مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (1) 2023
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (1) 2023

السيطرة الطيفية من المرتبة 2 على بعض البيانات غير الموجهة

الدكتور رامي شاهين*
الدكتور سهيل محفوض**
محمد فهد عدره***

(تاريخ الإيداع30/ 10/ 2022 – تاريخ النشر 10 / 1/ 2023)

□ ملخّص □

تعد السيطرة من أهم المفاهيم في نظرية البيان نظراً لتطبيقاتها الكثيرة والمفيدة في العديد من المجالات كالنمذجة، بحوث العمليات، تحليل الشبكات الاجتماعية، الشبكات البيولوجية وغيرها. ليكن k عدد صحيح موجب، يعرف تابع السيطرة الطيفية من المرتبة k $(kRDF)$ على بيان $G=(V,E)$ بأنه التابع: $f:V(G)\to$ $\mathcal{P}(\{1,2,\dots,k\})$ والذي يحقق من أجل أي رأس $v\in V(G)$ مع $f(v)=\emptyset$ يكون $\bigcup_{u\in N(v)} f(u)=\{1,2,\dots k\}$. وزن التابع f يعرف بالشكل $w(f)=\sum_{v\in V(G)}|f(v)|$. عدد السيطرة الطيفية من المرتبة k هو الوزن الأصغري لأي تابع سيطرة طيفية من المرتبة k على G، ويرمز له بِ $\gamma_{rk}(G)$، في هذا البحث تمكنا من إيجاد عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 على كل من بيان طاحونة الهواء الهولندية $D_n^{(m)}$ في الحالة العامة من أجل $n>4$ و $m\geq 2$، وعلى بيان جانجير $J_{n,m}$ في حالة $n=2,3$.

الكلمات المفتاحية: السيطرة الطيفية من المرتبة 2، حلقة، بيان طاحونة الهواء الهولندية، بيان جانجير.

*أستاذ–كلية الهندسة–جامعة الجزيرة الخاصة–دمشق–سورية. Shaheenramy2010@hotmail.com
**مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين–اللاذقية–سورية. mahfudsuhail@gmail.com
*** طالب دراسات عليا (ماجستير)–قسم الرياضيات–كلية العلوم– جامعة تشرين–اللاذقية–سورية. mohadrah9@gmail.com

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (1) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (1) 2023

Rainbow Domination Number of the second degree on some undirected graphs

Dr. Ramy Shaheen*
Dr. Suhail Mahfud**
Mohammed Fahed Adrah***

(Received 30/10/2022.Accepted 10/1/2023)

□ABSTRACT □

Domination is one of the most important concepts in graph theory due to its many useful applications in many fields such as optimization, operation research, social networks analysis, biological networks, etc. Let k be a positive integer. A k-rainbow domination function $(kRDF)$ of a graph G is a function $f: V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})$, such that for every vertex $v \in V(G)$ with $f(v) = \emptyset$ satisfies $\bigcup_{u \in N(v)} f(v) = \{1, 2, \dots, k\}$. The weight of a $kRDF$ is defined as the value $w(f) = \sum_{v \in V(G)} |f(v)|$. The k-rainbow domination number of a graph G, which is denoted by $\gamma_{rk}(G)$, is the minimum weight of all $kRDFs$ of G. In this paper we were able to give the exact value of the 2-rainbow domination number of Dutch windmill graph $D_n^{(m)}$ for $n > 4$ و $m \geq 2$, and of jahangir graph $J_{n,m}$ where $n = 2, 3$.

Keywords: 2-rainbow domination, cycle, Dutch windmill graph, Jahangir graph**.**

---

*Professor, Faculty of Engineering, Aljazeera Private University, Damascus, Syria. Email: shaheenramy2010@hotmail.com.
**Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: mahfudsuhail@gmail.com.
***Postgraduate Student (MSc), Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: mohadrah9@gmail.com.

مقدمة:

الرياضيات علمٌ ساحر يجعل من قارئه يغوص في بحرٍ من الأرقام والرموز الغامضة، لتأتي الرياضيات التطبيقية وتكشف العديد من تلك الأسرار وتقرّب تلك المفاهيم إلى الحياة اليومية، وقد أكد على ذلك العالم غاليليو غاليلي بقوله "الرياضيات هي الأبجدية التي كتب بها الله الكون"، ولعلَّ أقرب نظرياتها محاكاة للواقع هي نظرية البيان وذلك لإسهامها الكبير في تكوين العالم الذي نعيش فيه الآن فتطبيقاتها الواسعة كالسيطرة، التلوين، الاستقلال وغيرها تساعد في حل المشاكل التي تواجهها مختلف العلوم والمجالات.

هذا البحث يهتم بإيجاد عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 لبعض البيانات غير الموجهة كبيان طاحونة الهواء الهولندية وبيان جانجير، وتكمن أهمية هذا النوع من السيطرة من أن المشاكل في الحياة الواقعية تتأثر بعوامل المسألة المطروحة وتفرض على المسألة أكثر من شرط لنقول أنّ المشكلة تم السيطرة عليها والمسألة قد حُلت.

تعاريف أساسية:

تعريف 1 [1]: ليكن k عدد صحيح موجب، يعرف تابع السيطرة الطيفية من المرتبة k $(kRDF)$ على بيان $G=(V,E)$ بأنه التابع: $f:V(G)\to\mathcal{P}(\{1,2,\dots,k\})$ ، والذي يحقق من أجل أي رأس $v\in V(G)$ مع

$f(v)=\emptyset$ يكون $\bigcup_{u\in N(v)} f(u)=\{1,2,\dots k\}$.

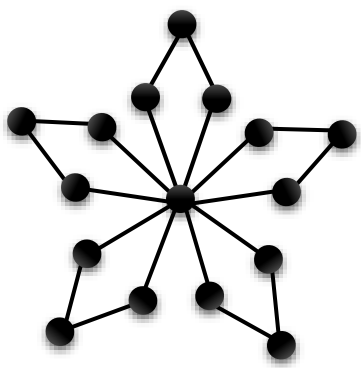
وزن التابع f يعرف بالشكل $w(f)=\sum_{v\in V(G)}|f(v)|$، عدد السيطرة الطيفية من المرتبة k هو الوزن الأصغري لأي تابع سيطرة طيفية من المرتبة k على G، ويرمز له ب $\gamma_{rk}(G)$.عندما يكون $k=1$ يؤول تعريف السيطرة الطيفية إلى تعريف السيطرة العادية.

