مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (1) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (1) 2022

دراسة بعض المقادير الترموديناميكية للغاز البوزوني الحر الواقع تحت كمون قِوى فعّال في N بعد

د. آصف محسن يوسف*

(تاريخ الإيداع 27/12/ 2021– تاريخ النشر 20/ 2/ 2022)

□ ملخّص □

تمّ في هذا البحث حساب بعض المقادير الترموديناميكية لغاز بوزه تحت كمون قوى فعال عام في فراغ dمتعدد الأبعاد. حيث تمّ حساب السعة الحرارية عند درجة الحرارة الحرجة لغاز بوزه – آينشتاين المتكاثف . تبين من خلال الحساب أن المقادير الفيزيائية المدروسة هنا تابعة لدرجة الحرارة والكمون الخارجي وكذلك تتبع أبعاد الفراغ ، كما يمكن حساب أغلب المقادير الفيزيائية بنفس الطريقة المتبعة هنا نظرياً وحسابها بدقة . تمّ مقارنة هذه النتائج مع ما هو متوفر لدينا من المراجع من أجل أبعاد فراغ أصغر من d التي تم حسابها في بحثنا الحالي.

الكلمات المفتاحية :غاز بوزه – أينشتاين المثالي، تابع التحاص، الكمون الخارجي متعدد الأبعاد

*أستاذ مساعد في قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية، سوريا.

Study of some thermodynamic parameter of Bose-Einstein gas under effective force potential in N Dimensions

Dr. Asef Youssef*

(Received 27/12/2021.Accepted 20/2/2022)

□ABSTRACT □

In this paper we calculate pressure and heat capacity of Bose-Einstein gas under external effective potential at critical temperature in N Dimensions. We conclude that all quantities treated hire are dependent of dimensionality precisely. We also compared our results with other expressions available in literature.

*assistant prof at physics department- faculty of sciences – tishreen university - Lattakia – .Syria

مقدمة:

فتحت نتائج التجارب التي أجراها E.Cornell ,C.Wieman ,W. Ketterlle [1] الباب على فيزياء جديدة حيث تم التحقق من وجود تكاثف بوزة – أينشتاين في المختبر تجريبياً، وقد أجريت هذه التجارب على بخار الربيديوم (Rubidium) والصوديوم (Sodium) وغيرها من المعادن....

تلاحقت بعد هذا الكشف البحوث والتجارب لتطبيقها في جميع مجالات التكنولوجيا الحديثة وخاصة في مجال التبريد والليزر وتطبيقات البلازما. كان لا بد من الفهم العميق للظواهر الترموديناميكية أولاً وهي تستند الى قوانين الفيزياء الإحصائية مثل توزع ماكسويل – بولتزمان ، توزع فيرمي – ديراك ، وتوزع بوزة – أينشتاين. ترتبط هذه التوزعات بطريقة رياضية معقدة مع تابع غاما الذي يأخذ الشكل التالي: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

$(\alpha > 0)$ يتمتع هذا التابع بالخواص الآتية:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

تظهر الدراسات الحالية في الفيزياء النظرية أهمية بالغة لفهم ظاهرة تكاثف بوزه – آينشتاين (BEC) من جميع جوانبها حيث تُظهر هذه الدراسات أن التكاثف يمكن أن يحدث حتى في جملة البوزونات الحرّة [1,5] ، وجذبت هذه الظاهرة الكثير من الباحثين في الآونة الأخيرة لأهمية ظاهرة التكاثف وخاصة في مجال التبريد ومعالجة السطوح والصناعة بمختلف أنواعها. لفهم ظواهر فيزيائية أخرى تنتج عنها وخاصة في الغازات القلوية المحصورة (المقيّدة) مغناطيسياً magnetically trap alkali gases [6−9] .كنتيجة للدراسات هذه وهي متنوعة ومختلفة جداً وقد دُرست أهمية أبعاد هذه الجمل [10−15] والمنطقة بجوار النقط الحرجة لهذه الظواهر وأثر كازيمير الكمي Casimir effect [18−21] لجملة البوزونات حيث تمّ انجاز النتائج تجريبياً في الآونة الأخيرة [16−18] مع ملاحظة تكاثف بوزه – آينشتاين في جملة بوزونات عديمة الكتلة ، هذه التجربة تُمثل تحدياً كبيراً أنجزه الباحثون التجريبيون في هذا المجال .

