مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (2) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (2) 2023

خوارزمية بناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي باستخدام الحالات القابلة للوصول

د. عائدة صائمة*

(تاريخ الإيداع ١٢/٤ / 2023 – تاريخ النشر ٥/٣١ / 2023)

□ ملخّص □

نقوم في هذا البحث بالتعريف بنموذج الأوتومات المنتهي بنوعيه الحتمي واللاحتمي. نستعرض خوارزمية البناء الجزئي التقليدية لبناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي. نقترح خوارزمية محسنة تعتمد طريقة البناء الجزئي أيضاً لبناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي. نطبق كلا الخوارزميتين على أوتومات منته لاحتمي ونحلل ونقارن النتائج من حيث الكلفة الزمنية والحسابية .

الكلمات المفتاحية :الأوتومات المنتهي الحتمي – الأوتومات المنتهي اللاحتمي– انتقال– حالة ابتدائية– حالة نهائية – خوارزمية– حالة قابلة الوصول.

*مدرس في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (2) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (2) 2023

Algorithm to Construct Deterministic Finite Automata From Non-deterministic Finite Automata by Using Reachable States

D. Aida Sayma*

(Received 4/12/2023.Accepted 31/5/2023)

□ABSTRACT □

In this research, we define the model of finite automata with its two types, deterministic and non-deterministic. We present the classical subset construction algorithm to construct a deterministic finite automata(DFA) from non-deterministic finite automata(NFA).We propose an improved algorithm based on subset construction method to construct a deterministic finite automata (DFA) from non-deterministic finite automata (NFA) .We apply the both algorithms on a non-deterministic finite automata , analyze and compare the results depending on time and computational costs.

Keywords: deterministic finite automata – non-deterministic finite automata - algorithm- transition - initial state - final state - reachable state.

*Lecturer – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tartous University

1- مقدمة

تعتبر نظرية الأوتومات واللغات الصورية من علوم الحاسوب النظرية ، وقد تأسست في القرن العشرين من خلال تطور الرياضيات النظرية والتطبيقي [3].ويعتبر نموذج الأوتومات المنتهي من أبسط النماذج التي تحدد اللغات الصورية المفيدة، وقد صمم أصلا لنمذجة الدارات المنطقية التسلسلية وازدادت أهميته لدى استخدامه في تصميم وتنفيذ لغات البرمجة، ومترجماتها[3,5] .ويعد التحقق من تكافؤ اللغات التي يحددها الأوتومات المنتهي مسألة معروفة في علوم الحاسوب والتي تجد تطبيقاتها في مجالات عديدة [9]. ويوجد أنواع عديدة من الأوتومات المنتهي نذكر منها:الأوتومات المنتهي الحتمي والأوتومات المنتهي اللاحتمي. ولكن الأوتومات المنتهي اللاحتمي أكثر مرونة وفعالية من الأوتومات المنتهي الحتمي عند تحديد أي لغة منتظمة وعلى الرغم من ذلك فإن جميع أنواع الأوتومات المنتهي متكافئة فيما بينها من حيث تحديدها نفس الصف من اللغات الصورية وهو صف اللغات المنتظمة [4,6].وقد تم إيجاد الخوارزمية التقليدية لبناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي مكافئ له باستخدام طريقة البناء الجزئي ولكن الكلفة الزمنية والحسابية لهذه الخوارزمية تزداد أسياً وفقاً لعدد حالات الأوتومات المنتهي الحتمي[4,8]، ولذلك نحاول في هذا البحث دراسة خوارزمية جديدة لبناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي تستخدم طريقة البناء الجزئي زمن تنفيذها أقل و كلفتها الحسابية أقل وتخفض من عدد حالات الـ DFA الأسي.

2- أهمية البحث وأهدافه

إن موضوع تكافؤ نموذج الأوتومات المنتهي بنوعيه اللاحتمي والحتمي من حيث تحديده نفس الصف من اللغات الصورية له أهمية كبيرة وتطبيقات واسعة في مجال علوم الحاسب. ومن هنا تكمن أهمية البحث في دراسته للخوارزميات التي تقوم ببناء أوتومات منته حتمي من أوتومات منته لاحتمي وتحسينها من حيث زمن تنفيذها وكلفتها الحسابية. ويهدف هذا البحث إلى التعريف بنموذج الأوتومات المنتهي بنوعيه الحتمي واللاحتمي ودراسة الخوارزمية التقليدية التي تعتمد طريقة البناء الجزئي لبناء أوتومات منته حتمي من أوتومات منته لاحتمي، واقتراح خوارزمية محسنة للخوارزمية التقليدية تعتمد طريقة البناء الجزئي أيضاً ، ومن ثم تطبيق كلا الخوارزميتين على أوتومات منته لاحتمي وتحليل ومقارنة النتائج من حيث الكلفة الزمنية و الحسابية.

3-طرق البحث وموارده

لتحقيق هدف البحث ، تم إتباع الخطوات التالية:

- دراسة نظرية وتعريفية بنموذج الأوتومات المنتهي بنوعيه الحتمي واللاحتمي.
- عرض خوارزمية البناء الجزئي التقليدية لبناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي.
- دراسة خوارزمية جديدة تعتمد طريقة البناء الجزئي لبناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي.
- تطبيق كلا الخوارزميتين على أوتومات لاحتمي وتحليل ومقارنة النتائج من حيث الكلفة الزمنية والحسابية.

4- الدراسة النظرية:

4-1-نموذج الأوتومات المنتهي :

4-1-1-الأوتومات المنتهي الحتمي:

4-1-1-1 تعريف الأوتومات المنتهي الحتمي DFA [1,2,5]:وهو عبارة عن الخماسية $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ، حيث:

- Q مجموعة منتهية غير خالية من حالات الأوتومات.
- Σ مجموعة منتهية غير خالية من رموز الدخل وندعوها أبجدية الدخل للأوتومات D.
- δ دالة الانتقال للأوتومات والمعرفة كما يلي:(*) $\delta : Q \times \sum \longrightarrow Q$ ، حيث الحالة $\delta(q,a) = p \quad ; q, p \in Q$

p هي الحالة التي ينتقل إليها الأوتومات D عندما يكون في الحالة q ، ويقرأ رمز الدخل a من Σ.

