x_1) + c_3 D_v^+(x_1)] c_1 D_v^+(x_1) \\ = 2\Omega_1 c_1^2 D_v^+(x_1) \end{aligned} \quad (16)$$

إن شرط وجود حل يختلف عن الحل الصفري للمعادلة (16) هو أن يكون محدد أمثال الثوابت مساوياً

الصفراً، وبالتالي يمكن التعبير عن الجزء اليساري من العلاقة السابقة من خلال المعين الموصوف بالشكل:

$$\begin{vmatrix} c_2 D_v^-(x_1) + c_3 D_v^+(x_1) & c_1 D_v^+(x_1) \\ c_2 D_v^-(x_1) + c_3 D_v^+(x_1) & c_1 D_v^+(x_1) \end{vmatrix} = 0$$

وبالاعتماد على خواص المحددات يمكن أن نكتب:

$$\begin{vmatrix} c_2 D_v^-(x_1) & c_1 D_v^+(x_1) \\ c_2 D_v'^-(x_1) & c_1 D_v'^+(x_1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_3 D_v^+(x_1) & c_1 D_v^+(x_1) \\ c_3 D_v'^+(x_1) & c_1 D_v'^+(x_1) \end{vmatrix} = 0$$

$$c_1 c_2 \begin{vmatrix} D_v^-(x_1) & D_v^+(x_1) \\ D_v'^-(x_1) & D_v'^+(x_1) \end{vmatrix} = -c_2 c_2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \quad (17)$$

مع الإشارة إلى أن محدد الفرونسكي (**wronskian determine**) [16] للتوابع التي تمثل حلاً للمعادلة (4)

ويعطى من أجل  $D_v(x)$  و  $D_v(-x)$  بالصيغة:

$$D_v^-(x_1) D_v'^+(x_1) - D_v^+(x_1) D_v'^-(x_1) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \quad (18)$$

بالتالي وبالنظر إلى العلاقة (17) نجد:

$$-c_1 c_2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} = 2\Omega_1 c_1^2 D_v^{2+}(x_1)$$

وقد تكتب بالشكل:

$$2\Omega_1 c_1 D_v^{2+}(x_1) + c_2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} = 0 \quad (19)$$

على اعتبار  $c_1 \neq 0$

ويتطبيق الشروط الحدية في النقطة  $x = x_2$

فيمكن كتابة شرط الربط كالتالي:

$$[c_2 D_v'^-(x_2) + c_3 D_v'^+(x_2)] - c_4 D_v'^-(x_2) = 2\Omega_2 c_4 D_v^-(x_2) \quad (20)$$

كما أن استمرارية التوابع الموجية تسمح بكتابة الصيغة:

$$c_2 D_v^-(x_2) + c_3 D_v^+(x_2) = c_4 D_v^-(x_2) \quad (21)$$

يتم إعادة كتابة شرط الربط بين الحلول بالشكل:

$$\begin{aligned} c_4 D_v^-(x_2) [c_2 D_v'^-(x_2) + c_3 D_v'^+(x_2)] - [c_2 D_v^-(x_2) + c_3 D_v^+(x_2)] c_4 D_v'^-(x_2) \\ = 2\Omega_2 c_4^2 D_v^{2-}(x_2) \end{aligned} \quad (22)$$

إن شرط وجود حل يختلف عن الحل الصفري للمعادلة (22) هو أن يكون محدد أمثال الثوابت مساوياً للصفر،

وبالتالي يمكن التعبير عن الجزء اليساري من العلاقة السابقة من خلال المعين الموصوف بالشكل:

$$\begin{vmatrix} c_4 D_v^-(x_2) & c_2 D_v^-(x_2) + c_3 D_v^+(x_2) \\ c_4 D_v'^-(x_2) & c_2 D_v'^-(x_2) + c_3 D_v'^+(x_2) \end{vmatrix} = 0$$

وبالاعتماد على خواص المحددات يمكن أن نكتب:

$$\begin{vmatrix} c_4 D_v^-(x_2) & c_2 D_v^-(x_2) \\ c_4 D_v'^-(x_2) & c_2 D_v'^-(x_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_4 D_v^-(x_2) & c_3 D_v^+(x_2) \\ c_4 D_v'^-(x_2) & c_3 D_v'^+(x_2) \end{vmatrix} = 0$$

بالاستفادة من المعادلة (18) نجد :

$$c_3 c_4 \begin{vmatrix} D_v^-(x_2) & D_v^+(x_2) \\ D_v^-(x_2) & D_v^+(x_2) \end{vmatrix} = -c_3 c_4 \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \quad (23)$$