كما نعلم أنه لا بدّ من وجود التأثير المتبادل بين الجزيئات (interaction between particles) في الجمل الحقيقية وبأخذ التأثير المتبادل بين الجسيمات البوزونية بعين الاعتبار تُصبح دراسة الظاهرة وحساب المقادير الفيزيائية غايةً في الصعوبة تحليلياً . أما تجريبياً يؤخذ التأثير المتبادل بين الجسيمات عند درجة الحرارة الحرجة T_c ونسبة التكاثف N_0/N حيث N العدد الكلي للبوزونات ضعيفاً [21] . وهنا تمّ افتراض أنه في حالة الكثافات المنخفضة يمكن اعتبار جملة البوزونات على أنها جسيمات حرّة . هذا ما افترضناه هنا أيضاً في دراستنا التحليلية حيث اعتبرنا البوزونات حرّة في كمون خارجي بـ d بعد.

تكون القيود أو الشروط الحديّة المفروضة على الكمون الخارجي مؤثّرة جداً على الخواص الفيزيائية للجملة التي نقوم بدراستها وهنا تكون الطرائق الإحصائية هي الفعّالة في دراسته هذه الجمل وقد درس Salanasich [12] هذه الحالة في حالة كمون قوى خارجي متناظر من الشكل $U = Ar^n$ في d بعد وهي دراسة شيّقة ومهمة في فهم البداية للدراسة الإحصائية لحالتنا هنا . قام Salanasich بحساب المقادير

الفيزيائية المختلفة اعتماداً على عدد الجسيمات N حيث ظهر التكاثف BEC عند $\frac{d}{2}+\frac{d}{n}>1$ حيث n هي الأسّ في الكمون المستخدم من قبل Salanasich [14] .

كما نعلم فإن BEC ممكنة في الحجر (trapped) تحت كمون من أجل d=2 ولكن ليس تناظرياً ، عندها يجب اختيار n بشكل مناسب ،كما أن BEC من أجل البوزونات الحرّة عند d=3 هي تحوّل من المرتبة الأولى [7,8,10] ومن غير المعروف حتى الوقت الحاضر عن طور مرتبة التحول للبوزونات في الحجر (trapped) في حالة بعد كيفي . يُبذل في الوقت الحاضر جهد بحثي كبير نظري وتجريبي لتبيان علاقة التحول الطوريّ (phasetransition) بأبعاد الفراغ [3,10,12,13] . تمّ الحساب التحليلي للخواص الترموديناميكية وغيرها في d بعد من أجل البوزونات والفرميونات على حدٍ سواء [19,21] وبشكلٍ خاص تبيان التناظر بين الحالتين (فيرميون – بوزون) في فراغ ذو بعدين.

في بحثنا هنا سوف نحاول حساب بعض المقادير الترموديناميكية للغاز االبوزوني الحرّ في d بعد الواقع تحت كمون قوى عام ، وللقيام بهذا العمل سوف نقوم بحساب الكمون الترموديناميكي الأساسي ومن ثمّ انطلاقاً من هذا الكمون سنقوم بحساب جميع الكميات الترموديناميكية المطلوبة كالطاقة الداخلية E، الأنتروبية S ، الضغط P ،عدد الجزيئات N ، والسعة الحرارية وهذه المقادير المحسوبة تمكننا من حساب مقادير مهمة مثل نسبة التكاثف لغاز بوزه والشروط العامة لظهور حالة التكاثف .

طرائق البحث ومواده

١ – <u>علاقات أساسية :</u>

ترتبط المقادير الترموديناميكية فيما بينها بالعلاقة .

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

حيث U الطاقة الداخلية للجملة ، S الأنتروبية ، V الحجم الذي تشغله الجملة ، μ الكمون الترموديتاميكي ، N العدد الكلي للجسيمات في الجملة المدروسة.

كما أن العلاقات التفاضلية لهذه المقادير ترتبط فيما بينها بالعلاقات الآتية[7]:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) V, N$$

$$P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) S, N$$

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right) S, V$$

$$C_V = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right) V, N$$

إلى جانب هذا نستطيع من معادلة كلاوزيوس – كلابيرون (Clausius – Clapeyron) أن نبيّن أنه من أجل جملة البوزونات الحرّة عند d=3 [8,10] هي تحوّل طوريّ من المرتبة الأولى من أجل أي بُعد كان .

