مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (2) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (2) 2023

التطبيقات التوافقية بين فضاء ريمان المتكرر وفضاء أينشتاين

د.ميشيل حداد *

(تاريخ الإيداع 14/١٢ / 2022 – تاريخ النشر ٣/٤ / 2023)

□ ملخّص □

نقدم في هذا البحث بعض خواص التطبيقات التوافقية بين فضاءات ريمان ، ثم ندرس الشروط اللازمة والكافية لوجود تطبيق توافقي بين فضاءات ريمان على فضاء آينشتاين، بالإضافة إلى ذلك ندرس الشروط اللازمة والكافية لوجود تطبيق توافقي من فضاء متكرر على فضاء آينشتاين.

كلمات مفتاحية: تطبيق توافقي – فضاء متكرر – فضاء آينشتاين – فضاء ريمان.

*: أستاذ مساعد في جامعة الوادي الدولية – كلية الهندسة – قسم العلوم الأساسية

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (7) العدد (2) 2023

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (7) No. (2) 2023

Conformal mappings between recorent Remannians space and Eainstain space

Dr.Michael Haddad*

(Received 14/12/2022.Accepted 3 /4/2023)

□ABSTRACT □

In this research consider properties of conformal mapping between Remannian spaces, then fiend necessary and sufficient conditions to be exist conformal mapping from Remannian space to Eienstine space.

The team study necessary and sufficient conditions to be exist conformal mapping from recorent space to Eienstain space.

Key words: Conformal mapping , Recorent space , Einestin space, Remannian space.

*:Prof at the Wadi International University –Engineering Faculty– Department of Math.

أهمية البحث:

إن دراسة التطبيقات التوافقية بين فضاءات ريمان وغيرها من الفضاءات أهمية خاصة في العلوم الرياضية والفيزيائية المختلفة المستخدمة في علوم الفضاء والفلك وحركات النجوم. كما لها استخدامات عديدة في دراسة الحقول الكهربائية والمغناطيسية والأِشعة السينية ، أضف إلى ذلك استخداماتها في تطبيقات نظرية أينشتاين.

- هدف البحث:

1)– يهدف البحث إلى تحديد خواص التطبيقات التوافقية بين فضاءات ريمان.

2)– كما يهدف البحث إلى دراسة التطبيقات التوافقية بين فضاءات ريمان وفضاءات أينشتاين.

3)– أيضاً يهدف البحث لتحديد الشروط اللازمة والكافية لوجود تطبيق توافقي بين فضاء ريمان المتكرر إلى فضاء أينشتاين.

- مقدمة

تمت دراسة التطبيقات التوافقية بين فضاءات ريمان من قبل العديد من العلماء ميكش وكورباتفا وسينيكوف ويانا وغيرهم [1–14].

وتم دراسة التطبيقات الهومومرفية بين فضاءات كيلير من قبل ميكش وكورباتفا وسينيكوف ويانا وأتسوكس وحداد وغيرهم [15–21] .

ونتابع في هذا البحث دراسة التطبيقات التوافقية بين فضاءات ريمان الخاصة (المتكررة وفضاءات آينشتاين).

التطبيقات التوافقية بين فضاء ريمان المتكرر وفضاء أينشتاين

- تعاريف ومفاهيم أساسية في التطبيقات التوافقية:

تعريف (1) [1]:

فضاء ريمان V_n هو منطوي تفاضلي متناظر معرف عليه تنسور من النوع $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ g_{ij} يحقق الخواص:

$$\begin{aligned} &a)\quad g_{ij}=g_{ji}\\ &b)\quad de(g_{ij})\neq 0\\ &c)\quad g_{ij}>0 \end{aligned}\qquad (1)$$

تعريف (2) [2]:

التطبيق التوافقي: ليكن $\overline{V_n}, V_n$ فضائي ريمان و $\overline{g_{ij}}(x), g_{ij}(x)$ تنسوري ريمان لـ $\overline{V_n}, V_n$ على الترتيب.