وإذا كان البيان المعطى بالحالة العامة فإن عدد السيطرة هو العلاقة الرياضية التي تولد هذا العدد مهما تغير عدد الرؤوس.

تم دراسة المفهوم بشكل مكثف من قبل العديد من الباحثين انظر كمثال إلى [8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,1,2].

تعريف 2 [9] : بيان طاحونة الهواء الهولندية هو بيان يتشكل من m نسخة من الحلقة C_n مع رأس مشترك ويرمز له بـ $D_n^{(m)}$حيث $m\geq 1$ و$n\geq 3$.

انظر للشكل (1) يمثل $D_4^{(5)}$.

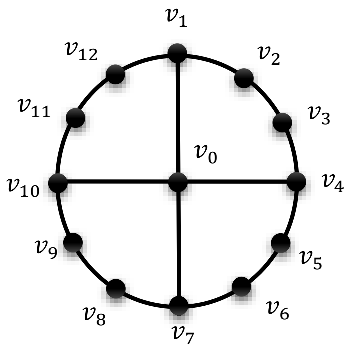


الشكل (1) يمثل $D_4^{(5)}$

تعريف 3 $[10]$: بيان جانجير $J_{n,m}$ حيث أن $m \geq 2,\ n \geq 2$ هو بيان بسيط ومترابط مؤلف من حلقة C_{nm} ورأس داخل تلك الحلقة وليكن v_0 يجاور m رأس من الحلقة تبتعد عن بعضها على تلك الحلقة بمقدار n.

وبالتالي عدد رؤوس الحلقة C_{nm} هو nm ومع الرأس الذي يقع في داخل تلك الحلقة يصبح بيان جانجير مؤلف من $nm + 1$ رأس و $m(n + 1)$ ضلع.

انظر للشكل (2) يمثل بيان جانجير $J_{3,4}$ حيث هنا $n = 3$ و $m = 4$، عدد الرؤوس هو 13 والرأس v_0 يجاور 4 رؤوس كل منها يبعد عن الآخر على تلك الحلقة بمقدار 3.



الشكل (2) يمثل $J_{3,4}$

دراسة مرجعية:

يُعتبر عالم الرياضيات السويسري (Leonhard Euler) في عام 1763 من وضع حجر الأساس لنظرية البيان بطرحه لمسألة الجسور السبعة في مدينة كونيغسبرغ، والتي تنص على: ((كيف يمكن الانطلاق من نقطة على اليابسة بحيث نسير على الجسور السبعة ثم نعود الى النقطة نفسها بدون أن نستخدم الجسر نفسه أكثر من مرة)).

وفي مطلع القرن العشرين شهدت نظرية البيان تطوراً كبيراً واستقطبت عدداً هائلاً من الباحثين وذلك لأهميتها الضخمة وإسهامها في تطور مختلف العلوم بتطبيقاتها الواسعة في الحياة العملية ولعلّ أهم تلك التطبيقات هو مفهوم السيطرة، وعلى الرغم من أن الدراسة الفعلية لمفهوم السيطرة في البيان بدأ حوالي عام 1960 إلا أن جذور السيطرة يعود إلى عام 1862 حيث درس (Carl Jaenisch) مشكلة إيجاد الحد الأدنى لعدد الوزراء المطلوب لتغطية رقعة شطرنج من القياس $n \times n$، بحيث تكون كل المربعات تحت السيطرة، وبشرط عدم وجود وزير يسيطر على الآخر.

في عام 2005 قام كل من (Boštjan Brešar, M.A.Henning and D.F Rall) بوضع تعريف السيطرة الطيفية من المرتبة K ليتابع كل من (Boštjan Brešar and Tadeja Kraner Šumenjakb) العمل على هذا المفهوم وقاموا بإيجاد عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 لكل من P_n و C_n على الشكل الآتي:

نظرية 1 $[2]$:

$$\gamma_{r2}\,(P_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$$

ومن أجل $n \geq 3$ لدينا :

$$\gamma_{r2}\,(C_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor.$$

أوجد عام 2009 كل من (Tong Chunling, Lin Xiaohui, Yang Yuansheng and Luo Meiqin) عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 لبيان بترسن $P(n,2)$ بالشكل التالي:

نظرية 2 $[12]$:

$$\gamma_{r2}\,(P(n,2)) = \begin{cases} \left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil, & n \equiv 0,3,4,9\ (mod\ 10); \\ \left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil + 1, & otherwise. \end{cases}$$

وفي نفس العام قام الباحث (Guangjun Xu) بإيجاد حد أعلى لبيان بترسن $P(n,3)$ كالتالي:

نظرية 3 $[13]$: من أجل $n \geq 13$ لدينا:

$$\gamma_{r2}\,(P(n,3)) \leq \begin{cases} n - \left\lfloor\frac{n}{8}\right\rfloor, & n \equiv 0,2,4,5,6,7,13,14,15\ (mod\ 16); \\ n - \left\lfloor\frac{n}{8}\right\rfloor + 1, & otherwise. \end{cases}$$

في عام 2021 تابع الباحثان (Rija Erveš and Janez Žerovnik) دراسة المسألة على بيان بترسن كما يلي:

نظرية 4 $[14]$: من أجل $k > 3$ عندئذ:

$$\gamma_{r2}\,(P(5k,k)) = \begin{cases} 4k, & k \equiv 2,8 (mod\ 10); \\ 4k+1, & k \equiv 5,9 (mod\ 10). \end{cases}$$

$$4k+1 \leq \gamma_{r2}\,(P(5k,k)) \leq \begin{cases} 4k+2, & k \equiv 1,6,7\ (mod\ 10); \\ 4k+3, & k \equiv 0,3,4\ (mod\ 10). \end{cases}$$

وعندما $k \leq 3$ نجد:

$$\gamma_{r2}\,(P(5,k)) = 5, \quad \gamma_{r2}\,(P(10,2)) = 10, \quad 13 \leq \gamma_{r2}\,(P(15,3)) \leq 14$$

أهمية البحث وأهدافه:

استحوذ مفهوم السيطرة على اهتمام الباحثين في نظرية البيان بشكل كبير وموسع دون سواه من باقي فروع نظرية البيان نظرا للأهمية التطبيقية له في الحياة اليومية حيث حوّلَتْ العديد من المسائل المطروحة إلى بيانات ليتم تقديم الحلول لها بإيجاد عدد السيطرة.