ملاحظة : سنأخذ في الهاملتوني المدروس هنا ap^s بدلاً من $\frac{p^2}{2m}$ حيث p الدفع و a ثابت

١– **كثافة الحالات للبوزونات الحرّة تحت كمون قوى عام** . نأخذ الطاقة بشكل عام في حالتنا كما يلي :

$$\epsilon(p, x_i) = bp^l + \sum_{i=1}^{d} C_i \left|\frac{x_i}{a_i}\right|^{n_i} \qquad (1)$$

حيث p الدفع (عزم كمية الحركة) ، x_i مركبات الموضع ، n_i, a_i, c_i تحدد الكمون المدروس هنا فمثلاً اذا أخذنا على سبيل المثال $l = 2$ و $b=1/2m$ نحصل على الهاملتوني المعروف في المراجع [7,8,10,17]

من أجل الجملة ذات الجسيمات الحرّة $n_i \to \infty$ وكذلك $A_s\left|\frac{x_i}{a_i}\right| < 1$ جميع حدود الكمون تنتهي الى الصفر عندما $n_i \to \infty$ وتعطى الكثافة بالعلاقة

$$\rho(\varepsilon) = \iint \frac{d^d r d^d p}{h^d} \delta[\varepsilon - \varepsilon(p,r)] \qquad (2)$$

بتعويض المعادلة (١) في (٢) نجد أن الكثافة تُعطى بالعلاقة

$$\rho(\varepsilon) = B \frac{\Gamma\left(\frac{d}{l}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{l}+\sum_i \frac{1}{n_i}\right)} \varepsilon^{\frac{d}{l}+\sum_i \frac{1}{n_i}-1} \qquad (3)$$

حيث

$$B = \frac{gV_d C_d}{h^d a^{\frac{d}{l}}} \prod_{i=1}^{d} \frac{\Gamma(\frac{1}{n_i}+1)}{C_i^{\frac{1}{n_i}}} \qquad (4)$$

$$C_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

g معامل تحلل السبين و $V_d = 2^d \prod_{i=1}^{d} a_i$. الحجم في d بُعد وأن تابع غاما المعروف هو

$$\Gamma(l) = \int_0^\infty x^{l-1} e^{-x} dx$$

وتابع التوزع الكبير هو

$$q = -\sum_\varepsilon \ln\left(1 - z e^{-\beta\varepsilon}\right) \qquad (5)$$

حيث

$$\beta = \frac{1}{K_b T}$$

و K_b ثابتة بولتزمان وأن $z = e^{\beta\mu}$ ، μ الكمون الكيميائي . باستخدام التوزع القانوني الكبير حيث تكون الجملة المدروسة غير مقيدة بعدد الجسيمات ويمكن أن تتبادل الطاقة مع الوسط الخارجي نستطيع استخدام قوانين التوزع لحساب القيم الوسطى لجميع المقادير الفيزيائية المطلوبة. يكون الكمون الترموديناميكي للجملة المفتوحة على الوسط الخارجي ثابتاً بينما يتغير عدد الجسيمات . لوصف هذه الجملة نستخدم تابع التحاص Ω

تعطى كثافة الحالات الطاقية بالعلاقة الآتية: Ω(T,V,μ)=F(T,V,N)−μN حيث تم أستبدال N ب μ في علاقة تابع التحاص. ويكون Ω من أجل جملة مكونة من نوع واحد من الجسيمات مساوياً :

$$\Omega = \frac{N!}{\prod_{N,J} m_{N,J}!}$$

حيث $m_{N,J}$ عدد الحالات الكلية في الجملة .يمكن استنتاج تابع التحاص الكبير (grand partition function) أو (grand canonical) الذي نستخدمه في حساب كافة المقادير الفيزيائية بعدة خطوات رياضية وبالاعتماد على علاقة ستيرلينغ (Sterling Formula) وطريقة مضاريب لاغرانج (Lagrang Multiplyer Method) المعروفتين حيث يعطي الحساب تابع التحاص بالصيغة الآتية :

$$\Omega = \sum e^{-\beta E_{N,}} e^{\gamma N}$$

حيث $\beta = \frac{1}{K_B T}$ ، $\mu = \frac{-\gamma}{\beta}$

$$g(E) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sqrt[2]{\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^3} \sqrt{E}\, dE$$