بالتالي وبالنظر إلى العلاقة (23) نجد:

$$-c_3 c_4 \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} = 2\Omega_2 c_4^2 D_v^{2-}(x_2)$$

وقد تكتب بالشكل

$$2\Omega_2 c_4 D_v^{2-}(x_2) + c_3 \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} = 0 \quad (24)$$

على اعتبار أن  $c_4 \neq 0$

يعاد كتابة المعادلات الناتجة عن الحل عند  $x = x_1$  و  $x = x_2$  والمشار إليها سابقا بالعلاقات (15)

و (19) و (21) و (24) بالشكل:

$$\begin{cases} c_1 D_v^+(x_1) - c_2 D_v^-(x_1) - c_3 D_v^+(x_1) = 0 \\ c_2 D_v^-(x_2) + c_3 D_v^+(x_2) - c_4 D_v^-(x_2) = 0 \\ 2c_1 \Omega_1 D_v^{2+}(x_1) + c_2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} = 0 \\ 2c_4 \Omega_2 D_v^{2-}(x_2) + c_3 \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

والتي تشكل نظام لأربع معادلات خطية متجانسة وحتى يملك هذا النظام حلاً من الضروري أن يكون

المحدد الممثل له مساوياً للصفر وبالتالي:

$$\begin{vmatrix} D_v^+(x_1) & -D_v^-(x_1) & -D_v^+(x_1) & 0 \\ 0 & D_v^-(x_2) & D_v^+(x_2) & -D_v^-(x_2) \\ 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) & \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} & 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

وبالاعتماد على خواص المحددات يمكن فك المحدد السابق بالصيغة التالية :

$$\begin{aligned}
 & D_v^+(x_1) \begin{vmatrix} D_v^-(x_2) & D_v^+(x_2) & -D_v^-(x_2) \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} & 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \end{vmatrix} + D_v^-(x_1) \begin{vmatrix} 0 & D_v^+(x_2) & -D_v^-(x_2) \\ 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} & 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \end{vmatrix} \\
 & - D_v^+(x_1) \begin{vmatrix} 0 & D_v^-(x_2) & -D_v^-(x_2) \\ 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) & \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (27)
 \end{aligned}$$

بإعادة فك المحددات الناتجة و إجراء العمليات اللازمة يكون لدينا :

(28)

$$\begin{aligned}
 & D_v^+(x_1) \left[ D_v^-(x_2) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} & 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \end{vmatrix} - D_v^+(x_2) \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} & 0 \\ 0 & 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \end{vmatrix} - D_v^-(x_2) \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \end{vmatrix} \right] \\
 & + D_v^-(x_1) \left[ -D_v^+(x_2) \begin{vmatrix} 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) & 0 \\ 0 & 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \end{vmatrix} - D_v^-(x_2) \begin{vmatrix} 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \end{vmatrix} \right] \\
 & - D_v^+(x_1) \left[ -D_v^-(x_2) \begin{vmatrix} 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) & 0 \\ 0 & 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \end{vmatrix} - D_v^-(x_2) \begin{vmatrix} 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) & \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right] \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

وباستخدام الإصلاحات المناسبة نجد:

(29)

$$\begin{aligned}
 & -D_v^+(x_1) D_v^+(x_2) \left[ 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \right] - D_v^+(x_1) D_v^-(x_2) \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \right]^2 \\
 & - D_v^-(x_1) D_v^+(x_2) \left[ 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \right] \\
 & - D_v^-(x_1) D_v^-(x_2) \left[ 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \right] + D_v^+(x_1) D_v^-(x_2) \left[ 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \right] = 0
 \end{aligned}$$

نحصل في النهاية على معادلة خطية متجانسة تعطى صيغتها بالشكل:

$$\begin{aligned}
 & -D_v^+(x_1) D_v^+(x_2) \left[ 2\Omega_2 D_v^{2-}(x_2) \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \right] - D_v^+(x_1) D_v^-(x_2) \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \right]^2 \\
 & - D_v^-(x_1) D_v^-(x_2) \left[ 2\Omega_1 D_v^{2+}(x_1) \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} \right] = 0 \quad (30)
 \end{aligned}$$

والتي تعبر عن الحل المطلوب والغاية المرجوه.

