مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (3) 2023
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (3) 2023

نظام ديناميكي متخامد لمعادلة شرودنغر غير الناقصية

منال ناصر حسين*

(تاريخ الإيداع ٧/ 8/ 2023 – تاريخ النشر 9/ 11/ 2023)

□ ملخّص □

ندرس معادلة شرودنغر المتخامدة غير الخطية ثنائية البعد والمزودة بتابع قوة، في الحالة غير الناقصية. نبرهن أنه من أجل معطيات ابتدائية صغيرة بالقدر الكافي فإن المعادلة المذكورة تعّرف نصف زمرة تملك مجموعة محدودة ماصة.

الكلمات المفتاحية: معادلة شرودنغر غير الناقصية، النظام الديناميكي، المجموعة الماصة.

* مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (3) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (3) 2023

Dissipative dynamical system for non elliptic Schrödinger equation

Dr. Manal Nasser Hussein*

(Received 7/8/2023.Accepted 9/11/2023)

□ABSTRACT □

We consider a subcritical forced damped 2D Nonlinear Schrödinger equation in the non elliptic case NES. We prove that if the initial data is small enough, NES define a semigroup with bounded absorbing set.

Keywords: Non Elliptic Schrödinger Equation, dynamical system, absorbing set.

* Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University.

مقدّمة:

تعد معادلة شرودنغر من أهم المعادلات التفاضلية الجزئية، حيث تملك تطبيقات واسعة في كثير من المجالات و تظهر في سياق الأمواج المائية $[13,6]$ ، وفي فيزياء البلازما $[14]$ ، ونبضات الليزر القصيرة جدا $[16]$، وغيرها الكثير $[21,19]$.

تكتب معادلة شرودنغر غير الناقصية بالشكل:

$$u_t + iu_{xx} - iu_{yy} + ig(|u|^2)u = 0 \tag{1}$$

حيث $u(\mathrm{t,x,y})$ تمثل السعة العقدية و g تابع كثيرة حدود حيث $\mathrm{g}(0) = 0$.

في هذا العمل سوف نهتم بدراسة سلوك حلول معادلة متخامدة مزودة بحد قوة خارجية هي معادلة شرودنغر غير الناقصية NES في حالة $g(|u|^2)u = |u|u$، والتي تكتب بالشكل

$$u_t + \gamma u + iu_{xx} - iu_{yy} + i|u|u = f \tag{2}$$

حيث $f(x)$ قوة خارجية مستقلة عن t وتنتمي إلى $H^1(\mathbb{R}^2)$ و $\gamma > 0$ معامل التخامد، بالإضافة إلى كون نظيم f في $L^2(\mathbb{R}^2)$ صغير بقدر كافي.

تشكل هذه المعادلة مع حد التخامد وحد القوة الخارجية نظام ديناميكي غير منتهي الأبعاد كما في السياق المذكور في $[17,11,15,13]$.