ومن أشهر التطبيقات الواقعية لنظرية السيطرة تقليص عدد المراكز اللازمة لخدمة قطاع معين وبالتالي تقليل الكلفة وعدم بناء مراكز تزيد عن الحد المطلوب، والمساهمة في حل بعض المشاكل التي ظهرت في بعض العلوم مثل: نظرية الترميز، الشبكات البيولوجية، بحوث العمليات، تحليل شبكات التواصل الاجتماعية وغيرها الكثير.

يهدف هذا البحث لإيجاد عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 لبيان طاحونة الهواء الهولندية $D_n^{(m)}$ في الحالة العامة من أجل $n > 4$ و $m \geq 2$ وعدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 لبيان $J_{n,m}$ في حالة $n = 2,3$.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على الاستفادة من مفهوم السيطرة الطيفية من الدرجة 2 على البيانات غير الموجهة والاعتماد على المعلومات الموجودة في المقالات [1, 2, 8, 9, 10, 11] بشكل أساسي.

النتائج والمناقشة وآلية العمل:

نقدم في هذا البحث ثلاث نظريات، الأولى لإيجاد عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 على بيان طاحونة الهواء الهولندية $D_n^{(m)}$ في الحالة العامة حيث أن العلاقة المعطاة تعطي عدد السيطرة لهذا البيان مهما تغيرت قيمتي nو m، وبالمثل الثانية لإيجاد عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 على بيان جانجير $J_{2,m}$ والثالثة على $J_{3,m}$ كما نقدم لكل نظرية تمهيديتين تفيدان في إثبات تلك النظرية حيث أن آلية العمل تتلخص كالتالي:

التمهيدية الأولى تعطي حد أعلى لعدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 وذلك بإيجاد توزيع لـ $2RDF$ على البيان المطلوب في الحالة العامة بحيث يكون لهذا التوزيع وزن أمثلي، وبما أن عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 هو أصغر وزن لتابع سيطرة طيفية على هذا البيان بالتالي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 أصغر أو يساوي هذا الوزن.

التمهيدية الثانية تهدف لبرهان أن أي وزن لتابع سيطرة طيفية من المرتبة 2 سواء كان يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 أو لا يعطي أكبر أو يساوي الوزن الذي وجدناه في التمهيدية الأولى (لا يوجد وزن أقل)، ويتم ذلك بمناقشة جميع الحالات الممكنة لأحد الرؤوس فنحصل في تلك الحالات إما على المطلوب أو على وزن أكبر من الوزن المطلوب وفي هذه الحالة يُرفض التوزيع لأننا نبحث عن الوزن الأصغري.

(ليس كل توزيع لتابع سيطرة طيفية من المرتبة 2 يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2).

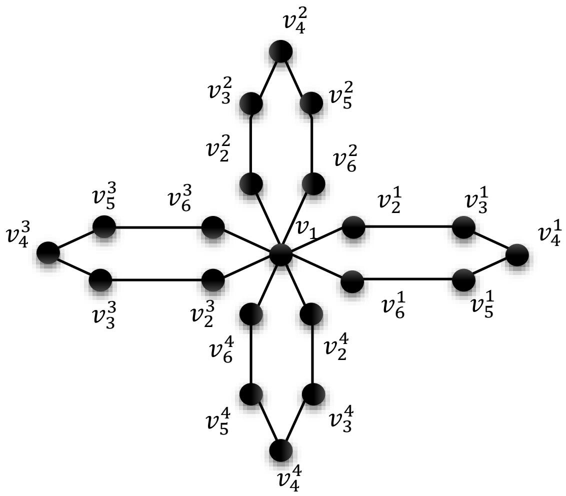
بعد ذلك من التمهيديتين يتم برهان المساواة.

ملاحظة:

في كل شكل سيتم التعبير عن المجموعات $\emptyset$، $\{1\}$، $\{2\}$، $\{1,2\}$ باللون الأبيض، الأزرق، الأحمر والأخضر بالترتيب، وبما أن عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 يساوي مجموع عدد الأرقام على الرؤوس فإن إيجاد هذا العدد من الشكل يتم بعد الرؤوس الملونة بالأحمر والأزرق مرة واحدة، الرؤوس الملونة بالأخضر مرتين، أما الرؤوس الملونة بالأبيض فلا تُعد.

1. عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 على بيان طاحونة الهواء الهولندية $D_n^{(m)}$:

سنسمي الرأس المشترك v_1 وبقية الرؤوس v_i^j حيث j تمثل رقم النسخة من C_n و i تمثل ترتيب ذلك الرأس في تلك النسخة، حيث أن الترتيب يتم مع حركة عقارب الساعة $2 \le i \le n$ و$2 \le j \le m$ (انظر للشكل (3) كمثال).



الشكل (3) يمثل ترتيب تسمية الرؤوس على D_6^4

تمهيدية 1.1: من أجل $n > 4$، و $m \geq 2$ لدينا:

$$\gamma_{r2}\left(D_n^{(m)}\right) \leq \begin{cases} m\left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor + 1: & n \equiv 0, 1, 3 \ (mod\ 4), \\ m\left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor + 2: & n \equiv 2 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

البرهان: سنعبر عن تابع 2RDF على $D_n^{(m)}$ بالشكل:

$$f(v_1|\ v_2^t, v_3^t, v_4^t, \dots, v_n^t\ ) = f(v_1)|f(v_2^t)f(v_3^t)f(v_4^t) \dots f(v_n^t).$$