يكون التماثل التفاضلي : $f: V_n \longrightarrow \overline{V_n}$ تطبيقاً توافقياً إذا تحققت العلاقة الآتية بين تنسوري ريمان $\overline{g_{ij}}(x), g_{ij}(x)$ للفضاءين $\overline{V_n}, V_n$ في نظام إحداثي مشترك (x).

$$\overline{g_{ij}}(x)=e^{2\psi(x)}g_{ij}(x) \qquad (2)$$

حيث $\psi(x)$ – صامد ما.

- إذا كان : $\psi(x)\equiv 0$ فإن التطبيق التوافقي يسمى متقايس.
- إذا كان : $\psi(x)\equiv const$ فإن التطبيق التوافقي يسمى ثابت.

مبرهنة (1):

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق f من V_n إلى $\overline{V}_n$ توافقياً. هو أن تتحقق الشروط الآتية بين رموز كريستوفل $\overline{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ للفضائين $\overline{V_n}, V_n$ على الترتيب.

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \psi_i \delta_i^h + \psi_j \delta_i^h - \psi^h g_{ij} \qquad (3)$$

من العلاقة (2) نجد أن: $\overline{g}^{ij} = e^{-2\psi} g^{ij}$.

ومن العلاقات:

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}\right)$$

$$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \partial_k g_{ij}$$

$$\Gamma_{jk}^i = g^{ih}$$

التي تحدد رموز كريستوفل من النوعين الأول والثاني ومن (1) و (2) نجد:

$$\partial_k \overline{g}_{ij} = \partial_{,k}\left(e^{2\psi} g_{ij}\right) = 2e^{2\psi}\psi_k g_{ij} + e^{2\psi}\partial_k g_{ij}$$

$$\overline{\Gamma}_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\partial_{,j}\overline{g}_{ik} + \partial_{,k}\overline{g}_{ij} - \partial_{,i}\overline{g}_{jk}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2e^{2\psi}\psi_{,j} g_{ik} + e^{2\psi}\partial_{,j} g_{ik} + 2e^{2\psi}\psi_{,k} g_{ij} + e^{2\psi}\partial_{,k} g_{ij} - \right.$$

$$\left. - 2e^{2\psi}\psi_{,i} g_{jk} - e^{2\psi}\partial_{,i} g_{jk}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2\psi}\left(\partial_{,j} g_{ik} + \partial_{,k} g_{ij} - \partial_{,i} g_{jk}\right) + \frac{1}{2}.2e^{2\psi}\left(\psi_{,j} g_{ik} + \psi_{,k} g_{ij} - \psi_{,i} g_{jk}\right)$$

$$= e^{2\psi}\left(\Gamma_{i,jk} + \psi_{,j} g_{ik} + \psi_{,k} g_{ij} - \psi_{,i} g_{jk}\right)$$

$$\overline{\Gamma}_{jk}^i = \overline{\Gamma}_{jkh}\overline{g}^{ih} = e^{2\psi}\left(\Gamma_{jkh} + \psi_k g_{jh} + \psi_h g_{jk} - \psi_j g_{kh}\right) e^{-2\psi} g^{ih}$$

$$= \Gamma_{jkh} g^{ih} + \psi_{,k} g_{jh} g^{ih} + \psi_{,h} g_{jk} g^{ih} - \psi_{,j} g_{kh} g^{ih}$$

$$= \Gamma_{jk}^i + \psi_{,k}\delta_j^i - \psi_{,j}\delta_k^i + g_{jk} g^{ih}\psi_{,h} ,$$

حيث: $\psi_i = \frac{\partial\psi}{\partial x^i} = \psi_{,i}$.

من هنا نجد:

$$\overline{\Gamma}_{i,jk} = e^{\psi}\left(\Gamma_{i,jk} + g_{ij}\psi_{,k} + g_{ik}\psi_{,j} - g_{jk}\psi_{,i}\right) \qquad (4)$$

$$\overline{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i\psi_{,k} + \delta_k^i\psi_{,j} - g_{jk} g^{ih}\psi_{,h} \qquad (5)$$