- q_0 إحدى حالات Q وهي الحالة الابتدائية (Start Stat) للأوتومات D.
- $F \subseteq Q$ مجموعة الحالات النهائية للأوتومات وهي مجموعة غير خالية.

ويدعى الأوتومات D أوتوماتاً منتهياً **حتمياً** لأن تابع الانتقال له معرف وفق الشكل(*) أي أن الأوتومات D مع حالة ما q وأي رمز دخل a من Σ ينتقل إلى حالة واحدة فقط p .

4-1-1-2-مخطط الانتقال للأوتومات المنتهي الحتمي[3,4]: يمكن تمثيل الأوتومات deterministic finite automaton DFA **بمخطط انتقال** وهو مخطط graph موجه يكون معرفاً على الشكل الآتي:

1- تمثل عقد هذا المخطط حالات المجموعة Q ومن أجل كل $a \in \Sigma$ وكل $q, p \in Q$ يوجد ضلع موجهة من العقدة q إلى العقدة p من أجل عنصر الدخل a إذا وفقط إذا كان: $\delta(q,a) = p$.

2- يوجد سهم باتجاه الحالة الابتدائية q_0 $\longrightarrow q_0$ ، أما العقد الموافقة للحالات النهائية F فتكون محاطة بدائرة مضاعفة ◎ الحالات الأخرى والتي ليست من F فتكون محاطة بدائرة واحدة فقط ○ .

4-1-1-3-جدول الانتقال للأوتومات المنتهي الحتمي[4,8]:يمكن تمثيل دالة الانتقال δ لـ DFA بجدول انتقال يظهر انتقالات الـ DFA حيث تكون أسطر الجدول موافقة لحالات الـ DFA وأعمدة الجدول موافقة لعناصر الدخل ويكون مدخل كل سطر الموافق للحالة q و مدخل العمود الموافق لرمز الدخل a هو $\delta(q,a)$.

4-1-1-4- دالة الانتقال الموسعة واللغة التي يحددها الـ DFA [4,8] : يمكن توسيع دالة الانتقال δ إلى دالة الانتقال الموسعة $\hat{\delta}$ وهي معرفة كما يلي: $\delta : Q \times \sum^{*} \longrightarrow Q$ ، **حيث:** $\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q \quad ; q \in Q$ و $\varepsilon \in \Sigma^*$ **السلسلة الفارغة** و $\hat{\delta}(q,w) = \delta\left(\hat{\delta}(q,x), a\right); q \in Q \quad \wedge w = xa ; w, x \in \Sigma^* \wedge \quad a \in \Sigma$

أما اللغة التي يحددها الأوتومات المنتهي الحتمي D فهي المجموعة:

$L(D) = \left\{ w \in \Sigma^* \middle| \hat{\delta}(q_0, w) \in F \right\}$ وهي مجموعة جزئية من مجموعة السلاسل Σ^* .

نلاحظ من تعريف $\hat{\delta}$ أن: $\hat{\delta}(q,a) = \delta(q,a)$ من أجل جميع $a \in \Sigma$.

أما **طول السلسلة** $w \in \Sigma^*$ والذي نرمز له بالرمز $|w|$ فنعرفه بأنه عدد رموز الدخل المشكلة لهذه السلسلة.

4-1-2-الأوتومات المنتهي اللاحتمي:

4-1-2-1 تعريف الأوتومات المنتهي اللاحتمي NFA [7,9]: وهو عبارة عن الخماسية $N=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$،حيث جميع المركبات تكون معرفة كما عرفت لأجل الأوتومات الحتمي ماعدا أن دالة الانتقال δمعرفة كما يلي: (**) $\delta: Q\times\sum \longrightarrow 2^Q$ ،حيث $\{q_1,...,q_i\}$

$$\delta(q,a)=\{q_1,q_2,...,q_i\}\ \ ;q\in Q\ \ ,a\in\Sigma$$

مجموعة الحالات التي يمكن أن ينتقل إليها الأوتومات عندما يكون في الحالة q ويقرأ رمز الدخل a.

ويدعى الأوتومات N **أوتوماتاً منتهياً لاحتمياً** لأن تابع الانتقال له معرف وفق الشكل(**)، بحيث ينتقل الأوتومات N مع حالة ما q وأي رمز دخل a إلى إحدى الحالات التالية: q_1 أو q_2 ... أو q_i .

4-1-2-2 دالة الانتقال الموسعة واللغة التي يحددها الـ NFA [4,8]: يمكن توسيع دالة الانتقال δ إلى الدالة $\hat{\delta}$ كما يلي: $\hat{\delta}: Q\times\sum^{*}\longrightarrow 2^Q$، **حيث** $\hat{\delta}(q,\varepsilon)=q;q\in Q$

و $\hat{\delta}(q,w)=\delta\left(\hat{\delta}(q,x),a\right)\ \ ;q\in Q\ \ \wedge w=xa;w,x\in\Sigma^*\wedge\ \ a\in\Sigma$

أما اللغة التي يحددها الأوتومات اللاحتمي فهي المجموعة:

$$L(N)=\{w\in\Sigma^*|\exists q\in F;q\in\delta(q_0,w)\}$$

4-1-3-الحالات في الأوتومات المنتهي [4,8]: ليكن $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$أوتومات منته،عندئذ نقول عن الحال $q\in Q$ أنها قابلة للوصول Reachable من الحالة الابتدائية q_0إذا وجدت سلسلة دخل $w\in\Sigma^*$بحيث أن: $\delta(q_0,w)=q$ أو إذا وجد تسلسل من الحالات $q_1,q_2,...,q_r$ من Q بحيث يكون $q_1=q_0$ و $q=q_r$ و q_{i+1} تنتج من q_i من أجل $i=1,2,...,r-1$ وإذا لم يتحقق ذلك قلنا عن الحالة q أنها غير قابلة للوصول من الحالة الابتدائية q_0.