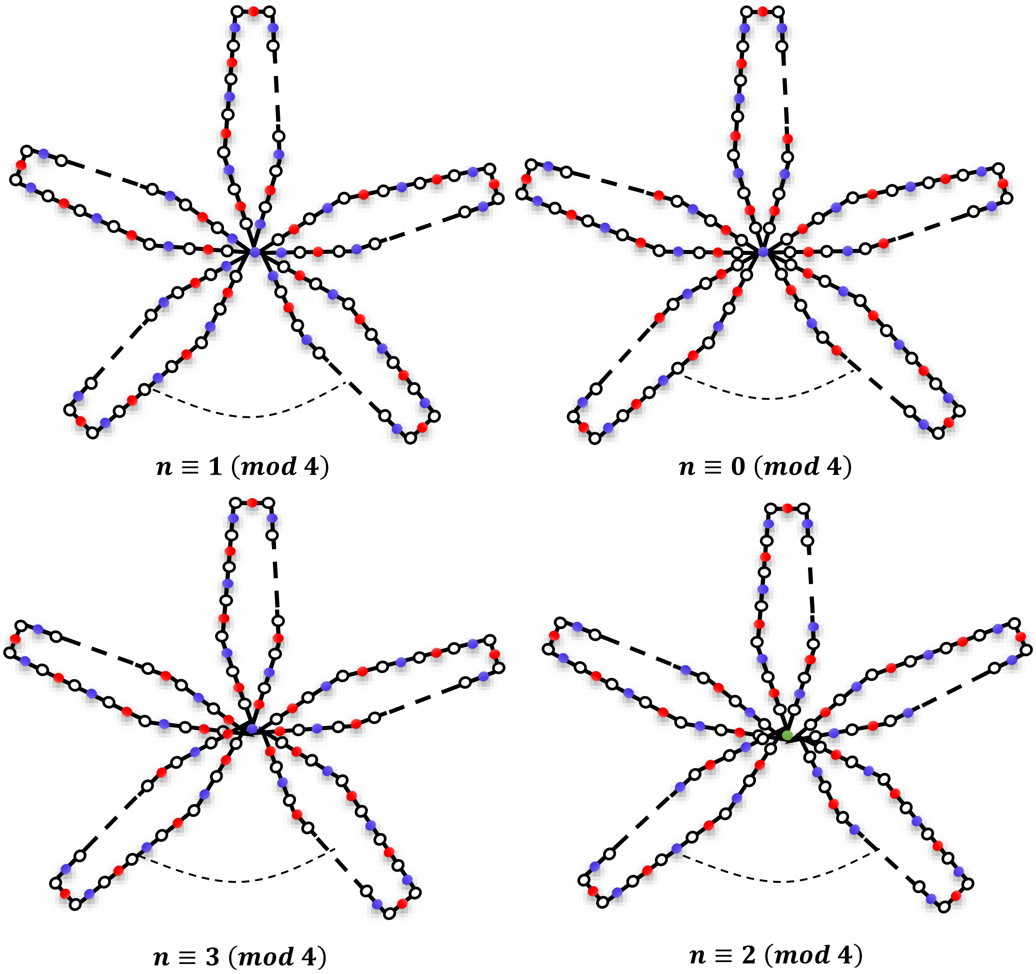
أيا يكن العدد الصحيح t الذي يحقق $1 \leq t \leq m$ (أي يتم تطبيق نفس التوزيع على جميع الحلقات).

وسنعرفه بالشكل التالي:

$$f(v_1|\ v_2^t, v_3^t, v_4^t, v_5^t, \dots, v_n^t\ ) = \begin{cases} 1|0201 \dots 0201020: & n \equiv 0 \ (mod\ 4), \\ 1|0201 \dots 0201: & n \equiv 1 \ (mod\ 4), \\ 3|0201 \dots 02010: & n \equiv 2 \ (mod\ 4), \\ 1|0201 \dots 0202102: & n \equiv 3 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

الأرقام $0, 1, 2, 3$ تمثل المجموعات $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$.

انظر للشكل (4) الذي يمثل توزيع التابع f على البيان $D_n^{(m)}$ في كل من الحالات السابقة.



الشكل (4) يمثل توزيع تابع 2RDF في جميع الحالات الممكنة

نلاحظ أن التوزيع السابق هو التوزيع الأمثل وأي توزيع آخر إما له نفس الوزن أو أكبر.

وبما أن f تابع 2RDF على $D_n^{(m)}$ مع تابع وزن يحقق:

$$w(f)=\begin{cases} m\left\lceil \frac{n-1}{2}\right\rceil+1: & n\equiv 0,1,3\ (mod\ 4),\\ m\left\lceil \frac{n-1}{2}\right\rceil+2: & n\equiv 2\ (mod\ 4).\end{cases}$$

بالتالي

$$\gamma_{r2}\left(D_n^{(m)}\right)\le\begin{cases} m\left\lceil \frac{n-1}{2}\right\rceil+1: & n\equiv 0,1,3\ (mod\ 4),\\ m\left\lceil \frac{n-1}{2}\right\rceil+2: & n\equiv 2\ (mod\ 4).\end{cases}\quad\blacksquare$$

تمهيدية 2.1 : من أجل $n>4$، و $m\ge 2$ لدينا:

$$\gamma_{r2}\left(D_n^{(m)}\right)\ge\begin{cases} m\left\lceil \frac{n-1}{2}\right\rceil+1: & n\equiv 0,1,3\ (mod\ 4),\\ m\left\lceil \frac{n-1}{2}\right\rceil+2: & n\equiv 2\ (mod\ 4).\end{cases}$$

البرهان:

حالة 1 : $f(v_1)=0$ و $m\geq 2$ بالتالي لدينا m نسخة من C_n مع عدم وجود أي رقم مشترك بين الحلقات بالتالي:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq m\gamma_{r2}\,(C_n) \\ &\geq m\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right) \end{aligned}$$

حالة 1.1 : إذا كان $n\equiv 0\ (mod\ 4)$ عندئذ n عدد زوجي و $\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor=0$ بالتالي:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq m\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) \\ &\geq m\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)=m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+m \\ &> m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.1 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

حالة 2.1 : إذا كان $n\equiv 2\ (mod\ 4)$ عندئذ n عدد زوجي و $\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor=1$ بالتالي:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq m\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)=m\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+m=m\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)+m \\ &\geq m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+2m \\ &\geq m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+4 \\ &> m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+2. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.1 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

حالة 3.1 : $n\equiv 1,3\ (mod\ 4)$ عندئذ n عدد فردي $\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor=1$ بالتالي:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq m\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+m=m\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil+m \\ &\geq m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+2 \\ &> m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.1 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

حالة 2 : $f(v_1)=1$ (بشكل مشابه عندما $f(v_1)=2$).