شغلت معادلة شرودنغر اهتمام العديد من الباحثين، حيث درسوا مسألة الجاذب الشامل وذلك بعد دراسة وجود المجموعة الماصة والتي تعتبر دراسة وجودها في الحالات المدروسة سابقاً بديهية، أي في حالة معادلة شرودنغر الناقصية NLS مع مؤثر لابلاس، إذ أثبت Ghidaglia في العام 1988 وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنغر بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة في $H^1(\mathbb{R})$ في [5]، ثم في العام ١٩٩٥ أثبت Wang أن هذا الجاذب الضعيف هو جاذب قوي في [18]، وفي [1] أثبتت Akroun عام 1999 وجود جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R})$ وفي العام 2009 أثبت Hussein وGoubet أن النظام Davey–Stewartson الذي هو تعميم لمعادلة شرودنغر يملك جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R})$ في [9] وأيضاً في عام 2009 درسوا معادلة Davey–Stewartsonالمقطعة بالنسبة للزمن باستخدام صيغة الاسترخاء (relaxation scheme) وبرهنوا وجود جاذب شامل للنظام الديناميكي الناتج في [8] وأيضاً في العام نفسه أثبت Molinet و Goubet في [10] أن تدفق معادلة شرودنغر غير الخطية المتخامدة بضعف يوفر نظام ديناميكي يملك جاذب شامل في $L^2(\mathbb{R})$، وفي عام 2014 درس Alounini وGoubet سلوك حلول معادلة شرودنغر غير المتخامدة مع حد كموني تربيعي في [2]، وفي عام 2016 اثبت Zhu في [20] وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنغر مع وجود حد تكاملي غير محلي في $H^1(\mathbb{R})$ وفي العام نفسه درس Dabaa وGoubet في [4] سلوك حلول معادلة شرودنغر– بواسون في $\mathbb{R}^3$. ومن الجدير بالذكر أن دراسة مسألة وجود الجاذب الشامل، والتي تعطي تنبؤ عن سلوك النظام الديناميكي، تتم بعد دراسة وجود المجموعة الماصة التي يعتبر وجودها اثباتاً أن النظام الديناميكي متخامد، ووجود المجموعة الماصة في الحالات المذكورة سابقاً كان بديهياً، أما في الحالة غير الناقصية NESفلايوجد نتائج في هذا السياق كون الطرق المتبعة يصعب تطبيقها في هذه الحالة. ولكن دراسة مسألة كوشي المحلية تشبه دراسة المسألة الناقصية مع حد غير خطي تكعيبي [12، 1] بينما لايمكن معرفة فيما

اذا كان هذا الحل سوف ينفجر في زمن منتهي. لذلك سوف ندرس هنا مسألة وجود المجموعة الماصة لنعرف فيما إذا كان النظام الديناميكي متخامد أم لا وذلك وفقاً لتعريف النظام الديناميكي المتخامد المذكور في [17].

أهمّية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث في التنبؤ بسلوك النظام الديناميكي لمعادلة شرودنغرغير الناقصية وما لذلك من أهمية في التطبيقات الفيزيائية، ويهدف هذا البحث إلى دراسة سلوك هذا النظام من خلال المجموعة الماصة.

طرائق البحث وموادّه:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد بشكل أساسي على طرائق دراسة حلول المعادلة التفاضلية الجزئية من خلال تطبيقات التحليل الدالي. نبحث عن وجود المجموعة الماصة، والصعوبة هنا تأتي كوننا نتعامل مع مؤثر غير ناقصي، ولكن نتجاوز الصعوبة بأخذ معطيات ابتدائية صغيرة بالقدر الكافي، بالإضافة إلى التعامل مع شكل ديوهامل لهذه المعادلة.

النتائج والمناقشة:

بدايةً نذكر بمتراجحة ستريكارز (**Strichartz Inequalities**) في فضاءات محلية سنستخدمها لاحقاً، وبعدها نبرهن وجود مجموعة ماصة في $H^1(\mathbb{R}^2)$.

١. متراجحات ستريكارتز المحلية (**Localized Strichartz Inequalities**):

نعلم من [6, 7] أن متراجحات ستريكارتز تبقى محققة من أجل معادلة شرودنغر غير الناقصية الخطية، أي من أجل $\mathrm{e}^{-\mathrm{it}(\partial_{\mathrm{x}^2}-\partial_{y^2})}u_0$ الذي يمثل حل للمعادلة $u_t+iu_{xx}-iu_{yy}=0$ مع شرط ابتدائي u_0 .
حيث أننا نعلم أنه يوجد ثابت c_{str} من أجل كل u_0 من $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ يحقق

$$|U(t)u_0|_{L^4}\le\ c_{\mathrm{str}}\,|u_0|_{L^2}\quad\text{حيث}\quad U(t)=\ \mathrm{e}^{-\mathrm{it}(\partial_{\mathrm{x}^2}-\partial_{y^2})}\ .$$

نعرض الآن نتيجة أساسية وهي الشكل المحلي من المتراجحة السابقة، ومن أجل هذا الغرض نعرف، من أجل $T>0$ عدد معطى، نصف النظيم $|\emptyset|_{\mathrm{L}^4_{\mathrm{T}}}=\left(\int_0^{\mathrm{T}}|\emptyset(\mathrm{s})|^4\,\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{4}}$
نبرهن الآن التمهيدية التالية:

تمهيدية 1: من أجل كل u_0 من $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$، و $T>0$ عدد معطى، و f من $\mathrm{L}^{\frac{4}{3}}_{\mathrm{T}}$ فإن:

$$|U(t)u_0|_{L^4_{T,x,y}}\le\ c_{\mathrm{str}}\,|u_0|_{L^2_{x,y}}\tag{3}$$

$$\left|\int_0^T U(t-s)f(s)ds\right|_{L^4_{T,x,y}}\le\ c_{\mathrm{str}}\,|f|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x,y}}\tag{4}$$

الإثبات:

لإثبات المتراجحة (3) نستخدم متراجحة ستريكارتز (راجع [6, 7])، حيث نجد بسهولة أن

$$|\mathrm{U(t)u_0}|_{\mathrm{L}^4_{\mathrm{T},x,y}}\le|\mathrm{U(t)u_0}|_{\mathrm{L}^4_{x,y}(\mathbb{R}^3)}\le\ \mathrm{c_{str}}\,|\mathrm{u_0}|_{\mathrm{L}^2_{x,y}}$$

ولإثبات المتراجحة (4) نستخدم الدالة المميزة $\chi_{[0,T]}$ وبالاستفادة مرة أخرى من متراجحة ستريكارتز نجد

$$\int_0^T U(t-s)f(s)ds=\int_{\mathbb{R}}U(t-s)\left(\chi_{[0,T]}(\mathrm{s})\ \ f(s)\right)ds$$

$$\left\| \int_0^T U(t-s)f(s)ds \right\|_{L^4_{T,x,y}} = \left\| \int_{\mathbb{R}} U(t-s)\left(\chi_{[0,T]}(s)\ \ f(s)\right)ds \right\|_{L^4_{T,x,y}}$$
$$\leq c_{\text{str}} \left\| \int_{\mathbb{R}} U(t-s)\left(\chi_{[0,T]}(s)\ \ f(s)\right)ds \right\|_{L^4_{t,x,y}(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leq c_{\text{str}} \left| \ \chi_{[0,T]}\ \ f \right|_{L^{\frac{4}{3}}_{t,x,y}(\mathbb{R}^3)} .$$

٢. تعريف نصف زمرة متخامدة (وجود المجموعة الماصة):

نبرهن أن لمسألة القيمة الابتدائية حل شامل بالنسبة للزمن وذلك من أجل معطيات ابتدائية صغيرة بالقدر الكافي، ومن ثم نبرهن وجود المجموعة الماصة وبالتالي نصف الزمرة تكون مبددة (راجع [7 1]).

مسألة القيمة الابتدائية:

نكتب مسألة القيمة الابتدائية الموافقة للمعادلة (NES) على الشكل:

$$u_t + \gamma u + iu_{xx} - iu_{yy} + i|u|u = f \qquad (٥)$$

مزودة بالشرط الابتدائي

$$u(0,x,y) = u_0(x,y) \qquad (6)$$

موضوعة 1:

من أجل R_0 ثابت معطى بالشكل $R_0 = \frac{2|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma^2}$ ومن أجل f صغير بقدر كافي كنظيم في $L^2(\mathbb{R}^2)$ بحيث $R_0{}^2 \leq \frac{\gamma}{16\ c_{\text{str}}^3}$ ، ولتكن Y مجموعة تامة في الفضاء $H^1(\mathbb{R}^2)$ معرفة بالشكل $Y = \left\{u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2);\ |u_0|^2_{L^2} + \frac{|f|^2_{L^2}}{\gamma^2} \leq R_0{}^2 \leq \frac{\gamma}{16\ c_{\text{str}}^3}\right\}$ عندها فإنه يوجد للمسألة حل معرف على المجال المحلي $[0,T^*[\ ; T^* > 0$ بحيث يكون $u(t) \in C_b\left([0,T^*[;\ H^1(\mathbb{R}^2)\right) \cap L^4(0,T,W^{1,4}(\mathbb{R}^2))$،

والتطبيق $u_0 \longmapsto u(t)$ تطبيق مستمر على $H^1(\mathbb{R}^2)$. ومن أجل $u_0 \in Y$ فإن $T^* = \infty$ والحل عندها يكون شامل، أي يمكن تعريف نصف زمرة بالشكل $S(t): H^1(\mathbb{R}^2) \to H^1(\mathbb{R}^2); t \geq 0$ بحيث

$u(t) = S(t)u_0$ حل مسألة القيمة الابتدائية (٥)− (6).