4-1-4- تعريف الأوتوماتان المتكافئان[4,6]: نقول عن أوتوماتيين منتهيين M و M' أنهما أوتوماتان متكافئان إذا كانا يقبلان نفس اللغة أي إذا كان: $L(M)=L(M')$.

4-2-خوارزميات تعتمد طريقة البناء الجزئي لبناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي:

نعرض هنا خوارزميتان الأولى الخوارزمية التقليدية والثانية الخوارزمية التي قمنا باقتراحها لبناء DFA من NFA مفروض وكلاهما تعتمدان طريقة البناء الجزئي وتقوم هذه الطريقة على بناء مجموعة Q'_D للـ DFA من مجموعة الحالات Q_N للـ NFA بحيث أن المجموعة Q'_Dهي مجموعة جميع المجموعات الجزئية للمجموعة Q_N و بحيث أن كل حالة من Q'_D تكون مجموعة جزئية من المجموعة Q_N، أي أن مجموعة الحالات المحتملة $q_1,...,q_i$والتي يمكن لـ NFA الانتقال إليها مع رمز دخل واحد تعامل كحالة واحدة في DFA بمعنى أننا نعتبر $q_1,...,q_i$ مجموعة من الحالات في Q_Nو $\{q_1,...,q_i\}$حالة واحدة في Q'_D،وبالتالي $Q'_D=P(Q_N)=2^Q$ وكذلك إذا كانت $|Q_N|=n$ فإن $|Q'_D|=|P(Q_N)|=2^n$.

وبعد عرض كلا الخوارزميتين التقليدية والمقترحة نبرهن على صحتهما،حيث لكل منهما الدخل والخرج التاليان:

الدخل: $NFA\ \ N=(Q_N,\Sigma,\delta_N,q_0,F_N)$ أوتومات منتهي لاحتمي،حيث وعلى الترتيب:

Q_N مجموعة الحالات ، $\sum$ أبجدية الدخل ، δ_N دالة الانتقال ، q_0 الحالة الابتدائية و F_N مجموعة الحالات النهائية للأوتومات N .

الخرج: $D=(Q_D,\sum,\delta_D,q_{0D},F_D)$ DFA أوتومات منتهي حتمي بحيث أن: $L(D)=L(N)$.

حيث وعلى الترتيب: Q_D مجموعة الحالات ، $\sum$ أبجدية الدخل ، δ_D دالة الانتقال ، q_{0D} الحالة الابتدائية و F_D مجموعة الحالات النهائية للأوتومات D .

أولاً: الخوارزمية التقليدية [4,8]

1-المرحلة الأولى:

1-نبني المجموعة Q'_D لـ D بأن نضع $Q'_D := 2^{Q_N} = P(Q)$ بحيث أن:

$$q=\{q_1,q_2,...,q_i\}\in Q'_D \Leftrightarrow \{q_1,q_2,...,q_i\}\subseteq Q_N\ ;i\le n;|Q_N|=n$$

2- من أجل كل حالة $q=\{q_1,q_2,...,q_i\}\in Q'_D$ ، نضع: $q_{0D}=\{q_0\}$ الحالة الابتدائية لـ D و هي مجموعة جزئية من Q_N مؤلفة من الحالة الابتدائية q_0 للأوتومات N و $F'_D=\{q|q\in Q'_D \wedge q\cap F_N\neq\phi\}$ مجموعة الحالات النهائية لـ D وكل حالة منها تحوي حالة نهائية من F_N .

ومن أجل كل رمز دخل $a\in\sum$ نوجد دالة الانتقال δ_D للأوتومات D كما يلي:

$$\delta_D(\{q_1,q_2,...,q_i\},a)=\{r_1,r_2,...,r_j\}\Leftrightarrow\delta_N(\{q_1,q_2,...,q_i\},a)=\{r_1,r_2,...,r_j\}$$

والتي ينتج من إيجادها بناء جدول الانتقال للأوتومات الحتمي D وهو يوضح حالات وانتقالات الأوتومات D

.

2-المرحلة الثانية: أولاً: نبني جدول الانتقال للأوتومات D الذي يحوي الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ فقط مع انتقالاتها المرافقة ويتم ذلك من جدول الانتقال المبني في المرحلة الأولى لـ D بأخذ الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ مع انتقالاتها المرافقة وإهمال الحالات الأخرى (الحالات غير القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$) مع انتقالاتها بحيث أنه إذا كانت $q\in Q'_D$ و $\delta(\{q_0\},w)=q$ من أجل $w\in\sum^*$ فإن الحالة q تكون قابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ وعندئذ تكون الحالة q في جدول الانتقال المبني في هذه المرحلة مع انتقالاتها المرافقة و $q\in Q_D$ ونضع: $Q_D=\{q:q\in Q'_D\wedge\delta(\{q_0\},w)=q;w\in\Sigma^*\}$ وهي مجموعة الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ للأوتومات D .