*- ولإيجاد العلاقة بين تنسوري ريمان $\overline{R}_{ijk\ell}, R_{ijk\ell}$ للفضائين $\overline{V}_n, V_n$ ننطلق من العلاقة بين تنسور ريمان كريستوفل $R_{ijk\ell}$ للفضاء V_n ورموز كريستوفل $\Gamma_{h,ij}$ [12]:

$$R_{ijk\ell} = \partial_k \Gamma_{i,j\ell} - \partial_\ell \Gamma_{i,jk} + \Gamma_{jk}^{\psi}\Gamma_{\psi,i\ell} - \Gamma_{j\ell}^{\psi}\Gamma_{\psi,ik}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_{jk} g_{i\ell} + \partial_{j\ell} g_{ik} - \partial_{i\ell} g_{ik} - \partial_{ik} g_{j\ell}\right) + \qquad (6)$$

$$+ g^{\psi h}\left(\Gamma_{\psi,i\ell}\Gamma_{h,jk} - \Gamma_{\psi,ik}\Gamma_{h,j\ell}\right)$$

واستناداً إلى العلاقة بين رموز كريستوفل $\Gamma_{i,jk}$ وتنسور ريمان:

$$\Gamma_{i,j\ell}=\frac{1}{2}\left(\partial_j g_{i\ell}+\partial_\ell g_{ij}-\partial_i g_{j\ell}\right) \qquad (7)$$

نعوض من $\Gamma_{\psi,ij}$, g_{ij} في $\overline{\Gamma}_{\psi,ij}$, $\overline{g}_{ij}$ من العلاقات (1) و (2) و(3) وبالتعبير عن الطرف الأيمن الناتج من خلال ψ, $R_{ijk\ell}$ نجد العلاقة:

$$\begin{aligned} e^{-2\psi}\overline{R}_{ijk\ell} &= R_{ijk\ell}+g_{i\ell}\psi_{jk}+g_{jk}\psi_{i\ell}-g_{ik}\psi_{j\ell}- \\ &-g_{j\ell}\psi_{ik}+\Delta_1\psi\left(g_{i\ell}g_{jk}-g_{ik}g_{j\ell}\right), \end{aligned} \qquad (8)$$

حيث:

$\psi_{ij}=\psi_{,ij}-\psi_{,i}\psi_{,j}$ و $\Delta_1\psi$ – مؤثر بلترامي الأول : $\Delta_1\psi=g^{ij}\psi_{,i}\psi_{,j}$.

وبتقليص العلاقة (8) بالدليلين ℓ,i باستخدام التنسور $\overline{g}^{i\ell}$ الموضح بالعلاقة (2) نجد العلاقة بين تنسوري ريتشي للفضاءين $\overline{V}_n,V_n$.