وباستخدام تقريب توماس – فيرمي نكتب التوزع القانوني الكبير (٥) كما يلي

$$q = q_0 - \int_0^\infty \rho(\varepsilon) \ln\left(1 - z e^{-\beta\varepsilon}\right) \qquad (6)$$

باستخدام كثافة الحالات العلاقة (٣) يمكن كتابة q كما يلي :

$$q = q_0 + B\Gamma\left(\frac{d}{l} + 1\right)(K_B T)^\chi g_{\chi+1}(z) \qquad (7)$$

حيث $q_0 = -\ln(1-z)$ & $\chi = \frac{d}{l} + \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{n_i}$ وأيضاً تابع توزع بور يكتب بالشكل :

$$g_l(z) = \int_0^\infty \frac{x^{l-1}}{z^{-1} e^x - 1} dx = \sum_{j=1}^\infty \frac{z^j}{j^l} \qquad (8)$$

وفي طور التكاثف يجب التأكيد على الشرطين $Z \to 1$ & $l > 1$ فيصبح التابع

$g_l(1) = \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{r^l} = \xi(l)$ وهو تابع زيتا – ريمان (9)

حساب الطاقة الداخلية للغاز البوزوني:

تُعطى الطاقة الداخلية بتابعية تابع التحاصّ بالعلاقة التالية :

$$E = -\left(\frac{\partial q}{\partial \beta}\right)_{z,V} = \frac{g C_n \Gamma\left(\frac{d}{l} + 1\right) V_d \prod_{i=1}^{d} \Gamma\left(\frac{1}{n_i} + 1\right)}{h^d b^{d/l} \prod_{i=1}^{l} C_i^{1/n_i}} (K_B T)^{\chi+1} g_{\chi+1}(Z) \qquad (10)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن الطاقة الداخلية فوق وتحت درجة الحرارة الحرجة تكون

$$E = \begin{cases} N K_B T_\chi \dfrac{g_{\chi+1}(Z)}{g_\chi(Z)} & T > T_c \\ N K_B T_\chi \dfrac{\zeta(\chi+1)}{\zeta(\chi)} \left(\dfrac{T}{T_c}\right)^\chi & T \le T_c \end{cases} \qquad (11)$$

أما في حالة الكثافة البوزونية العالية (الكثافة العالية) $n_i \to \infty$ ، $(l = 2,\ b = \frac{1}{2m}$:

تؤول العلاقة السابقة الى الشكل التالي:

$$E = \begin{cases} NK_BT\frac{d}{2}\frac{g_{\frac{d}{2}+1}(Z)}{g_{\frac{d}{2}}(Z)} & T > T_c \\ NK_BT\frac{d}{2}\frac{\zeta\left(\frac{d}{2}+1\right)}{\zeta\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{T}{T_c}^{d/2} & T \le T_c \end{cases} \quad (12)$$

وهذه النتيجة تتفق مع ما توصّل إليه Ziff [10] وهي صحيحة تماماً من أجل الطاقة الداخلية لثلاثة أبعاد d=3 [7,8] أما إذا كانت $T \gg T_c$ فإن العلاقات (١١) تُبين لنا أن الطاقة الداخلية تُصبح $E = NK_BT_x$ ومن أجل الكثافة البوزونية العالية للبوزونات الحرّة تصبح $E = \frac{d}{2}NK_BT$ والتي بدورها تُختصر الى $E = \frac{3}{2}NK_BT$ عند $d=3$ وبالتالي فإن E تُقارب القيمة الكلاسيكية المعروفة عند درجات حرارة مرتفعة.

بنفس الطريقة ومن تعريف العلاقة بين تابع التحاصّ وبقية المقادير الفيزيائية نستطيع حساب

١- الأنتروبية من العلاقة $S = K_BT(\frac{\partial q}{\partial T})_{Z,V} - NK_B\ln Z + K_Bq$

٢- السعة الحرارية عند حجم ثابت من العلاقة $C_V = \mathrm{T}(\frac{\partial S}{\partial T})_{N,V}$

وهكذا بالنسبة لبقية المقادير الفيزيائية الأخرى من علاقة تابع التحاصّ ويتم حساب عدد الجسيمات الكلي .