## النتائج والمناقشة:

1- تم حل معادلة شرودنغر الخطية للهزاز التوافقي بعد إضافة كمون لانهاضي (كمون تابعي دلتا)

$$V(x) = \frac{1}{2}mw^2x^2 \quad \text{إلى كمون الهزاز التوافقي} \quad \frac{\hbar^2}{m} [\Omega_1 \delta(x - x_1) + \Omega_2 \delta(x - x_2)]$$

وذلك بعد تحويلها إلى معادلة شبيهة بمعادلة ويبر المعطاة بالشكل:

$$x = \xi \quad \text{على اعتبار} \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left(\varepsilon - \frac{x^2}{4}\right)\psi(x) = 0$$

2- العمل التحليلي تجلى بشكل واضح في عملية ربط الحلول على يمين ويسار التابع  $\delta$  أي على يمين ويسار الحاجز الكموني اللانهائي، ومن ثم الوصول بتلك الحلول إلى معادلة تفاضلية تعتبر تابع القطع المكافئ الأسطواني  $D_v^+(x)$  و  $D_v^-(x)$  حلولاً لها في المناطق الثلاث المتشكلة بالإضافة إلى ظهور التابع غاما  $\Gamma(-\nu)$  حيث:  $\nu = \varepsilon - \frac{1}{2}$  عدد صحيح موجب و  $\varepsilon = \frac{E}{\hbar w}$  مقدار التغير في طاقة السويات الطاقية وهو مقدار صغير جداً

## الاستنتاجات والتوصيات:

- 1- الحل التحليلي لمعادلة شرودنغر الخطية مع كمون تابعي ديراك والحلول التي تم ربطها على يمين ويسار كل من التابعين سمح لنا بالوصول إلى المعادلة النهائية (30).
- 2- إن استمرار البحث والدراسة ضمن هذا المجال يسمح بفهم أكبر وتعمق أكثر في النظرة التحليلية لمسألة كمون الهزاز التوافقي ومحاولة رسم طيف طاقة جديد للهزاز في إطار النموذج المدروس.
- 3- يمكن أن يكون للحالة الكلاسيكية هذه اسقاطات نووية ويمكن حساب طاقة الانشطار سبين- مدار لنوى ذات طبيعة خاصة وفق النموذج الطبقي.
- 4- الحل العددي بواسطة برنامج حاسوبي يمهّد لدراسة تأثير الكمون المضاف على طيف طاقة الهزاز التوافقي. وبالتالي يمكن مقارنة نتائج هذه الدراسة مع دراسات سابقة ضمن الإطار المذكور.

## المراجع:

- 1-DEMIRALP,E,2003-*Properties of Bound State of the Schrodinger Equation with Attractive Dirac Delta Potentials*.Bogazici University Tukey.
- 2-DEMIRALP,E-Bose,2007-*Einstein Condensate in Harmonic Trap Decorated With Dirac Function*,Harran University, Turkey.
- 3-SICLEN,V-,1988*Scattering From an Attractive Delta Function Potential*.Am.J.phy.
- 4- د.بيشانى، أحمد-د.موسى، محمد-د.تقيحة، أمير-محمد.محمود.2009. حل معادلة شرودنغر الخطية للهزاز التوافقي مع كمون تابع  $\delta$  ودراسة تأثير هذا الكمون على طيف الطاقة-مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية،سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد(1).
- 5-CIAUDE,A,1995- *Well with a Reflecting Barrier*.Am.J.phys.
- 6-AIHAIDARI,A,2006-*Exact Solution of Dirac and Schrodinger for a Large Class of Power Law Potentials at Zero Energy*,King Fahd University of Petroleum & Minerals , Saudi Arabia.
- 7-STEGUN,I,1972-*Handbook of Mathematical Functions With Formulas , Graphs , NewYork*.

- 8-DEMIRALP,E,2003-*Properties of One-Dimennsional Harmonic Oscillator With the Dirac. Delta Function*, Turkish Academy of Sciences.
- 9-HAMPRECHT,B,1997-*Exact Solutions of the Time Dependent Schrodinger Equation in One Space Dimension*,Frei University Berlin,Germany.
- 10-MARTOREL,J,1993-*Scattering by Finite Periodic Potential* Am.J.phys.
- 11-DUTTA,R,1998-*Regularization and Renormalization in Scattering from Dirac Delta*.Am.J.phys.
- 12-DANIEL,A,1975-*An Exact Treatment of the Dirac Delta Function in the Schrodinger Equation*.Am.J.phys.
- 13-АХИЗерА.И. 1969. *Беретецкий В.Б.Квановая эпектроднамиа*.М Наука
- 14-ХИЗерА. И.1981. *Беретецкий В.Б. Квановая эпектроднамиа* .М.Наука
- 15-OLEVER,F, 1959-*Uniform Asymptotic Expansions for Weber Parabolic Cylinder Function of Large Order*-J.Research NBS,63B.N2.
- 16- БеИТМеН Г, 1974.Эрдей А . *Вүсшя Мрансүентная функЦия* . Пер . с англ .-м .- Наука.