$$\begin{aligned} \overline{R}_{jk} = \overline{g}^{i\ell}R_{ijk\ell} &= R_{ijk\ell}\overline{g}^{i\ell}+g_{i\ell}\overline{g}^{i\ell}\psi_{jk}+g_{jk}\overline{g}^{i\ell}\psi_{i\ell}-g_{ik}\overline{g}^{i\ell}\psi_{j\ell}- \\ &-g_{j\ell}\overline{g}^{i\ell}\psi_{ik}+\Delta_1\psi\left(g_{i\ell}g_{jk}-g_{ik}g_{j\ell}\right)\overline{g}^{i\ell} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{g}^{i\ell}\overline{R}_{ijk\ell} &= \left(R_{ijk\ell}g^{i\ell}+g_{i\ell}g^{i\ell}\psi_{jk}+g_{jk}g^{i\ell}\psi_{i\ell}-g_{ik}g^{i\ell}\psi_{j\ell}-\right. \\ &\left.-g_{j\ell}g^{i\ell}\psi_{ik}+\Delta_1\psi\left(g_{i\ell}g_{jk}-g_{ik}g_{j\ell}\right)g^{i\ell}\right)= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &=\left(R_{jk}+\delta_i^i\psi_{jk}+g_{jk}g^{i\ell}\psi_{i\ell}-\delta_k^\ell\psi_{j\ell}-\delta_j^i\psi_{ik}+\right. \\ &\quad\left.+\Delta_1\psi\left(g_{j\ell}g^{i\ell}g_{jk}-g_{ik}g_{j\ell}g^{i\ell}\right)\right) \\ &=\left(R_{jk}+n\psi_{jk}+g_{jk}g^{i\ell}\psi_{i\ell}-\delta_k^\ell\psi_{j\ell}-\delta_j^i\psi_{ik}+\Delta_1\psi n g_{jk}-\Delta_1\psi g_{jk}\right) \\ &=\left(R_{jk}+n\psi_{jk}+\left(\psi_{,i\ell}-\psi_{,i}\psi_{,\ell}\right)g^{i\ell}g_{jk}-\delta_k^\ell\psi_{j\ell}-\delta_j^i\psi_{ik}+\Delta_1\psi g_{jk}(n-1)\right) \\ &=\left(R_{jk}+n\psi_{jk}+\left(\psi_{,i\ell}g^{i\ell}-\psi_{,i}\psi_{,\ell}g_{i\ell}\right)g_{jk}+\delta_k^\ell\psi_{i\ell}-\delta_j^i\psi_{ik}+\Delta_1\psi g_{jk}(n-1)\right) \\ &=R_{jk}+n\psi_{jk}+\Delta_2\psi g_{jk}-\Delta_1\psi g_{ik}+\delta_k^\ell\psi_{j\ell}-\delta_j^i\sigma_{ik}+\Delta_1\psi g_{jk}(n-1) \\ &=R_{jk}+n\psi_{jk}+\Delta_2\psi g_{jk}+\delta_k^\ell\psi_{j\ell}-\delta_j^i\psi_{ik}+\Delta_1\psi g_{jk}(n-2) \\ &=R_{jk}+n\psi_{jk}+\delta_k^\ell\psi_{j\ell}-\delta_j^i\psi_{ik}+\left(\Delta_2\psi+\Delta_1\psi(n-2)\right)g_{jk} \\ &=R_{jk}+n\psi_{jk}-\psi_{jk}-\psi_{jk}+\left(\Delta_2\psi+\Delta_1\psi(n-2)\right)g_{jk} \\ &=R_{jk}+(n-2)\psi_{jk}+\left[\Delta_2\psi+\Delta_1\psi(n-2)\right]g_{jk} \end{aligned}$$

وبهذا نحصل على العلاقة:

$$\overline{R}_{jk}=\overline{g}^{i\ell}\overline{R}_{ijk\ell}=R_{jk}+(n-2)\psi_{jk}+\left[\Delta_2\psi+(n-2)\Delta_1\psi\right]g_{jk} \qquad (9)$$

حيث $\Delta_2\psi$ – مؤثر بلترامي الثاني الموضح بالعلاقة:

$$\Delta_2\psi=g^{ij}\psi_{,ij}$$

بتقليص العلاقة (9) بالدليلين k,j بوساطة التنسور $\overline{g}^{jk}=e^{-2\psi}g^{jk}$ نجد:

$$\begin{aligned} \overline{R}=\overline{g}^{jk}\overline{R}_{jk} &= e^{-2\psi}g^{jk}\left(R_{jk}+(n-2)\psi_{jk}+\left[\Delta_2\psi+(n-2)\Delta_1\psi\right]g_{jk}\right) \\ &=e^{-2\psi}\left(R_{jk}g^{jk}+(n-2)\psi_{jk}g^{jk}+\left[\Delta_2\psi+(n-2)\Delta_1\psi\right]g_{jk}g^{jk}\right) \end{aligned}$$

$$= e^{-2\psi}\left(R + (n-2)(\psi_{,jk} - \psi_{,j}\psi_{,k})g^{jk} + [\Delta_2\psi + (n-2)\Delta_1\psi].n\right)$$
$$= e^{-2\psi}\left(R + (n-2)(\Delta_2\psi - \Delta_1\psi) + [\Delta_2\psi + (n-2)\Delta_1\psi].n\right)$$
$$= e^{-2\psi}\left(R + n\Delta_2\psi - n\Delta_1\psi - 2\Delta_2\psi + 2\Delta_1\psi + n\Delta_2\psi + (n-2)n\Delta_1\psi\right)$$
$$= e^{-2\psi}\left(R + 2(n-1)\Delta_2\psi + (n-1)(n-2)\Delta_1\psi\right)$$

من هنا نجد:

$$\overline{R} = e^{-2\psi}\left(R + 2(n-1)\Delta_2\psi + (n-1)(n-2)\Delta_1\psi\right) \qquad (10)$$

– **لندرس الآن** : التطبيقات التوافقية من فضاءات ريمان إلى فضاءات آينشتاين.