حساب الضغط والأنتروبية والطاقة الداخلية

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = NK_BT(\frac{\partial \ln Z}{\partial V})_T$$

حيث F الطاقة الحرّة

$$S = (Entropy) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = NK_BT\ln Z + \frac{NK_BT}{Z}\frac{\partial Z}{\partial T} = NK_B\ln Z + \frac{V}{T}$$

$$C_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_V$$

والطاقة الداخلية كما يلي :

$$U = NK_BT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T}_V = NK_BT^2\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{T} = \frac{3}{2}K_BT$$

الاستنتاجات :

١- عدد الطرق $= g_j^{n_j}$ من أجل جميع المستويات يكون عدد الطرق $= \prod_j g_j^{n_j}$ والتابع الكلّي هو $\Omega = N!\prod_j \frac{g_j^{n_j}}{n_j!}$

٢- N,E الطاقة الكلية وعدد الجسيمات . نستخدم مع هذه الشروط الحديّة طريقة مضاريب لاغرانج

$$\sum_j n_j = N \quad \& \quad \sum_j n_j\,\varepsilon_j = E$$

ينتج عنها $\ln N! \approx N\ln N - N$

n_j الاحتمال الأعظمي للتوزع الجهري للجسيمات في الغاز الحر أكان بوزون أو فيرميون

١- الجملة معزولة والطاقة E والعدد الكلي N ثابتان

٢- الجملة على تماس مع المحيط الذي له حرارة T ثابتة مع ثبات N

٣- لا شيء ثابت. Ω عدد الحالات المجهرية الممكنة في الجملة الجهرية

$S = K_B \ln \Omega$ حيث K ثابت بولتزمان $K_B = R/N_A$.

عندما تكون $\Omega = 1$ تكون *S=0* ويكون الجسم في حالة توازن وهو مرتّب تماماً.

وعندما تكون $S > 0$ $\rightarrow$ $\Omega > 1$ المعلومات المعروفة عن الجملة تصبح أقل .

المراجع:

[1]-S.N Bose, *Z.Physik* **26**, 178(1924).
[2]-A.Einstein, *Berl*. Ber. **22**, 261 (1924).
[3]-R.H. MAY, *Phys*. Rev. 135, A1515 (1964).
[4]- D.W. Robinson, *Commun.Math*. Phys 50, 53 (1976).
[5]- M. Luban,*M.Revzen*, J. Math. Phys. 9,347 (1967).
[6]- L. j. Landau, *I.F. Wilde*, *Commun*. Math. Phys. 70,43 (1979).
[7]- R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*,Elsevier,2004.
[8]-K. Huang, *Statistical Mechanics*, Wiley Eastern Limted, 1991.
[9]- C. J. Peth.ck, H. Smith, *Bose – Einstein Condensation in Dilute Cases*,*Second Edition* , Cambridge University Press, 2008.
[10]- R.M. Ziff, *Uhlenbeck, M. Kac*, Phys. Rev. 32,169 (1977).
[11]- R. Beckmann, *F. Karch, D,E*. Miller, Phys. Rev. A 25,561 (1982).
[12]- L. *Salasnich*, *J. Math*.Phys.41,8016 (2000).
[13]-F. Dalfovo, *S. Giorgini*, *L.P.Pitaevskii*,*S. Strigari*, Rev, Mod. Phys. 71,463 (1999).
[14]-L. Salasich, *A.Parola*,*L. Reatto*, Phys. Rev. A 59,2990 (1999).
[15]-A. Bhowal, M. *Acharyya*,Acta Phys. Pol. B 43, 1805 (2012).
[16]-M. *Napiorkowski*,*K. Nowak*, J. Stat.Mech.2013,06015 (2013).
[17]- S. *Biswas*,*Eur*. Phys.J. D 42,109 (2007).
[18]- M. *Acharyya*, *Commun*.Theor.phys.,55,901 (2011).
[19]- M. *Acharyya*, *Commun*.Theor.phys., 56,943,(2011).
[20]- M. *Acharyya*, *Eur*. J.Phys.31,L89 (2010).
[21]- P.C. *Hohenberg*, Phys. Rev. 158, 383 (1967).