ثانياً: نوجد المجموعة F_D من المجموعة F'_D والتي تضم مجموعة الحالات النهائية لـ D والقابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ فإذا كانت $q\in F'_D$ و $q\in Q_D$ عندئذ فإن $q\in F_D$ و $F_D=\{q|\ q\in Q_D\wedge q\in F'_D\}$

إن البرهان على صحة هذه الخوارزمية نجده في النظرية التالية :

نظرية(1)[4]: إذا كان $D=(Q_D,\sum,\delta_D,q_{0D},F_D)$ أوتومات منته حتمي مبني من $N=(Q_N,\sum,\delta_N,q_0,F_N)$ أوتومات منته لاحتمي بالخوارزمية التقليدية عندئذ فإن: $L(D)=L(N)$

البرهان: حتى نبرهن أن $L(D)=L(N)$ يجب أن نبرهن أن $w\in L(D)\Leftrightarrow w\in L(N)$ ، ومن أجل ذلك نبرهن بالاستقراء على طول السلسلة w أي على $|w|$ العلاقة التالية:

(1) $\delta_D(\{q_0\},w)=\{r_1,r_2,...,r_k\}\Leftrightarrow\delta_N(q_0,w)=\{r_1,r_2,...,r_k\}$ من أجل جميع السلاسل $w\in\sum^*$.

أولاً: **خطوة الأساس:** من أجل $|w|=0$ أي $w=\varepsilon$ فإن العلاقة (1)محققة من تعريف δ_D و δ_N أي:

$$\delta_D(\{q_0\},\varepsilon)=\{q_0\}\Leftrightarrow\delta_N(q_0,\varepsilon)=\{q_0\}$$

ثانياً: **خطوة الاستقراء:** نفرض أن العلاقة (1) محققة من أجل جميع السلاسل x حيث $|x| = k \; ; k \in Z^{*+}$ ولنبرهن صحتها من أجل السلاسل w التي طولها $k+1$ أي، $|w| = k+1$ حيث $w = xa$ و $a \in \Sigma$.

لدينا :

$$\delta_D(\{q_0\}, w) = \delta_D(\{q_0\}, xa) = \delta_D(\delta_D(\{q_0\}, x), a) = \delta_D(\{p_1, p_2, ..., p_i\}, a)$$

كذلك فإن:

$$\delta_N(q_0, w) = \delta_N(q_0, xa) = \delta_N(\delta_N(q_0, x), a) = \delta_N(\{p_1, p_2, ..., p_i\}, a)$$

وبالاعتماد على الفرضية الاستقرائية :

$\delta_D(\{q_0\}, x) = \{p_1, p_2, ..., p_i\} \Leftrightarrow \delta_N(q_0, x) = \{p_1, p_2, ..., p_i\}$ وعلى تعريف δ_D وفق الخوارزمية التقليدية :

$$\delta_D(\{p_1, p_2, ..., p_i\}, a) = \{r_1, r_2, ..., r_j\} \Leftrightarrow \delta_N(\{p_1, p_2, ..., p_i\}, a) = \{r_1, r_2, ..., r_j\}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\delta_D(\{q_0\}, xa) = \{r_1, r_2, ..., r_j\} \Leftrightarrow \delta_N(q_0, xa) = \{r_1, r_2, ..., r_j\}$$

أي أن:

$$\delta_D(\{q_0\}, w) = \{r_1, r_2, ..., r_j\} \Leftrightarrow \delta_N(q_0, w) = \{r_1, r_2, ..., r_j\}$$

وبالتالي العلاقة (1) صحيحة . وبما أن وجود حالة نهائية لـ N في مجموعة الحالات $\{r_1, r_2, ..., r_j\}$ يجعل الحالة $\{r_1, r_2, ..., r_j\}$ حالة نهائية في D وبالتالي فإن: $w \in L(D) \Leftrightarrow w \in L(N)$ إذن: $L(D) = L(N)$.

ثانياً: الخوارزمية المقترحة:

put $Q_D := \{\phi\}$

put $q_{0D} := \{q_0\}$ then $Q_D := Q_D \cup \{q_0\}$

While $\exists q = \{q_1, q_2, ..., q_i\} \in Q_D$ so that $q = \{q_1, q_2, ..., q_i\} \subseteq Q_N$

then For each $a \in \Sigma$ do

Calculate

$$\delta_D(\{q_1, q_2, ..., q_i\}, a) = \delta_N(\{q_1, q_2, ..., q_i\}, a) = \bigcup_{k=1}^{i} \delta_N(q_k, a) = \{r_1, r_2, .., r_j\}$$

If $\{r_1, r_2, ..., r_j\} \notin Q_D$ then $Q_D := Q_D \cup \{\{r_1, r_2, ..., r_j\}\}$

Until no new state added to Q_D

put $F_D = \{q | \; q \in Q_D \;\&\; q \cap F_N \neq \phi\}$

وقد قمنا بإثبات صحة هذه الخوارزمية من خلال النظرية التالية :

نظرية(2): إذا كان $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0D}, F_D)$ أوتومات منته حتمي مبني من $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ أوتومات منته لاحتمي بالخوارزمية المقترحة عندئذ فإن: $L(D) = L(N)$

البرهان: حتى نبرهن أن $L(D)=L(N)$ يجب أن نبرهن أن $w\in L(N) \Leftrightarrow w\in L(D)$ ، ومن أجل ذلك نبرهن بالاستقراء على طول السلسلة w أن: (2) $\delta_D(\{q_0\},w)=\delta_N(q_0,w)$ من أجل جميع $w\in\sum^*$.

أولاً: **خطوة الأساس:** من أجل $|w|=0$ أي $w=\varepsilon$ فإن العلاقة (2) محققة من تعريف δ_D و δ_N أي:

$$\delta_D(\{q_0\},\varepsilon)=\delta_N(q_0,\varepsilon)=\{q_0\}$$

ثانياً:**خطوة الاستقراء**:نفرض أن العلاقة (2) محققة من أجل جميع السلاسل x حيث $|x|=k\ \ ;k\in Z^{*+}$ ولنبرهن صحتها من أجل السلاسل w التي طولها $k+1$ أي، $|w|=k+1$ ،حيث $w=xa$ و $a\in\sum$.