عندئذ يوجد رقم مشترك مع جميع النسخ لـ C_n فيصبح لدينا:

$$w(f)\quad \geq m(\gamma_{r2}\,(C_n)-1)+1$$

حالة 1.2 : $n \equiv 0 \ (mod\ 4)$ عندئذ:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq m\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1\right) + 1 \\ &\geq m\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

ونعلم أنه إذا كان k عدد صحيح فردي عندئذ $\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor$ بالتالي:

$$w(f) \geq m\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor + 1.$$

حالة 2.2 : $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$ عندئذ:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq m\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1 - 1\right) + 1 \\ &\geq m\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + 1\right) + 1 = m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + m + 1 \\ &\geq m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + 3 \\ &> m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + 2. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.1 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

حالة 3.2 : $n \equiv 1, 3 \ (mod\ 4)$ عندئذ:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq m\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + m - m + 1 = m\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1 \\ &\geq m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

حالة 3 : $f(v_1) = 3$ هنا يكون لدينا من أجل $t \in \{1, 2, \dots, m\}$ يكون $f(v_2^t) = f(v_n^t) =$ 0والرؤوس $v_3^t, v_4^t, v_5^t, \dots, v_{n-1}^t$ تشكل مسار محدث بالرؤوس في كل نسخة، فيصبح لدينا:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq m\gamma_{r2}\,(P_{n-3}) + 2 \\ &\geq m\left(\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor + 1\right) + 2 \\ &\geq m\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor - 1 + 1\right) + 2 \\ &\geq m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + 2. \end{aligned}$$

في حالة $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$ يتم المطلوب وفي حالة $n \equiv 0, 1, 3 \ (mod\ 4)$ نجد أن:

$$w(f) > m\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + 1.$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.1 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع. ■

نظرية 1.1 : من أجل $n > 4$ و $m \geq 2$ عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 لبيان $D_n^{(m)}$ يعطى بالعلاقة:

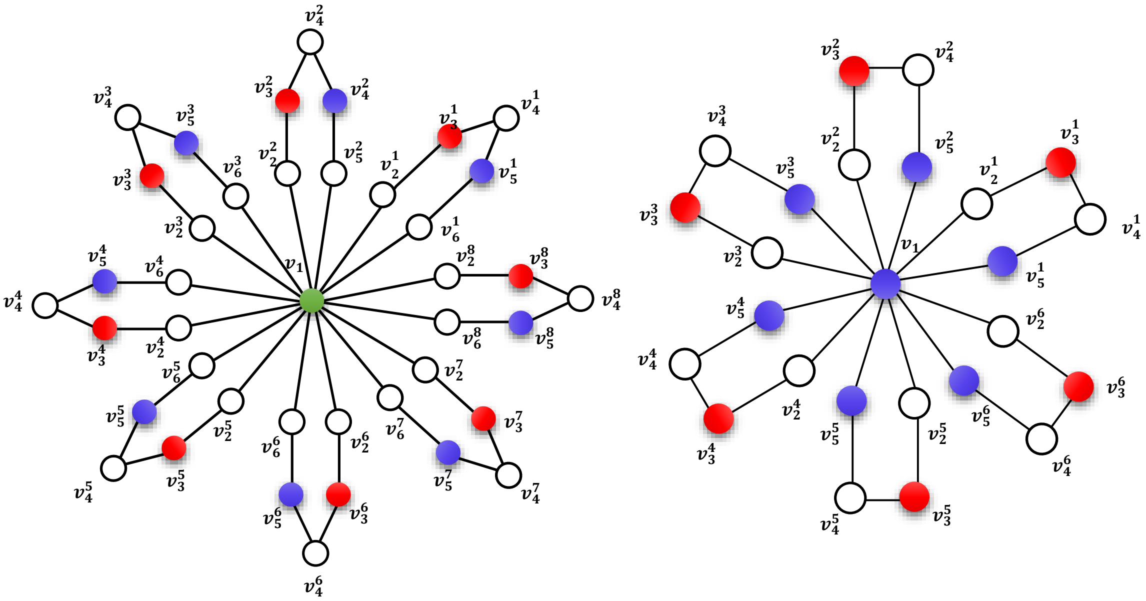
$$\gamma_{r2}\left(D_n^{(m)}\right) = \begin{cases} m\left\lceil\dfrac{n-1}{2}\right\rceil + 1: & n \equiv 0, 1, 3 \ (mod\ 4), \\ m\left\lceil\dfrac{n-1}{2}\right\rceil + 2: & n \equiv 2 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

البرهان: من التمهيدية 1.1 والتمهيدية 2.1 يتم المطلوب. ■

أمثلة: إذا أردنا إيجاد عدد السيطرة الطيفية للبيان $D_5^{(6)}$ فيتم تطبيق العلاقة في النظرية 1.1 حيث $n = 5$ و $m = 6$ كالتالي: $\gamma_{r2}\left(D_5^{(6)}\right) = 6\left\lceil\frac{5-1}{2}\right\rceil + 1 = 13$.

وللبيان $D_6^{(8)}$ يكون: $\gamma_{r2}\left(D_6^{(8)}\right) = 8\left\lceil\frac{6-1}{2}\right\rceil + 2 = 18$.

انظر للشكل (5) الذي يمثل تطبيق تابع 2RDF يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 على هذين البيانين.



الشكل (5) يمثل تطبيق 2RDF على $D_5^{(6)}$ و $D_6^{(8)}$

2. عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 على بيان جانجير $J_{n,m}$:

سنسمي v_0 الرأس الذي درجته m وأحد مجاوراته v_1 ثم نتابع تسمية الرؤوس v_i باتجاه عقارب الساعة حيث $1 < i \leq nm$، أيضا نلاحظ وجود m حلقة C_{n+2} محدثة بالرؤوس سنسميها $\acute{C}_{n+2}$، كمثال انظر للشكل (2).

1.2. عندما $n = 2$:

تمهيدية 1.2: من أجل $m \geq 3$ لدينا:

$$\gamma_{r2}\left(J_{2,m}\right) \leq \begin{cases} m: & \text{عدد زوجي } m, \\ m+1: & \text{عدد فردي } m. \end{cases}$$

البرهان: سنعبر عن تابع 2RDF بالشكل:

$$f(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2m}) = f(v_0)f(v_1)f(v_2)\dots f(v_{2m}).$$

وسنعرف على $J_{2,m}$ تابع 2RDF التالي:

$$f(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2m}) = \begin{cases} 010201020\dots1020: & \text{عدد زوجي } m, \\ 01020102\dots102011: & \text{عدد فردي } m. \end{cases}$$

حيث الأرقام $0, 1, 2, 3$ تمثل المجموعات $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$.

نلاحظ أن التوزيع السابق هو التوزيع الأمثل وأي توزيع آخر إما له نفس الوزن أو أكبر.