تعريف (3) [12]:

فضاء ريمان V_n يسمى فضاء آينشتاين إذا حققت الشرط:

$$R_{ij}(x) = \rho(x) g_{ij}(x)$$

أي إذا كان تنسور ريتشي متناسب مع التنسور المتري للفضاء.

والسؤال هل يوجد تطبيق توافقي من فضاء ريمان V_n على فضاء آينشتاين $\overline{V}_n$، تجيب عن ذلك المبرهنة الآتية:

مبرهنة (2):

يكون التماثل التفاضلي: $f: V_n \longrightarrow \overline{V}_n$ من فضاء ريمان V_n إلى فضاء آينشتاين ، تطبيقاً توافقياً إذا وجد حل في V_n للمعادلة:

$$S_{,ij} = SL_{ij} + ug_{ij} \qquad (11)$$

حيث: $L_{ij} = \dfrac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \dfrac{R}{2(n-1)}g_{ij}\right)$.

$$u = C + \frac{R}{2(n-1)(n-2)}S \qquad , \ (S > 0 \quad \text{من حد ما})$$

بالنسبة لصامد ما $(S \neq 0)$ و يحقق التنسور $\overline{g}_{ij}$ للفضاء $\overline{V}_n$ العلاقة:

$$\overline{g}_{ij}(x) = S^{-2}(x) g_{ij}(x) \qquad (12)$$

الإثبات:

بفرض أن $S_i = S_{,i}$ ، عندئذٍ (8) تأخذ الشكل:

$$\begin{aligned} &a) \quad S_{,i} = S_i \\ &b) \quad S_{i,j} = SL_{ij} + ug_{ij} \end{aligned} \qquad (13)$$

الشروط التكاملية للعلاقة (13–a) تأخذ الشكل:

$$S_{,ij} = S_{,ji}$$
$$S_{i,j} = S_{j,i}$$

بالتعويض في (13–b) نجد:

$$S_{i,j} - S_{j,i} = SL_{ij} + ug_{ij} - SL_{ij} - ug_{ij} = 0$$

أي أن الشروط التكاملية لـ (13–a) محققة.

لنأخذ الشروط التكاملية لـ (13–b) للتنسور $S_{,i}$ وذلك بالنسبة لتنسور ريتشي نجد:

$$S_{i,jk} - S_{i,kj} \equiv R^{\alpha}_{ijk} \; S_{\alpha}$$

لنجد بداية:

$$S_{i,jk} = \left(SL_{ij} + ug_{ij}\right)_{,k} = S_{,k}L_{ij} + SL_{ij,k} + u_{,k}g_{ij}$$

عندئذٍ:

$$S_kL_{ij} + SL_{ij,k} + u_{,k}g_{ij} - S_iL_{ik} - SL_{ik,j} - u_{,j}g_{ik} = S_{\alpha}R^{\alpha}_{ijk}$$

بتبسيط العلاقة الأخيرة نجد:

$$S_{\alpha}R^{\alpha}_{ijk} = SS_{ijk} + S_kL_{ij} - S_iL_{ik} + u_{,k}g_{ij} - u_{,j}g_{ik} \qquad (14)$$

حيث:

$$S_{ijk} = L_{ij,k} - L_{ik,j} \qquad (14\text{–a})$$

بتقليص العلاقة (14) بـ g^{ij} نجد:

$$S_{\alpha}R^{\alpha}_{k} = SS_{,\alpha k} + S_{k\alpha} - S_{\alpha}L^{\alpha}_{k} + u_{,k}(n-1) \qquad (14\text{–b})$$

حيث:

$$L = L_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$$

واستناداً إلى تعريف المؤثر L_{ij} نجد:

$$L = L_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \frac{1}{n-2}\left(R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} - \frac{R}{2(n-1)}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{n-2}\cdot\frac{2n-2-n}{2(n-1)}R = \frac{R}{2(n-1)}$$