الإثبات : ننوه هنا أن دراسة مسألة كوشي المحلية تشبه دراسة المسألة الناقصية مع حد غير خطي تكعيبي

([1,3, 12]) لذلك سوف نتجاوزها لننتقل إلى برهان وجود الحل الشامل، ولهذا الهدف سوف نطبق مبرهنة النقطة الثابتة على شكل ديوهامل للمعادلة (5) (انظر[7]) و نبرهن أن $|u(t)|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$ يبقى محدود ولا ينفجر في زمن منتهي، عندها يكون الحل شامل. نبرهن أولاً أن النظيم في $L^2(\mathbb{R}^2)$ محدود:

من أجل $u(t)$ حل للمسألة (٥)–(٦) الموافق للشرط الابتدائي $u_0 \in Y$، فإنه بضرب (5) بـ $\bar{u}$ في $L^2(\mathbb{R}^2)$ ومكاملة الجزء الحقيقي للمعادلة، نحصل على:

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_{L^2}^2 + \gamma|u|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\gamma}|f|_{L^2}^2$$

بالمكاملة نجد

$$|u(t)|_{L^2}^2 \leq e^{-\gamma t}|u_0|_{L^2}^2 + (1-e^{-\gamma t})\frac{|f|_{L^2}^2}{\gamma^2} \leq \frac{2|f|_{L^2}^2}{\gamma^2} = R_0;\ \forall t > t_1 = \frac{2}{\gamma} ln\frac{|u_0|_{L^2}\gamma}{|f|_{L^2}} \qquad (7)$$

ننتقل الآن إلى النظيم في $H^1(\mathbb{R}^2)$ حيث نبرهن أن النظيم في $H^1(\mathbb{R}^2)$ محدود من خلال التمهيدية التالية، ومن بعدها نبرهن الشمولية:

تمهيدية ٢: يوجد $T > 0$ بحيث أنه من أجل $\delta = e^{-(\gamma T - c_{str})} < 1$ ، ومن أجل $t \in [0,T]$ نجد

$$|\nabla u(t)|_{L^2_{x,y}} \leq e^{-(\gamma T - c_{str})}|\nabla u_0|_{L^2_{x,y}}^2 + 4c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}k_1$$

حيث k_1 يتعلق فقط بالمعطيات f, γ, R_0 و المعرفة كما ذكرنا سابقاً.

الإثبات: نكتب شكل ديوهامل للمعادلة (٥)

$$u(t) = U(t)e^{-\gamma t}u_0 - i\int_0^t U(t-s)e^{-\gamma(t-s)}|u|\,u ds + \int_0^t U(t-s)e^{-\gamma(t-s)}f\,ds$$

حيث $U(t) = e^{-it\Lambda}$; $\Lambda = (\partial_{x^2} - \partial_{y^2})$ ، وبإدخال الدالة المساعدة $v(t) = e^{\gamma t}u(t)$ نجد

$$\nabla v(t) = U(t)\nabla u_0 - i\int_0^t U(t-s)|\nabla u|\,v ds + e^{\gamma t}\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}\nabla f\,ds \qquad (8)$$

نرمز ب I_1, I_2, I_3 للحد الأول والثاني والثالث في (8) على الترتيب للطرف اليميني من المساواة السابقة.