وبما أن f تابع 2RDF على $J_{2,m}$ مع تابع وزن يحقق:

$$w(f) = \begin{cases} m: & \text{عدد زوجي } m, \\ m+1: & \text{عدد فردي } m. \end{cases}$$

بالتالي

$$\gamma_{r2}\left(J_{2,m}\right) \le \begin{cases} m: & \text{عدد زوجي } m, \\ m+1: & \text{عدد فردي } m. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

تمهيدية 2.2 : من أجل $m \ge 3$ لدينا:

$$\gamma_{r2}\left(J_{2,m}\right) \ge \begin{cases} m: & \text{عدد زوجي } m, \\ m+1: & \text{عدد فردي } m. \end{cases}$$

البرهان:

حالة 1 : $f(v_0) = 3$ في هذه الحالة أيا يكن الرأس u من مجاورات الرأس v_0 فإن $f(u) = 0$، وفي كل حلقة محدثة بالرؤوس $\acute{C}_4$ يوجد رأس v_k لا يجاور v_0 يتصل مع الرأسين v_{k+1}, v_{k-1} الذين يحققان:

$f(v_{k-1}) = f(v_{k+1}) = 0$ وهذا ما يجبر ذلك الرأس أن يكون إما $f(v_k) = 1$ أو $f(v_k) = 2$ وإلا يخالف تعريف 2RDF ليصبح لدينا:

$$\begin{aligned} w(f) &\ge m+2 \\ &> m+1. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

حالة 2 : $f(v_0) = 1$(بشكل مشابه عندما $f(v_0) = 2$).

هنا أياً كان v_k من مجاورات v_0 فإن $|f(v_{k-1})| + |f(v_k)| + |f(v_{k+1})| \ge 1$ وإلا يخالف تعريف 2RDF، فإذا كان $f(v_1) = 0$ عندئذ إما $f(v_2) = 2$ و $f(v_{2m}) = 0$ أو $f(v_{2m}) = 2$ و $f(v_2) = 0$(وإلا يخالف تعريف 2RDF) وبسبب التناظر لنفرض أن $f(v_2) = 2$، وهذا ما يجعل $f(v_3) = 0$ ولنلاحظ أن ذلك يتكرر في الحلقة $\acute{C}_4$ التي تليها وبالمتابعة نجد أن $w(f) = m+1$ ففي

حالة m فردي يتم المطلوب، أما في حالة m زوجي يصبح لدينا $w(f) \geq m+1 > m$ وهذا وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

وإذا كان $f(v_1) = 1$ فإن $f(v_2) = 0$ وهذا ما يجبر $f(v_3) = 2$ وبالمتابعة بنفس الطريقة نجد أن:

$$\begin{cases} f(v_j) = 0 : j = 4i, 4i+2, \\ f(v_j) = 1 : j = 4i+1, \\ f(v_j) = 2 : j = 4i+3. \end{cases}$$

ويكون في حالة m زوجي: $w(f) \geq \gamma_{r2}\,(C_{2m}) + 1 = \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor + 1 = m+1 > m$ وهذا وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

وإذا كان m فردي فإن $f(v_{2m-1}) = 1$ وإلا يخالف تعريف 2RDF ويكون:

$$w(f) \geq \gamma_{r2}\,(C_{2m}) + 1 = \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor + 1 + 1 = m+2 > m+1$$

وهذا وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

حالة 3 : $f(v_0) = 0$ وهنا إما أحد مجاورات v_0 وليكن u يحقق $f(u) = 3$ أو يوجد رأسين u, v من مجاورات v_0 يحققان إما $f(u) = 1$ و $f(v) = 2$ أو العكس.

فإذا كان $f(v_1) = 3$ فإن $f(v_{2m}) = f(v_2) = 0$ ونحصل على مسار P_{2m-3} محدث بالرؤوس ليصبح لدينا:

$$w(f) \geq \gamma_{r2}\,(P_{2m-3}) + 2 = \left\lceil \frac{2m-3}{2} \right\rceil + 1 + 2 = m - 1 + 1 + 2 = m+2 > m+1$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 1.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

وإذا كان $f(v_1) = 1$ بالتالي فإن $f(v_2) = 0$ وهذا ما يجبر $f(v_3) = 2$ ليصبح v_0 يحقق تعريف 2RDF، وبالمتابعة بنفس الطريقة نجد أن

$$\begin{cases} f(v_j) = 0 : j = 4i, 4i+2, \\ f(v_j) = 1 : j = 4i+1, \\ f(v_j) = 2 : j = 4i+3. \end{cases}$$

ويكون في حالة m زوجي: $w(f) \geq \gamma_{r2}\,(C_{2m}) = \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor = m$،

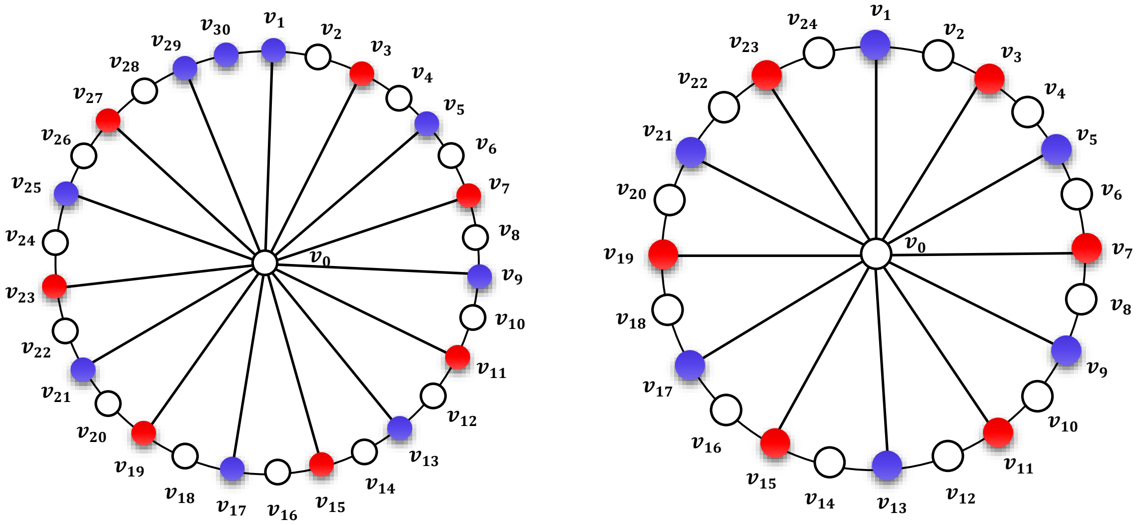
وفي حالة m فردي: $w(f) \geq \gamma_{r2}\,(C_{2m}) = \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor + 1 = m+1$ وهو المطلوب. ■

نظرية 1.2: من أجل $m \geq 3$ عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 لبيان $J_{2,m}$ يعطى بالعلاقة:

$$\gamma_{r2}\left(J_{2,m}\right) = \begin{cases} m: & \text{عدد زوجي } m, \\ m+1: & \text{عدد فردي } m. \end{cases}$$

البرهان: من التمهيدية 1.2 والتمهيدية 2.2 يتم المطلوب. ∎

أمثلة: $\gamma_{r2}\left(J_{2,12}\right)=12$ ،$\gamma_{r2}\left(J_{2,15}\right)=15+1=16$ ،انظر للشكل (6) للتوضيح.