نجد:

$$L = \frac{R}{2(n-1)} \qquad (14\text{–c})$$

$$S^{\alpha}_{,\alpha k} = \left(L^{\alpha}_{,\alpha k} - L^{\alpha}_{.k,\alpha}\right) = \frac{1}{n-2}\left(R^{\alpha}_{.\alpha,k} - \frac{R_{,k}}{2(n-1)}S^{\alpha}_{\alpha} - R^{\alpha}_{.k,\alpha} + \frac{R_{,\alpha}}{2(n-1)}S^{\alpha}_{k}\right)$$

$$= \frac{1}{n-2}\left(R_{,k} - \frac{R_{,k}}{2(n-1)}.n - \frac{1}{2}R_{,k} + \frac{R_{,k}}{2(n-1)}\right) = 0$$

من هنا نجد:

$$S^{\alpha}_{.\alpha,k} = 0 \qquad (14\text{–d})$$

بالتعويض عن (14–a) و (14–b) في (14) نجد:

$$S_{\alpha}R^{\alpha}_{k} = \frac{R}{2(n-1)}S_k - S_{\alpha}L^{\alpha}_{k} + u_{,k}(n-1)$$

أي أن:

$$u_{,k} = \frac{1}{n-1}\left[S_{\alpha}R^{\alpha}_{k} + S_{\alpha}L^{\alpha}_{k} - \frac{R}{2(n-1)}S_k\right]$$

بالاختصار نجد:

$$u_{,k} = \frac{1}{n-1}\left[S_\alpha L_k^\alpha + S_\alpha\left(R_k^\alpha - \frac{R}{2(n-1)}S_k^\alpha\right)\right]$$
$$= \frac{1}{n-1}(n-1)S_\alpha L_k^\alpha = S_\alpha L_k^\alpha$$

من هنا نجد علاقة $u_{,k}$ وهي:

$$u_{,k} = S_\alpha L_k^\alpha \qquad (15)$$

تمثل العلاقات (13–a,b) و (15) جملة معادلات تفاضلية خطية من النوع الأول لكوشي بالنسبة لـ S_i, u, S .

***– لندرس التطبيق التوافقي من فضاء المتكرر على فضاء آينشتاين.**

تعريف (4) [12]:

يسمى فضاء ريمان فضاءً متكرراً إذا حقق تنسور ريمان للفضاء الشرط:

$$R_{hijk,\ell} = \varphi_\ell R_{hijk} \qquad (16)$$

حيث المتجه φ_ℓ هو متجه تدرج ، أي: $\varphi_\ell = \varphi_{,\ell}$.

نجد من (16) أن:

$$R_{ij,k} = \varphi_k R_{ij} \qquad (17)$$
$$R_{,k} = \varphi_k R \qquad (18)$$
$$L_{ij,k} = \varphi_k L_{ij} \qquad (19)$$
$$C_{hijk,\ell} = \varphi_\ell L_{ij} \qquad (20)$$

بتقليص (16) بـ g^{hk} حصلنا على (17) وبتقليص (17) بـ g^{ij} حصلنا على (18).

إن العلاقات [16–20] تسمى العلاقات الأساسية للتطبيقات التوافقية من فضاء ريمان على فضاء آينشتاين .

لنحدد في المبرهنة الآتية طبيعة أسرة فضاءات أينشتاين التي تكون منطلقاً لتطبيقات توافقية.

مبرهنة (3):

إن أسرة فضاءات التي تتعلق بوسيط واحد هي منطلق لتطبيقات توافقية على فضاءات ريمان المتكررة.

الإثبات:

لنأخذ الشروط التكاملية لهذه العلاقات:

$$S_\alpha C_{ijk}^\alpha = S\, S_{ijk} \qquad (21)$$

حيث S_{ijk} في الفضاءات المتكررة يأخذ الشكل المختصر الآتي:

$$S_{ijk} = L_{ijk} - L_{ik,j}$$

واستناداً إلى (19) نجد:

$$S_{ijk} = L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j \qquad (22)$$

بأخذ المشتق موافق التغير بـ x^ℓ في (21) نجد:

$$S_{\alpha,\ell}C_{ijk}^\alpha + S_\alpha C_{ijk,\ell}^\alpha = S_{,\ell}S_{ijk} + S\, S_{ijk,\ell}$$