الآن بالاعتماد على الفرضية الاستقرائية والعلاقة $\delta_N(q_0,x)=\{p_1,p_2,...,p_i\}$ ،ووفقاً لتعريف δ_D حسب الخوارزمية المقترحة فإننا نجد أن: $\delta_D(\{q_0\},w)=\delta_D(\{q_0\},xa)$

$$\delta_D(\delta_D(\{q_0\},x),a)=\delta_D(\delta_N(q_0,x),a)=\delta_D(\{p_1,p_2,...,p_i\},a)$$

$$=\bigcup_{k=1}^{i}\delta_N(p_k,a)=\delta_N(\{p_1,p_2,...,p_i\},a)=\delta_N(\delta_N(q_0,x),a)=\delta_N(q_0,xa)=\delta_N(q_0,w)$$

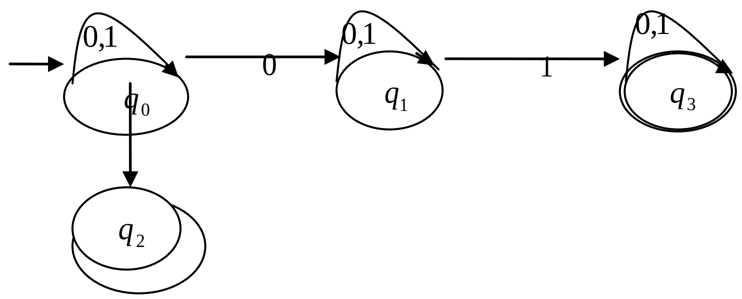
وبالتالي العلاقة (2) صحيحة وذلك مهما كان طول السلسلة w . كما أن: $L(D)=L(N)$ لأن:

$$-\ w\in L(D)\Leftrightarrow \delta_D(\{q_0\},w)=q_D\in F_D \Leftrightarrow \exists q_k\in Q_N\quad ;q_k\in F_N\cap q_D\ \&\ q_k\in\delta(q_0,w)$$

5الدراسة العملية: إن الكلفة الزمنية لخوارزمية هي الزمن اللازم لتنفيذ جميع خطوات هذه الخوارزمية والعمليات بأسوأ الحالات بينما تعرف الكلفة الحسابية لخوارزمية بأنها عدد العمليات اللازمة لتنفيذ هذه الخوارزمية وكلما كانت الكلفة الحسابية صغيرة كانت الكلفة الزمنية صغيرة [10].

نقوم بتطبيق كل من الخوارزميتن التقليدية والمقترحة على أوتومات لاحتمي و نحلل ونقارن هذه النتائج من حيث الكلفة الزمنية والحسابية.

تطبيق : ليكن الأوتومات المنتهي اللاحتمي الموضح بمخطط الانتقال التالي:



الشكل (1): أوتومات منتهي لاحتمي يقبل مجموعة جميع السلاسل $1+(0+1)^*0(0+1)^*1(0+1)^*$

إن جدول الانتقال الموافق لهذا الأوتومات هو:

δ_N	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\{q_1,q_3\}$
$*q_2$	ϕ	ϕ
$*q_3$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

جدول(1):جدول الانتقال لأوتومات الشكل(1).

أولاً: تطبيق الخوارزمية التقليدية على الأوتومات اللاحتمي: بتطبيق المرحلة الأولى نجد أن:

$$Q'_D := 2^{Q_N} = \left\{ \begin{array}{l} \phi, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_0,q_1\}, \{q_0,q_2\}, \{q_0,q_3\}, \{q_1,q_2\}, \{q_1,q_3\}, \{q_2,q_3\}, \\ \{q_0,q_1,q_2\}, \{q_0,q_1,q_3\}, \{q_0,q_2,q_3\}, \{q_1,q_2,q_3\}, \{q_0,q_1,q_2,q_3\} \end{array} \right\}$$

$$q_{0D} = \{q_0\}$$

$$F'_D := \left\{ \begin{array}{l} \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_0,q_2\}, \{q_0,q_3\}, \{q_1,q_2\}, \{q_1,q_3\}, \{q_2,q_3\}, \{q_0,q_1,q_2\}, \\ \{q_0,q_1,q_3\}, \{q_0,q_2,q_3\}, \{q_1,q_2,q_3\}, \{q_0,q_1,q_2,q_3\} \end{array} \right\}$$

الآن من أجل $q=\{q_1,...q_i\}\in Q'_D$ و من أجل $a\in\Sigma$ أي من أجل جميع الحالات من Q'_D ورموز الدخل 0 و 1 نوجد دالة الانتقال $\delta_D(q,a)$ على سبيل المثال من أجل الحالة $\{q_0\}$ ورموز الدخل 0 و 1 نجد أن $\delta_D(\{q_0\},0)=\{q_0,q_1\}\Leftrightarrow\delta_N(q_0,0)=\{q_0,q_1\},$

$$\delta_D(\{q_0\},1)=\{q_0,q_2\}\Leftrightarrow\delta_N(q_0,1)=\{q_0,q_2\}$$

وبالمتابعة بنفس الطريقة من أجل الحالات الأخرى من Q'_D ورموز الدخل 0و 1ينتج جدول الانتقال لـ D:

δ_D	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
ϕ	ϕ	ϕ
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1,q_3\}$
$*\{q_2\}$	ϕ	ϕ
$*\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
$*\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
$*\{q_0,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_2,q_3\}$
$*\{q_1,q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1,q_3\}$
$*\{q_1,q_3\}$	$\{q_1,q_3\}$	$\{q_1,q_3\}$
$*\{q_2,q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
$*\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
$*\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
$*\{q_0,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_2,q_3\}$
$*\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_1,q_3\}$	$\{q_1,q_3\}$
$*\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$

جدول(2): جدول الانتقال الموافق للأوتومات المنتهي الحتمي المكافئ للأوتومات المرسوم في الشكل(1).