الشكل (6) يمثل تطبيق 2RDF على $J_{2,12}$ و $J_{2,15}$

2.2. عندما $n=3$:

تمهيدية 3.2: من أجل $m\geq 3$ لدينا:

$$\gamma_{r2}\left(J_{3,m}\right)\leq\begin{cases}\left\lceil\dfrac{3m}{2}\right\rceil: & m\equiv 0\ (mod\ 4),\\ \left\lceil\dfrac{3m}{2}\right\rceil+1: & m\equiv 1,2,3\ (mod\ 4).\end{cases}$$

البرهان: سنعبر عن تابع 2RDF بالشكل:

$$f(v_0,v_1,v_2,\dots,v_{2m})=f(v_0)f(v_1)f(v_2)\dots f(v_{2m}).$$

$$f(v_0,v_1,v_2,\dots,v_{2m})=\begin{cases}010201020\dots 1020: & m\equiv 0\ (mod\ 4),\\ 01020102\dots 1020102: & m\equiv 1\ (mod\ 4),\\ 010201020\dots 102011: & m\equiv 2\ (mod\ 4),\\ 010201020\dots 10201: & m\equiv 3\ (mod\ 4).\end{cases}$$

حيث الأرقام $0,1,2,3$ تمثل المجموعات $\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}$.

نلاحظ أن التوزيع السابق هو التوزيع الأمثل وأي توزيع آخر إما له نفس الوزن أو أكبر.

وبما أن f تابع 2RDF على $J_{3,m}$ مع تابع وزن يحقق:

$$w(f)=\begin{cases}\left\lceil\dfrac{3m}{2}\right\rceil: & m\equiv 0\ (mod\ 4),\\ \left\lceil\dfrac{3m}{2}\right\rceil+1: & m\equiv 1,2,3\ (mod\ 4).\end{cases}$$

بالتالي

$$\gamma_{r2}\left(J_{3,m}\right) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor: & m \equiv 0 \ (mod\ 4), \\ \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 1: & m \equiv 1,2,3 \ (mod\ 4). \end{cases} \quad \blacksquare$$

تمهيدية 4.2: من أجل $m \geq 3$ لدينا:

$$\gamma_{r2}\left(J_{3,m}\right) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor: & m \equiv 0 \ (mod\ 4), \\ \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 1: & m \equiv 1,2,3 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

البرهان:

حالة 1 : $f(v_0) = 3$، في هذه الحالة أيا يكن u من مجاورات v_0 فإن $f(u) = 0$، وفي كل حلقة محدثة بالرؤوس $\acute{C}_5$ يوجد رأسين v, w لا يجاوران v_0 ويجاوران رأسين لهما الرقم 0، بالتالي $|f(v)| + |f(w)| = 2$ وإلا يخالف تعريف 2RDF، فأصبح لدينا:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq 2m + 2 \\ &\geq m + m + 2 \\ &> m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 3.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

حالة 2 : $f(v_0) = 1$ (مشابهة لحالة $f(v_0) = 2$)، إذا كان $f(v_1) = 0$ بالتالي $f(v_2) = 2$ ليصبح $f(v_3) = 0$ وبدوره يجعل $f(v_4) = 1$ وبالمتابعة بنفس الطريقة نجد أن في كل حلقة $\acute{C}_5$ يوجد ثلاثة أرقام رقم على v_0 ورقم على أحد الرأسين الذين لا يجاوران v_0 ورقم مشترك بين حلقتين $\acute{C}_5$ متجاورتين، لنلاحظ أن الرأس v_0 لم يؤثر على توزيع الأرقام على الحلقة بالتالي $w(f) \geq \gamma_{r2}\left(C_{3m}\right) + 1$ وفي حالة $m \equiv 0 \ (mod\ 4)$:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 1 \\ &> \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 3.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

وفي حالة $m \equiv 1,2,3 \ (mod\ 4)$:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 1 + 1 = \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 2 \\ &> \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 3.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

وإذا كان $f(v_1) = 1$ نعود للحالة السابقة بمناقشة الرأس v_4 بدلاً من v_1.

إذا كان $f(v_1) = 3$ بالتالي $f(v_2) = f(v_{2m}) = 0$ ويكون:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq \gamma_{r2}\left(P_{3m-3}\right) + 2 + 1 \\ &\geq \left\lceil \frac{3m-3}{2} \right\rceil + 1 + 3 \\ &\geq \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil + 3 > \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil + 1. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 3.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

حالة 3 : $f(v_0) = 0$ بالتالي v_0 يجبر إما أحد مجاوراته وليكن v_1 يحقق $f(v_1) = 3$ بالتالي $f(v_2) = f(v_{2m}) = 0$، ويكون:

$$\begin{aligned} w(f) &\geq \gamma_{r2}\left(P_{3m-3}\right) + 2 \\ &\geq \left\lceil \frac{3m-3}{2} \right\rceil + 1 + 2 \\ &\geq \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil + 2 > \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil + 1. \end{aligned}$$

وزن أكبر تماماً من الوزن الذي وجدناه في تمهيدية 3.2 فلا يعطي عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 ويرفض التوزيع.

أو أن يكون له مجاورين v, u يحققان إما $f(u) = 1$ و $f(v) = 2$ أو العكس.

لنفرض أن $f(v_1) = 1$ ليتبع ذلك أن $f(v_2) = 0$ ثم $f(v_3) = 2$ وهكذا بالمتابعة نجد أن v_0 لا يؤثر على الحلقة ويحقق تعريف 2RDF بالتالي: $w(f) \geq \gamma_{r2}\left(C_{3m}\right)$ وفي حالة $m \equiv 0 \ (mod\ 4)$ يكون $w(f) \geq \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil$ وفي حالة $m \equiv 1, 2, 3 \ (mod\ 4)$ لدينا $w(f) \geq \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil + 1$ وهو المطلوب.