واستناداً إلى (20) و (22) نجد:

$$S_{\alpha,\ell}C^{\alpha}_{ijk} + S_{\alpha}C^{\alpha}_{ijk,\ell} =$$
$$S\left(L_{ij,\ell}\varphi_k - L_{ik,\ell}\varphi_j\right) + S_{,\ell}\left(L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j\right) + S\left(L_{ij}\varphi_{k\ell} - L_{,k}\varphi_{j,\ell}\right)$$

من (21) نجد:

$$S_{\alpha,\ell}C^{\alpha}_{ijk} = S_{,\ell}\left(L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j\right) + S\left(L_{ij}\varphi_{k\ell} - L_{,k}\varphi_{j,\ell}\right)$$

$$SL_{\alpha\ell}C^{\alpha}_{ijk} + uC_{\ell ijk} = S\left(L_{ij}\varphi_{k,\ell} - L_{ik}\varphi_{j,\ell}\right) + S_{\ell}\left(L_{ij}\varphi_k - L_{ij}\varphi_j\right) \qquad (23)$$

بفرض: $L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j \neq 0$.

عندئذٍ يوجد تنسور ε^{ijk} من الفضاء يحقق:

$$\left(L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j\right)\varepsilon^{ijk} = 1$$

إذا كان $L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j \neq 0$ فإن:

$$S_{\ell} = S.a_{\ell} + ub_{\ell}$$

حيث a_{ℓ} و b_{ℓ} متجهات ما من الفضاء ذاته.

بضرب (23) بـ a_{ℓ} و b_{ℓ} نجد:

$$C_{\ell ijk} \neq 0 \; S\left(L_{\alpha\ell}C^{\alpha}_{ijk} - L_{ij}\varphi_{k,\ell} - a_{\ell}\left(L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j\right)\right) + u\left(C_{\ell ijk} - b_{\ell}\left(L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j\right)\right) = 0$$

لنفرض أن:

$$C_{\ell ijk} = b_{\ell}S_{ijk} = b_{\ell}\left(L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j\right)$$

حيث: $L_{ij}\varphi_k - L_{ik}\varphi_j = S_{ijk}$.

وبإجراء عملية التناظر التنسوري بالدليلين i, ℓ نجد:

$$C_{\ell ijk} + C_{i\ell jk} = b_{\ell}S_{ijk} + b_iS_{\ell jk}$$

(حسب خواص تنسور ريمان) $C_{\ell ijk} + C_{i\ell jk} = 0$

ومنه:

$$b_{\ell}S_{ijk} + b_iS_{\ell jk} = 0$$

وبفرض $b_{\ell} \neq 0$ فإنه يوجد ε^{ℓ} بحيث:

$$\varepsilon^{\ell}b_{\ell} = 1$$
$$b_{\ell}\varepsilon^{\ell}S_{ijk} + b_i\varepsilon^iS_{\ell jk} = 0$$
$$S_{ijk} + S_{\ell jk} = 0$$

وبضرب الأخيرة بـ ε^{α} نجد:

$$2S_{\alpha jk}\varepsilon^{\alpha} = 0$$

وباعتبار أن $\varepsilon^{\ell} \neq 0$ فإن $S_{ijk} = 0$ ومنه فإن:

$$u = 1.S$$
$$S_{\ell} = a_{\ell}.S \quad ; \quad u = b.S$$
$$S_{ij} = a_{i,j}.S + a_i.a_jS = SL_{ij} + bg_{ij}.S$$

يكون أيضاً:

$$a_{i.j} + a_ia_j = L_{ij} + bg_{ij}$$
$$b_{,i} = ba_i = a_{\alpha}L^{\alpha}_i \qquad (24)$$

من هنا نجد أن فضاءات ريمان المتكررة V_n التي تحقق الشرط $R_g\|L_{ij}\|>1$ تكون منطلقاً لتطبيق توافقي على فضاءات آينشتاين إذا وفقط إذا وجد وسيط a_ℓ يحقق الشرط:

$$a_\ell = \left(L_{\alpha,\ell}C^{\alpha}_{ijk} - L_{ij}\varphi_{k,\ell} + L_{ik}\varphi_{j,\ell}\right)S^{ijk} \qquad (25)$$

- المقترحات والتوصيات:

نتمنى من الباحثين في فضاءات ريمان الخاصة دراسة التطبيقات التوافقية بشكل موسع بين مختلف فضاءات ريمان الخاصة.