وبتطبيق المرحلة الثانية نجد أنه: بأخذ الحالات التي تحتها خط فقط (الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$) وإهمال الحالات الأخرى (الحالات غير القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$)

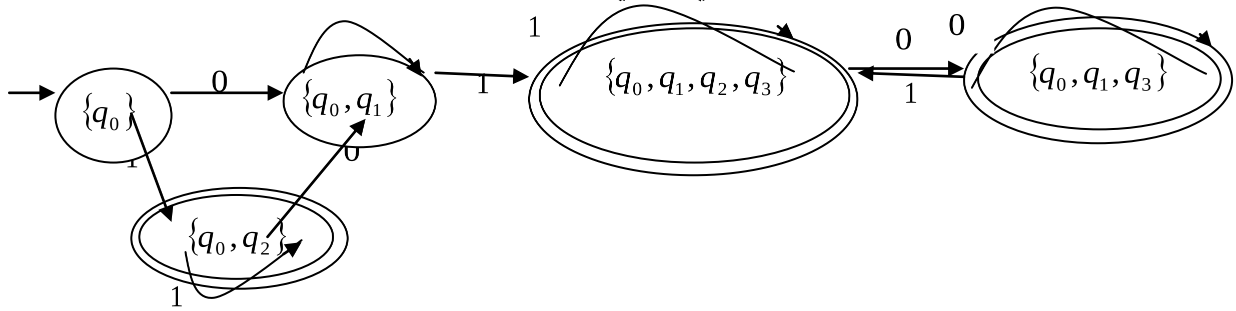
في جدول الانتقال (2) مع انتقالاتها المرافقة نحصل على جدول الانتقال للأوتومات D (الذي يمثل دالة الانتقال δ_D) والذي يضم فقط الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ و انتقالاتها:

δ_D	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
$*\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
$*\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
$*\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$

جدول (3):جدول انتقال الأوتومات الحتمي الذي يحوي الحالات القابلة ل 0 ن الحالة الابتدائية والمكافئ لأوتومات الشكل(1).

و بالتالي نجد أن مجموعة الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ للأوتومات D أي Q_D هي: $Q_D := \{\{q_0\},\{q_0,q_1\},\{q_0,q_2\},\{q_0,q_1,q_3\},\{q_0,q_1,q_2,q_3\}\}$ و مجموعة الحالات النهائية القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ للأوتومات D أي: $F_D := \{\{q_0,q_2\},\{q_0,q_1,q_3\},\{q_0,q_1,q_2,q_3\}\}$

أما مخطط الانتقال الموافق للأوتومات المنتهي الحتمي فيأخذ الشكل:



الشكل (2): أوتومات منتهي حتمي مكافئ للأوتومات المنتهي اللاحتمي المرسوم في الشكل (1).

ثانياً: تطبيق الخوارزمية المقترحة على أوتومات الشكل(1):

نضع $Q_D := \phi$ مجموعة الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية للأوتومات D و $q_{0D} := \{q_0\}$ الحالة الابتدائية لـ D ثم نضيف $\{q_0\}$ إلى Q_D أي: $Q_D := Q_D \cup q_{0D} = \{\{q_0\}\}$

الآن نوجد انتقالات الأوتومات الحتمي D من أجل الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ ورموز الدخل 0 و 1 أي نوجد $\delta_D(\{q_0\},1)$ و $\delta_D(\{q_0\},0)$:

1- $\delta_D(\{q_0\},0) = \{q_0,q_1\}$ لأن $\delta_N(q_0,0) = \{q_0,q_1\}$ وذلك حسب تعريف δ_D في الخوارزمية المقترحة

2- $\delta_D(\{q_0\},1) = \{q_0,q_2\}$ لأن $\delta_N(q_0,1) = \{q_0,q_2\}$ وذلك حسب تعريف δ_D في الخوارزمية المقترحة.

فتنتج الحالات الجديدة $\{q_0,q_1\}$ و $\{q_0,q_2\}$ وباختبار فيما إذا كانت هذه الحالات موجودة في Q_D أو لا نجد أن $\{q_0,q_1\} \notin Q_D \Rightarrow Q_D := \{\{q_0\},\{q_0,q_1\}\}$:

وكذلك فإن:

$$\{q_0,q_2\} \notin Q_D \Rightarrow Q_D = \{\{q_0\},\{q_0,q_1\},\{q_0,q_2\}\}$$

بعد ذلك نوجد انتقالات الأوتومات D للحالات $\{q_0,q_1\}$ و $\{q_0,q_2\}$ من أجل رموز الدخل 0 و 1، أي نوجد $\delta_D(\{q_0,q_1\},0)$ ، $\delta_D(\{q_0,q_1\},1)$ ، $\delta_D(\{q_0,q_2\},0)$ و $\delta_D(\{q_0,q_2\},1)$:

1- $\delta_D(\{q_0,q_1\},0) = \{q_0,q_1\}$ لأن: $\delta_N(\{q_0,q_1\},0) = \delta(q_0,0) \cup \delta(q_1,0) = \{q_0,q_1\}$

2- $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ لأن:

$$\delta_N(\{q_0, q_1\}, 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_2\} \cup \{q_1, q_3\} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

3- $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0, q_1\}$ لأن: $\delta_N(\{q_0, q_2\}, 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\}$

4- $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ لأن:

$$\delta_N(\{q_0, q_1\}, 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_2\} \cup \{q_1, q_3\} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

نلاحظ أن الحالات الناتجة هي $\{q_0, q_1\}$ و $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ،وباختبار فيما إذا كانت هذه الحالات موجودة في المجموعة Q_D أو لا نجد أن: $\{q_0, q_1\} \in Q_D$ ، أما الحالة: $\{q_0, q_1, q_2, q_3\} \notin Q_D$ وبالتالي نضيفها إلى Q_D ، أي: $Q_D := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}\}$

الآن نوجد انتقالات الأوتومات D للحالة $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ من أجل رموز الدخل 0و 1، أي نوجد $\delta_D(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, 0)$ و $\delta_D(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, 1)$ بنفس الطريقة السابقة فنجد أن:

1- $\delta_D(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, 0) = \{q_0, q_1, q_3\}$ و 2- $\delta_D(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, 1) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

نلاحظ أن الحالات الناتجة هي $\{q_0, q_1, q_3\}$ و $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ وباختبار فيما إذا كانت هاتين الحالتين موجودتين في المجموعة Q_D نجد أن: $\{q_0, q_1, q_2, q_3\} \in Q_D$ أما الحالة $\{q_0, q_1, q_3\} \notin Q_D$ ، وبالتالي نضيفها إلى Q_D أي: $Q_D := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_3\}\}$

ثم نوجد انتقالات الأوتومات D للحالة $\{q_0, q_1, q_3\}$ من أجل رموز الدخل 0و 1 بنفس الطريقة السابقة فنجد أن: 1- $\delta_D(\{q_0, q_1, q_3\}, 0) = \{q_0, q_1, q_3\}$ و 2- $\delta_D(\{q_0, q_1, q_3\}, 1) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

نلاحظ أنه لا توجد حالات جديدة ليست موجودة في Q_D وبالتالي نجد أن: $Q_D := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_3\}\}$ وهي مجموعة حالات الأوتومات D القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$. وأما $F_D := \{\{q_0, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_3\}\} \subseteq Q_D$ فهي مجموعة الحالات النهائية للأوتومات D وأي حالة منها تحوي حالة نهائية للأوتومات N وقابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$. وأما جدول الانتقال للأوتومات D المبني بتطبيق هذه الخوارزمية فيأخذ نفس الجدول (3) والذي يحوي الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية $\{q_0\}$ وانتقالاتها المرافقة ، والأوتومات D يأخذ نفس شكل الأوتومات المرسوم في الشكل(2).

ثالثاً: تحليل الخوارزميتين: قمنا بإجراء مقارنة بين نتائج الخوارزميتين التقليدية والمقترحة التي حصلنا عليها من تطبيق كل منهما على الأوتومات اللاحتمي كما في الجدول التالي:

اسم الخوارزمية	الخوارزمية التقليدية		الخوارزمية المقترحة
	المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	
عدد حالات وانتقالات NFA	4حالة ، 9 انتقال	–	4 حالة ، 9 انتقال
عدد حالات وانتقالات DFA المكافئ	16حالة،32انتقال	5 حالة،10انتقال	5 حالة،10انتقال
عدد الحالات في الـ DFA القابلة للوصول من الحالة الابتدائية وعدد الانتقالات المرافقة.	–	5 حالة،10انتقال	5 حالة،10انتقال

عدد الحالات المهملة في الـ DFA وغير القابلة للوصول من الحالة الابتدائية وعدد انتقالاتها المهملة	-	11حالة، 22انتقال	-
الكلفة الحسابية والزمنية	إن كلا من عدد الحالات في DFA والذي يساوي $16 = 2^4$ وعدد الانتقالات والذي يساوي $32 = 2.2^4$ هما عددان أسيان وهذا العدد الأسي من الحالات والانتقالات يزيد في الكلفة الحسابية لهذه الخوارزمية ويحتاج لكلفة زمنية كبيرة عند حسابه	عدد الحالات في الـ DFA هو 5 حالات و 10 انتقالات ولحسابها نحتاج لكلفة زمنية أقل من المرحلة الأولى وفقاً لعدد الحالات والانتقالات هنا	عدد الحالات في الـDFA هو 5 وعدد الانتقالات 10 وهو يحتاج لكلفة زمنية صغيرة مقارنة بالخوارزمية التقليدية في المرحلة الأولى والثانية

جدول (4): مقارنة بين نتائج كل من الخوارزميتين التقليدية والمقترحة المطبقة على الأوتومات المنتهي اللاحتمي في الشكل (1).

كما قمنا بإجراء مقارنة تحليلية بين الخوارزميتين التقليدية والمقترحة كما في الجدول التالي:

الخوارزمية التقليدية	الخوارزمية المقترحة
يكون عدد الحالات في الـ DFA أسياً لأنه يتم أخذ جميع المجموعات الجزئية لمجموعة حالات NFA فإذا كان عدد حالات الـ NFA هو n فإن عدد حالات الـ DFA يكون أسياً و هو 2^n وكذلك فإن عدد الانتقالات المرافقة لها يكون أسياً وهو $k2^n$ بفرض أن k هو عدد رموز الأبجدية $\sum$ (المرحلة الأولى) وفي المرحلة الثانية يتم التخلص من العدد الأسي لحالات وانتقالات (مسارات) الـ DFA بأخذ الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية لـ DFA فقط وانتقالاتها المرافقة وإهمال الحالات الأخرى وانتقالاتها المرافقة.	لا يكون عدد الحالات في الـ DFA أسياً وكذلك عدد الانتقالات المرافقة لها لأنه يتم هنا فقط أخذ المجموعات الجزئية لمجموعة حالات الـ NFA والقابلة للوصول من الحالة الابتدائية لـ DFA فإذا كان عدد حالات الـ NFA هو n فإن عدد حالات الـ DFA لا يكون أسياً وإنما m بحيث أن $m \leq n$ وكذلك فإن عدد الانتقالات المرافقة لهذه الحالات يكون $k.m$ بفرض أن k هو عدد رموز الأبجدية $\sum$.
مطلوب إيجاد انتقالات الـ DFA من أجل جميع الحالات والتي عددها يكون أسياً وهذا يتطلب كلفة حسابية وزمن تنفيذ طويلين (في المرحلة الأولى والثانية) مقارنة بالخوارزمية المقترحة.	مطلوب فقط إيجاد انتقالات الـ DFA من أجل الحالات القابلة للوصول من الحالة الابتدائية والتي عددها أقل أو يساوي لعدد حالات الـ NFA وهذا يتطلب كلفة حسابية وزمنية أقل مما تتطلبه الخوارزمية التقليدية وبذلك يتم التخلص من عدد الحالات الأسي وعدد الانتقالات (المسارات) الأسية .
بناء الـ DFA أكثر تعقيداً مقارنة مع الخوارزمية المقترحة	بناء الـ DFA بسيط مقارنة مع الخوارزمية التقليدية
أقل مرونة وسهولة وكفاءة مقارنة بالخوارزمية المقترحة	أكثر مرونة وسهولة وكفاءة مقارنة بالخوارزمية التقليدية
لا تتجنب بناء الحالات غير القابلة للوصول من الحالة الابتدائية وغير الضرورية و انتقالاتها المرافقة مما يزيد بعدد حالات الـ DFA وانتقالاتها المرافقة.	تتجنب بناء الحالات غير القابلة للوصول من الحالة الابتدائية وغير الضرورية وانتقالاتها المرافقة مما يقلل من عدد حالات الـ DFA وانتقالاتها المرافقة.
يتم بناء حالات ال DFA القابلة للوصول من الحالة الابتدائية مع الانتقالات المرافقة لها وذلك على مرحلتين وهذا يزيد من عدد الحسابات والعمليات (عدد حالات الـ DFA والانتقالات المرافقة لها هو عدد أسي في المرحلة الأولى) ويحتاج لزمن تنفيذ يتناسب مع عدد العمليات في هاتين المرحلتين مما يزيد في الكلفة الحسابية والزمنية لهذه الخوارزمية	يتم بناء حالات الـ DFA القابلة للوصول من الحالة الابتدائية مع الانتقالات المرافقة لها بمرحلة واحدة مما يختصر من عدد الحسابات والعمليات (عدد حالات الـ DFA والانتقالات المرافقة ليس عدداً أسياً) وبالتالي تحتاج لزمن تنفيذ أقل وهذا يخفض من الكلفة الحسابية والزمنية لهذه الخوارزمية.