■

نظرية 2.2 : من أجل $m \geq 3$ عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 للبيان $J_{3,m}$ يعطى بالعلاقة:

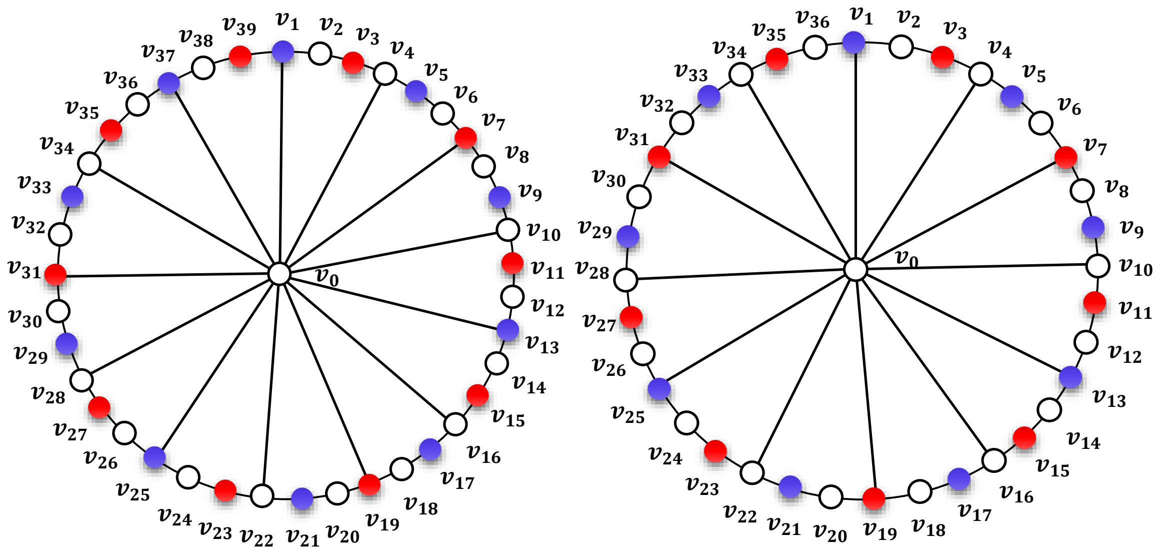
$$\gamma_{r2}\left(J_{3,m}\right) = \begin{cases} \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil : & m \equiv 0 \ (mod\ 4), \\ \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil + 1 : & m \equiv 1, 2, 3 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

البرهان:

من التمهيدية 3.2 والتمهيدية 4.2 يتم المطلوب. ■

أمثلة: $\gamma_{r2}\left(J_{3,12}\right) = \left\lfloor\frac{3\times12}{2}\right\rfloor = 18$، $\gamma_{r2}\left(J_{3,13}\right) = \left\lfloor\frac{3\times13}{2}\right\rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$.

انظر للشكل (7) للتوضيح.



الشكل (7) يمثل تطبيق 2RDF على $J_{3,12}$ و $J_{3,13}$

الاستنتاجات والتوصيات:

تم إيجاد عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 لبيان طاحونة الهواء الهولندية ويمكن الاستفادة من تلك النتيجة في إيجاد كل من عدد السيطرة الطيفية الأعظمية من المرتبة 2، عدد السيطرة الطيفية المقيدة من المرتبة 2 وعدد السيطرة الطيفية الكلية من المرتبة 2 لهذا البيان، وأيضاً تم إيجاد عدد السيطرة الطيفية لبيان جانجير $J_{2,m}$ و $J_{3,m}$ أياً يكن العدد الصحيح $m \geq 3$، وسنعمل على إيجاد عدد السيطرة الطيفية من المرتبة 2 لبيان جانجير من أجل القيم $n > 3$، ومحاولة تعميم النتيجة على أي قيمة لـِ n.

References:

[1] BREŠAR, B., HENNING, M. A. AND RALL, D. F. *Paired-domination of Cartesian products of graphs and rainbow domination*. Electron. Notes Discrete Math. 22 (2005), 233-237.
[2] BREŠAR, B. AND SUMENJAK, T. K. *On the 2-rainbow domination in graphs,* Discrete Appl. Math. 155 (2007), 2394-2400.
[3] CHUNLING, T., XIAOHUI, L., YUANSHENG, Y. AND MEIQIN, L. *2-rainbow domination of generalized Petersen graphs P(n, 2).* Discrete Appl. Math. 157 (2009), 1932-1937.
[4] ERVEŠ, R. AND ŽEROVNIK, J. *On 2-Rainbow Domination Number of Generalized Petersen Graphs P(5k, k).* Symmetry. 13, 809 (2021).
[5] Stepién, Z. And Zwierzchowski, M. *2-rainbow domination number of Cartesian products: Cn □ C3 and Cn □ C5*. J. Comb. Optim. 28 (2014), 748–755.

[6] STEPIÉN, Z., SZYMASZKIEWICZ, A. AND SZYMASZKIEWICZ, L. *2-Rainbow domination number of Cn □ C5*. Discrete Appl. Math. 170 (2014), 113–116.
[7] MOJDEH, D. A. AND MANSOURI, Z. *Rainbow domination of graphs.* International Conference on Combinatorics, Cryptography and Computation. I4C, (2018).
[٨] SHAHEEN, R., MAHFUD, S. AND ADRAH, M. F. *2-Rainbow domination number of circulant graphs* $C(\,n;\{1,4\}\,)$. Journal of applied mathematics, (2022), (submitted).
[9] KANNA, M., KUMAR, R. AND JAGADEESH, R. *Computation of Topological Indices of Dutch Windmill Graph*. Open Journal of Discrete Mathematics, 6, (2016), 74-81.
[10] Mojdeh, D.A. and Ghameshlou, A.N. *Domination in Jahangir Graph* $J_{2,m}$. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 2, (2007), 1193-1199.
[11] SHAHEEN, R., Assaad, M. AND Kassem, A. *Domination and Eternal Domination of Jahangir Graph*, Open Journal of Discrete Mathematics, 9, (2019), 68-81.
[12] CHUNLING, T., XIAOHUI, L., YUANSHENG, Y. AND MEIQIN, L. *2-rainbow domination of generalized Petersen graphs* $P(n,2)$, Discrete Appl. Math. 157 (2009), 1932-1937.
[13] XU, G. *2-rainbow domination in generalized Petersen graphs* $P(n,3)$. Discrete Appl. Math. 157 (2009) 2570-2573.
[14] ERVEŠ, R. AND ŽEROVNIK, J. *On 2-Rainbow Domination Number of Generalized Petersen Graphs* $P(5k,k)$. Symmetry. 13, 809 (2021).