المراجع الأجنبية:

1- BRINKMANN, H.W.: *Einstein spaces which are mapped conformally on each other*. Math. Ann. 94, 117-145, 1925.

2- COUTY, R.: *Transformations projectives sur un espace d'Einstein complect*. C.R., Acad. Sci. 252, 8, 1096-1097, 1961.

3- MIKES, J.: *Geodesic mappings of Einstein spaces*. Math. Notes, 28, 922-923, 1981; translation from Mat. Zametki, 28, 935-938, 1980.

4- MIKES, J.: *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces*. J. Math. Sci., New York, 78, 3, 311-333, 1996.

5- MIKES, J.: *Holomorphically projective mappings and their generalizations*. J. Math. Sci., New York, 89, 3,1334-1353, 1998.

6- PETROV, A.Z.: *New Method in general relativity theory*. Moscow: Nauka, 495p., 1966.

7- PETROV, A.Z.: *Simulation of physical fields. In: Gravitation and the Theory of Relativity*, Vol. 4-5, Kazan' State Univ., Kazan, 7-21, 1968.

8- RADULOVICH, ZH.: *Holomorphically- Projective mappings of parabolically – Kahlerian Spaces*. Math. Montisnigri, Vol VIII, 159-184, 1997.

9-Домашев В.В. , Микеш й . К теории *голоморфно- проективных отображений келеровых пространств //* Мат . заметки , 1978 , 28 , №2 . С.297 – 303.

10-Курбатова И.Н. *HP-отображения H-пространств*//Укр геom.сб. , 1984 . вып.24 . С.75-82 .

11-Микеш й . , Синюков Н.С. О *квазипланарныхотображениях пространств аффинной связности*// Изв вузов , Матем . 1983. - №3 . С.55-61 .

12- Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств*// М .: Наука , 1979. 275с .

13- Ishihara S. *Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold*// Tohoku Math . J. , 1957.9 . №3 . p.273-294 .

14- Jano K. *Differential Geometry of Complex and Almost Complex Spaces* / Pergamon Press , 1965 .

15- , Mikes J. , Vanzurova A. , *Hinterleitner I. Geodesic Mappings and Some Generalizations// Palacky University* . Olomouc , Faculty of Science . Olomouc , 2009.

16- Otsuki T. , Tashiro J. *On curves in Kahlerian spaces*// Math.J.Okayama Univ . , 1954 , 4. №1 . p.57-78 .

17- Tashiro J. On *holomorphically projective correspondences in an almost complex spaces*// Math.J.Okayama Univ . , 1957 , 6 , №2 . p.142-152 .

18 -Курбатова Т.Н., . Добик М.В. *Особенности F-планарных отображений квазисимплектических пространств* . Тез.докл . Международной конференции " Геометрия в Одессе - 2014 - Одесса . 2014 .
19- Фоменко А.Т.*Дифференциальная геометрия и топология* . Дополнительные главы . Изд-во МГУ , 1983 .
20- Hadad, M. *Holomorphically projective mapping of T- quasisemisymetric and generally semisymetric space,* Proc. F Conf. Diff. Geom. And its Appl. Opava, 143-149, 1992.
21- М.ХАДДАД: ГОЛОМОРФНО- *ПРОЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖНИЯХ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ КЕЛЕРА*- *ЭЙНШТЕЙНА.* ИЗВЕСТИЯ.26.4.1.2011 ISSN 19999-7116.
22- Hinter Leinter I. *on conformally projective mapping of equidistant manifolds with the Friedman molds as example* . Proc. 6^{th}, Int conf. Aplimat 97 – 102; 2017.
23- Chuda H. Shiha, M. *conformal holomorphically project mappings satisfying a certain initial condition* . Miskolc/ uath. Notes 14:2, 569- 574; 2013.