بالنسبة ل I_1, نجد

$$|I_1|_{L^2_{x,y}} = |U(t)\nabla u_0|_{L^2_{x,y}} \leq |\nabla u_0|_{L^2_{x,y}}$$

أما بالنسبة ل I_2, نجد

$$|I_2|_{L^2_{x,y}} = \left|\int_0^t U(t-s)|\nabla u|v ds\right|_{L^2_{x,y}} \leq c_{str}|\nabla(uv)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x,y}}$$

$$\leq 2c_{str}|u|_{L^2_{T,x,y}}\ |\nabla v|_{L^4_{T,x,y}}$$

وبما أن

$$|u(t)|_{L^2_{x,y}}^2 \leq R_0$$

فإن

$$|u(t)|_{L^2_{T,x,y}}^2 \leq R_0 T^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي

$$|I_2|_{L^2_{x,y}} \le 2c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}|\nabla v|_{L^4_{T,x,y}}$$

و بالنسبة ل I_3 , لدينا

$$I_3 = e^{\gamma t}\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}\nabla f\,ds = A^{-1}e^{\gamma t}\nabla f - e^{it\Lambda}A^{-1}\nabla f$$

حيث $A = \gamma + i\Lambda$ وبالتالي

$$|I_3|_{L^2_{x,y}} = e^{\gamma t}\left|\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}\nabla f ds\right|_{L^2_{x,y}} \le$$
$$|A^{-1}e^{\gamma t}\nabla f|_{L^2_{x,y}} + |U(t)A^{-1}\nabla f|_{L^2_{x,y}} \le$$
$$\frac{1}{\gamma}e^{\gamma t}|\nabla f|_{L^2_{x,y}} + |A^{-1}\nabla f|_{L^2_{x,y}} \le (e^{\gamma t}+1)\frac{1}{\gamma}|f|_{H^1_{x,y}}$$

لأن A^{-1} محدود في $L^2(\mathbb{R}^2)$ بنظيم برتبة $\frac{1}{\gamma}$.

و بالأخذ بالحسبان كل ما سبق نجد:

$$|\nabla v|_{L^2_{x,y}} \le |\nabla u_0|_{L^2_{x,y}} + 2c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}|\nabla v|_{L^4_{T,x,y}} + (e^{\gamma t}+1)\frac{1}{\gamma}|f|_{H^1_{x,y}}$$

بقي أن نعالج $|\nabla v|_{L^4_{L_{T,x,y}}}$ ، باستتخدام (٧) نقارن I_1 ، I_2 ، I_3 كنظيم في $L^4_{L_{T,x,y}}$

بالنسبة ل I_1، نجد بالاستفادة من (٣)

$$|I_1|_{L^4_{L_{T,x,y}}} = |U(t)\nabla u_0|_{L^4_{T,x,y}} \le c_{str}|\nabla u_0|_{L^2_{x,y}}$$

أما بالنسبة ل I_2، نجد

$$|I_2|_{L^4_{L_{T,x,y}}} = \left|\int_0^t U(t-s)|\nabla u|v ds\right|_{L^4_{T,x,y}} \le 2c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}|\nabla v|_{L^4_{T,x,y}}$$

و بالنسبة ل I_3 , لدينا

$$|I_3|_{L^4_{T,x,y}} = e^{\gamma t}\left|\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}\nabla f ds\right|_{L^4_{T,x,y}} \le$$
$$|A^{-1}e^{\gamma t}\nabla f|_{L^4_{T,x,y}} + |U(t)A^{-1}\nabla f|_{L^4_{T,x,y}} \le c(T)|A^{-1}\nabla f|_{L^2_{x,y}} \le c(T)|f|_{H^1_{x,y}} \le k_1,$$

حيث أن k_1 ثابت يتعلق فقط ب γ, f .

و بالأخذ بالحسبان كل ما سبق نجد:

$$|\nabla v|_{L^4_{T,x,y}} \le c_{str}|\nabla u_0|_{L^2_{x,y}} + 2c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}|\nabla v|_{L^4_{T,x,y}} + k_1$$

باختيار T بحيث

$$\frac{c_{str}}{\gamma} < T \le \frac{1}{16{c_{str}}^2{R_0}^2} \qquad (9)$$

فيكون

$$|\nabla v|_{L^4_{T,x,y}} \leq 2c_{str}|\nabla u_0|_{L^2_{x,y}} + 2\ k_1$$

وبالتالي

$$|I_2|_{L^2_{x,y}} \leq 2c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}|\nabla v|_{L^4_{T,x,y}} \leq 4{c_{str}}^2R_0T^{\frac{1}{2}} + 4k_1c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}$$

وبالاستفادة من (٩) يتم المطلوب.