جدول (5): مقارنة تحليلية بين الخوارزميتين التقليدية والمقترحة.

5- الاستنتاجات والتوصيات

تم في هذا البحث التعريف بالخوارزمية التقليدية التي تعتمد طريقة البناء الجزئي لبناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي ، ومن ثم تم اقتراح خوارزمية تعتمد طريقة البناء الجزئي أيضاً لبناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي وتم البرهان على صحتها، كذلك تم تطبيق كل من الخوارزميتين على أوتومات منته لاحتمي ومقارنة وتحليل النتائج من حيث الكلفة الزمنية والحسابية وقد توصلنا للاستنتاجات التالية:

١- تتجنب الخوارزمية المقترحة بناء الحالات غير القابلة للوصول من الحالة الابتدائية وغير الضرورية وانتقالاتها المرافقة مما يقلل من عدد حالات الـ DFA وانتقالاتها المرافقة ويجنبها التعامل مع عدد الحالات والانتقالات الأسي وهذا يخفض من الكلفة الحسابية والزمنية لهذه الخوارزمية مقارنة بالخوارزمية التقليدية.

٢- تعطي الخوارزمية المقترحة نتائج أسرع من الخوارزمية التقليدية .

ونظراً لأن الخوارزمية المقترحة بسيطة وأقل تعقيداً وأقل كلفة حسابية وزمنية من الخوارزمية التقليدية وتخفض من زمن الحساب الأسي للخوارزمية التقليدية بتجنبها ونظراً لأهمية هذا البحث وتطبيقاته المتعددة في مجال علوم الحاسوب واللغات البرمجية ومترجماتها ، لذلك نوصي بتطبيق هذه الخوارزمية عند:

- بناء أوتومات منتهي حتمي من أوتومات منتهي لاحتمي ذو تحرك ε.
- بناء أوتومات منتهي حتمي أصغري من أوتومات منتهي لاحتمي .
- بناء أوتومات منتهي حتمي أصغري من أوتومات منتهي لاحتمي ذو تحرك ε.
- عند تصميم وتنفيذ لغات البرمجة، ومترجماتها.

المراجع:

[1] Alanko,J. ; D'Agostino,G. ; Policriti ,A. ; Prezza, N.(2020). *Regular Languages meet Pre_x Sorting*,SIAM, https://epubs.siam.org/terms-privacy.
[2] Cotumaccio, N.; Prezza ,N.(2021). *On Indexing and Compressing Finite Automat*, SIAM , https://epubs.siam.org/terms-privacy.
[3] Gopalakrishnan, G. (2006). *Computation Engineering Applied Automata Theory and Logic*, Springer ,U.S.A.
[4] Hopcroft, J. E. ;Ullman ,J. D.(1979).*Introduction to Automata Theory,Languages, and Compution*,Addison-Wesly Publishing Company,Menlo Park, California.
[5] Holzer , M. ; Kutrib, M.(2011). *Descriptional and computational complexity of finite automata-A survey*, Information and Computation.Vol 209, pp. 456–470.
[6] Kao, J.; Rampersad, N.; Shallit,J. (2009), *On NFAs where all states are final, initial, or both* , Theoretical Computer Science. Vol. 410 ,PP. 5010-5021
[7] Luo, Z. ;Yang, X.; Sun, G.; Xie,Z.(2019). *Study of Two Kinds of Analysis Methods of Intrusion Tolerance System State Transition Mode*l, Review of Computer Engineering Studies.Vol. 6,No. 1, PP .23-27.
[8] Norton,D.(2009). *Algorithms for testing equivalence of fifinite automata, with a grading tool for JFLAP*, Thesis, Rochester Institute of Technology.

[9] Zhang , J.; Qian , Z . (2013) . *The Equivalent Conversion between Regular Grammar and Finite Automata.* JSEA. Vol. 6,PP. 33-37.
[10] Wirth, L.(2022) .Weighted Automata, Formal Power Series and Weighted Logic, Springer ,U.S.A.