ننتقل الآن إلى برهان الشمولية بالاستفادة من كون التمهيدية ٢ تبقى صالحة على المجال $[(k-1)T, kT]$ بدلاً من $[0, T]$

$$|u(kT)|^2_{L^2} \leq e^{-\gamma T}|u((k-1)T)|^2_{L^2} + \frac{|f|^2_{L^2}}{\gamma^2} \leq e^{-\gamma kT}|u_0|^2_{L^2} + \frac{|f|^2_{L^2}}{\gamma^2} \leq \frac{2|f|^2_{L^2}}{\gamma^2} = R_0$$

وكذلك

$$|\nabla u(kT)|^2_{L^2_{x,y}} \leq \delta|\nabla u((k-1)T)|^2_{L^2_{x,y}} + 4c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}k_1$$

حيث T معرفة كما في (٩) و $0 < \gamma T - c_{str}$، $\delta = e^{-(\gamma T - c_{str})} < 1$.

بوضع $k_2 = 4c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}k_1$ نجد بشكل مشابه للتمهيدية ٢ :

$$\begin{aligned}|\nabla u(kT)|^2_{L^2_{x,y}} &\leq \delta|\nabla u((k-1)T)|^2_{L^2_{x,y}} + k_2\\ &\leq \delta^k|\nabla u_0|^2_{L^2_{x,y}} + k_2(1+\delta+\cdots+\delta^{k-1})\\ &\leq \delta^k|\nabla u_0|^2_{L^2_{x,y}} + \frac{k_2}{1-\delta}\end{aligned}$$

وبالتالي من أجل $t \in [(k-1)T, kT]$ نجد

$$\left|\nabla u(t)\right|^2_{L^2_{x,y}} \leq \delta^k\left|\nabla u_0\right|^2_{L^2_{x,y}} + \frac{k_2}{1-\delta} \leq \frac{2k_2}{1-\delta} \qquad (10)$$

$$\forall t > t_2 = \left(\frac{ln\dfrac{(1-\delta)|\nabla u_0|^2_{L^2_{x,y}}}{k_2}}{ln\dfrac{1}{\delta}} - 1\right)T$$

نبرهن الآن أن $S(t)$ تطبيق مستمر على $H^1(\mathbb{R}^2)$:

ليكن u, v حلين للمعادلة (5) مع u_0, v_0 في $H^1(\mathbb{R}^2)$ نجد

$$|u(t) - v(t)|^2_{H^1} \leq \delta^k|u_0 - v_0|^2_{H^1}$$

فإنه إذا كان $u_0 \to v_0$ فإن $u(t) = S(t)u_0 \to v(t) = S(t)v_0$ في $H^1(\mathbb{R}^2)$.

ونلاحظ إذا كانت u_0 صغيرة بقدر كافٍ فإن $T = +\infty$ والحل شامل.

وبذلك تم إثبات الموضوعة، أي أن المعادلة معرفة بنصف الزمرة $S(t)$ من أجل $0 < t$

$$S(t) : H^1(\mathbb{R}^2) \to H^1(\mathbb{R}^2)$$
$$u(t) = S(t)u_0$$

وجود المجموعة الماصة:

تعريف1 : يقال عن مجموعة جزئية محدودة β من $H^1(\mathbb{R}^2)$ أنها مجموعة ماصة إذا تحقق

$$S(t)\beta \subset \beta \qquad \forall\, t > 0$$

ومن أجل كل مجموعة محدودة B من $H^1(\mathbb{R}^2)$ يوجد $t_0(B) > 0$ بحيث

$.S(t)B \subset \beta \qquad \forall\, t > t_0(B)$

بملاحظة العلاقات (7), (10) نستنتج وجود مجموعة محدودة ماصة β

$$\beta = \{u \in Y \subset H^1(\mathbb{R}^2); |u|_{H^1} \le R_0 + k, \forall t > t_0 = max\{t_1, t_2\}\}.$$

يمكننا الآن حصر النتائج التي توصلنا إليها في المبرهنة الآتية:

مبرهنة1:

بفرض $Y = \left\{ u_0 \in H^1\left(R^2\right) : |u_0|_{L^2}^2 + \frac{|f|_{L^2}^2}{\gamma^2} \le R_0^2 \le \frac{\gamma}{16c_{str}^3} \right\}$ مجموعة تامة في $H^1(\mathbb{R}^2)$ فإنه يوجد مجموعة محدودة ماصة في $H^1(\mathbb{R}^2) \supset Y$.

الاستنتاجات والتوصيات:

استنتجنا أن معادلة شرودنغر تملك مجموعة ماصة تجذب إليها كل المجموعات المحدودة، ونوصي بدراسة وجود جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R}^2)$ لهذه المعادلة.

المراجع:

[1] Akroune, N. (1999). Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation on R. *Applied Mathematics Letters*, *12*(3), 45-48.

[2] Alouini, B., & Goubet, O. (2014). Regularity of the attractor for a Bose-Einstein equation in a two dimensional unbounded domain. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, *19*(3), 651-677.

[3] Cazenave,T. (1990). An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equation, *Textos de Métodos Matemáti- cos, Rio de Janeiro*.

[4] Dabaa, A., & Goubet, O. (2016). Long time behavior of solutions to a Schrödinger-Poisson system in R^3. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *15*(5), 1743.

[5] Ghidaglia, J. (1988). Finite dimensional behavior for the weakly damped driven Schrödinger equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 5, 365-405.

[6] Ghidaglia, J., & Saut, J. (1993). Nonelliptic Schrödinger equations. *Nonlinear Sci. 3,* no. 2, 169-195.

[7] Ghidaglia, J., & Saut, J. (1990). On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems, *Non- linearity 3* , 475-506.

[8] Goubet, O., & Hussein, M. (2009). Dynamical properties for a relaxation scheme applied to a weakly damped non local nonlinear Schrodinger equation. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, *17*, 71-82.

[9] Goubet, O., & Hussein, M. (2009). Global attractor for the

Davey-Stewartson system on $\mathbb{R}^2$. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *8*(5), 1555-1575.

[10] Goubet, O., & Molinet, L. (2009). Global attractor for weakly damped nonlinear Schrödinger equations in $L^2(\mathbb{R})$. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *71*(1-2), 317-320.

[11] Hale, J. (1988). Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, *Math. surveys and Monographs, AMS, Providence*, 25.

[12] Kato, T. (1975). Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations, *Lecture Notes in Math., 448, Springer*, 25-70.

[13] Miranville, A., & Zelik, S. (2008). Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains, *Handbook of Differential Equations, Evolutionary Partial Differential Equations,4, C.M. Dafermos and M. Pokorny eds., Elsevier, Amsterdam*, (103-200).

[14] Nishinari, K., & Abe, K., & Satsuma, J. (1994). Multi-dimensional behavior of electrostatic ion wave in a magnetized plasma, *Phys. Plasmas*, 1, 2559-2565.

[15] Raugel, G. (2002). Global attractors in partial differential equations, *Handbook of Dynamical Systems, North-Holland, Amsterdam*, 2, (885-982).

[16] Sulem, C., & Sulem, P-L.(1999) The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse. *Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York*.

[17] Temam, R. (1997). Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, *Springer-Verlag*, Second Edition.

[18] Wang, X. (1995). An energy equation for the weakly damped driven nonlinear Schrödinger equations and its applications to their attractors, *Physica D*, 88, 167-175.

[19] Wei, J., & Wu, Y. (٢٠٢٢). On some nonlinear Shrodinger equations in R^N, Proceeding of the royal society of Edinburgh, *section mathematics*, 1-26.

[20] Zhu, C. (2016). Global Attractor of nonlocal nonlinear Schrodinger equation on $\mathbb{R}$. *Advances in Analysis*, 1(1).

[21] Zhao, Y., & Fan, E. (2023). Existence of global solutions to the nonlocal Schrodinger equation on the line. Studies in applied mathematics, preprint arXiv:2207.04151.