مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (1) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (1) 2022

دراسة التصفية لعملية عشوائية متخامدة باستخدام المؤثر العكسي

د. أحمد رستم الوسوف*

(تاريخ الإيداع 27/ 2/ 2022 – تاريخ النشر 9 / 3/ 2022)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث دراسة التصفية (Filtration) لعملية عشوائية متخامدة من المرتبة الثانية، وممركزة تقع على مدخل مصفي ، وتعرضت قبل تلك اللحظة لتشويش من المرتبة الثانية (ضجيج أبيض) من مصادر متعددة وغير مرتبطة بها ، من خلال تقريب لها يعطى بالقيمة المثلى التي تعطى بدلالة تابع غرين. قمنا بحل هذه المسألة بإيجاد تلك القيمة باستخدام مفهوم التعامد في فضاء هلبرت، فحصلنا من خلالها على معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول وكان التابع المجهول فيها هو تابع غرين، وعلاوة على ذلك تم حل هذه المعادلة بإيجاد المؤثر العكسي معتمدين على مؤثر تكاملي طيفه متجمع في النقطة الصفر.

الكلمات المفتاحية : التصفية (الترشيح)، عملية عشوائية متخامدة، معادلة فريدهولم التكاملية، تابع غرين، المؤثر العكسي.

---

*أستاذ مساعد في قسم الاحصاء الرياضي بكلية العوم في جامعة تشرين

البريد الالكتروني:ahmad58alwassouf@gmail.com

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (1) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (1) 2022

Filtration Study of Dissipative Random Process Using Inverse Operator

Dr. Ahmad Rostom Alwassouf*

(Received 27/2/2022.Accepted 9/3/2022)

□ABSTRACT □

This research studies the filtration of dissipative random process of second degree and centered, applied on the filer's input , and affected before that moment by white noise of the second degree from several sources not related to it , through approximation of it given in optimal value which gets calculated using Green function. This problem is solved by calculating that value using orthogonal concept in Hilbert Space. We have been obtained using it an Fredholm integral equation of the first kind and the unknown function is Green function, and it is solved by calculation inverse operator using integral operator which spectrum is gathered in point zero.

Keywords: Filtration, Dissipative Random Process, Integral Equation, Green Function, Inverse Operator.

* Assistant Professor in Department of Mathematical Statistics, Science Faculty, Tishreen University, Lattakia, Syria.
Email: ahmad٥٨alwassouf@gmail.com

مقدمة:

تعد نظرية العمليات العشوائية واحدة من أهم التطبيقات العملية الكثيرة التي تتلخص في إيجاد أفضل قيمة للمتغير X بدلالة المتغير Y ذو القيم الملاحظة، $Y_\alpha ; \alpha \in I$، أي نفتش عن التابع $f(Y_\alpha; \alpha \in I)$ الذي يحقق المساواة التقريبية

$$\hat{X} = f(Y_\alpha;\ \alpha \in I) \qquad (1)$$

بأقل خطأ ممكن[1,7,8]، وأهم هذه التطبيقات هما عملية التصفية (Filter) والتنبؤ (Prediction).tu عملية التصفية هي أن تقوم بمراقبة العملية العشوائية Z(t)=X(t)+N(t) المؤلفة من مجموع عمليتين عشوائيتين إحداهما نافعة هي X(t) والثانية ضجيج ابيض N(t) في اللحظة $t' \in T'$ والمطلوب فصل الضجيج عن العملية النافعة[1]، ففي اللحظة $t^* \in T$ حيث $T' \subset T$ يطلب إيجاد أفضل تقريب للعملية X(t) من الشكل:

$$X(t^*) \cong \hat{X} = f(Y(t');\ t' \in T')$$

ونعني بأفضل تقريب هو ذلك التقريب الذي يتعلق بقانون التقريب الأمثل بمسألة التصفية للعملية العشوائية المدروسة، وتعد الطريقة الرياضية المبنية على مربع متوسط الانحرافات:

$$\delta^2 = E[X - f(Y_\alpha;\ \alpha \in I)]^2 \qquad (2)$$

وهي طريقة متطورة تماماً لحل مثل هذه المشاكل، التي تسمى مربع الخطأ للتقريب المعطى بالمعادلة (١)[1] ، إلا أن الطريقة تعاني صعوبات كثيرة منها اختيار التابع f، أما عندما تكون العملية غوصية فيمكن استخدامها بسهولة. في عملنا هذا سنستخدم طريقة أخرى أكثر بساطة تساهم في تحويل الكثير من الحالات لحل منته تحليلي، باستخدام مفاهيم فضاءات هلبرت بحيث نفتش عن التقريب الأمثل $\hat{X}$ من الفضاء الجزئي H_0 الذي يبعد أقل مسافة ممكنة عن X(t) من الفضاء $H = L^2_{[0,T]}$ وتملك تلك المسألة حلاً وحيداً، ويمكن أن يحدد من $H = L^2_{[0,T]}$ المولد بالمتغيرات $(Y_\alpha;\ \alpha \in I)$ بشكل دائم من جملة المعادلات [1]

$$(X - \hat{X}, X') = 0,\ \forall X' \in H_0 \qquad (3)$$

حيث (X, Y) هو الجداء الداخلي في الفضاء $H = L^2_{[0,T]}$.

تعريف ١: [1]

الضجة البيضاء هي عملية غوصية مستقرة ممركزة (أي ذات توقع مساوى الصفر) وكثافتها الطيفية ثابتة على جميع نقاطها الطيفية.

تعريف ٢: [2]

العملية المتخامدة هي العملية المحققة للعلاقة $E|X(t)|^2 \dashrightarrow 0$ عندما $t \dashrightarrow \infty$ (أي الطاقة التي تحملها العملية المعبر عنها بتابع التباين تتلاشى تدريجياً).

تعريف ٣: [1,2]

تابع الارتباط لعملية عشوائية (أو نقول لمقطعين من مقاطع العملية)

$K_{XX}(t,u) = E\ X(t).\overline{X(u)} - EX(t).\overline{EX(u)}$، أو ببساطة نرمز لذلك بالرمز $K_X(t,u)$.

منهجية البحث:

يعتمد البحث بصورة أساسية على المنهج الوصفي التحليلي والإحصاء والاحتمالات والعمليات العشوائية، ويعتمد أيضاً على المؤثرات والمعادلات التفاضلية العشوائية والمعادلات التكاملية وعلى مسح مرجعي لبعض الكتب والأبحاث ذات الصلة.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث من دراسة الترشيح (filter) للعمليات العشوائية المتخامدة الممركزة من المرتبة الثانية [2] المتداخلة مع ضجيج ابيض [1] غير مرتبط بها، ويستخدم هذا الترشيح بشكل واسع في دراسة الكثير من الظواهر الفيزيائية والبيولوجية والاقتصادية والاتصالات وغيرها، فنجد التقريب الأمثل الذي له متوسط يساوي متوسط العملية المرشحة باستخدام ايجاد المؤثر العكسي للمؤثر التكاملي [3].

النتائج والمناقشة :

نأخذ في الجملة (٣) $X' = Y_\alpha$ عندئذ نكتبها بالشكل الآتي :

$$\mathrm{E}\hat{X}.\overline{Y_\alpha} = E\,X\,\overline{Y_\alpha} \qquad (4)$$

وبأخذ $Y_\alpha = 1$ في الفضاء H_0 نجد أن $\mathrm{E}\hat{X} = E\,X$ وهي علاقة إحصائية هامة تدل على أنه لا يوجد فرق بالمتوسط بين المتغير X والقيمة التقريبية $\hat{X}$، وبفرض أن $X(t)\,, N(t) \in H = L^2_{[0\,,T]}$ و E X(t)= EN(t)=0 و $E|X(t)|^2 < \infty\ , E|N(t)|^2 < \infty$ يمكن أن نكتب القيمة التقريبية $\hat{X}$ بالشكل التالي:

$$\hat{X}(t) = \int_0^T G(t\,,s).\ Z(s)\ ds \qquad (5)$$

حيث G(t,S) هو تابع غرين [5] ، فمن العلاقة (٤) وحسب تعريف الجداء الداخلي في $L^2_{[0\,,T]}$ نجد أن:

$$\int_0^T G(t,s)\ \big(Z\,(s)\,, Z(u)\big)\,ds = \ (\,X(t), X(u))$$

وحسب نظرية الارتباط [1,5] يكون:

$$\int_0^T G(t,s)\ \ K_Z(s,u)\,ds = \ K_X(t,u) \qquad (6)$$

ومن كون العملية X(t) عملية متخامدة و X(t) , N(t) غير مرتبطتين أي

$(K_Z(s,u) = \ K_{X(s,u)} + K_N(s,u)\ )$ وتابع الارتباط لعملية الضجيج الأبيض N(t) يساوي الصفر في جميع النقاط ما عدا النقطة t=s−u=0 فيساوي الواحد [1,5] ، فيكون تابع الارتباط للعملية Z(t) [1 ,2] هو تابع الارتباط للعملية المتخامدة X(t)، أي سنعتبر **تابع الارتباط للعملية Z(t) مساوياً لتابع الارتباط للعملية X(t)** وبالتالي يكون:

$$\frac{d}{du}K_Z(s\,,u) = \ \frac{d}{du}\{K_0(s-u). + \int_0^\infty \varphi(s+\tau).\,\bar{\varphi}(u+\tau)\ d\tau\}$$

حيث $K_0(s-u)$ هو تابع الارتباط للجزء المستقر من العملية المتخامدة X(t) أما الحد $\int_0^\infty \varphi(s+\tau).\,\bar{\varphi}(u+\tau)\ d\tau$ هو تابع الارتباط للجزء غير المستقر منها و $\varphi(s)$ هو تابع يسعى للصفر بسرعة في جوار اللانهاية.

وبفرض أن S مؤثر خطي ومحدود في $L^2_{[0\,,T]}$ معرف على النحو الآتي:

$$S\,G(t\,,u) = \frac{d}{du}\int_0^T G(t\,,s)K_Z(s\,,u\,).\,ds \qquad (7)$$

ونعرف المؤثر $A\, f(x) = i.\int_0^x f(t)\, dt$ [2, 3, 4] في الفضاء $L^2_{[0\,,T]}$ فيكون مرافقه المؤثر $A^* f(x) = -i\int_x^T f(t)dt$ ، وبذلك يكون S قابل للعكس إذا حقق العلاقة :

$$(A\,S - SA^*) = Q \qquad (8)$$

حيث Q مؤثر له الشكل $Qf(x) = \int_0^T Q(x\,,\ t)\ f(t)\, dt$ عندئذ يكون :

$$s\, f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^T f(t)\ \frac{\partial}{\partial t}\ \emptyset\,(x\,,t\,)dt$$

حيث

$$\emptyset\,(x\,,t) = \frac{1}{2}\ .Q\ \left(\frac{s+x-t}{2}\ .\frac{s-x+t}{2}\right) ds$$

[3] ولنبرهن تحقق العلاقة (٨) ، أي لنبرهن أن *S* قابل للعكس.

من أجل برهان ذلك سنبرهن أن

$$(A\,S - SA^*)\ G(t,u) = i\int_0^T M(u\,,s\,).G(t\,,s)ds \qquad (9)$$

وسنرمز لمعكوس *S* بالرمز *L* الذي يحقق العلاقة $L\,K_Z(t\,,s) = G\,(t\,,s)$ و وعندئذ يكون لدينا

$$G\,(t\,,u\,) = \frac{d}{du}\int_0^T K_X(t\,,s).\frac{\partial}{\partial s}\,\emptyset(u\,,s)ds$$

وهو حل للمعادلة (6)، لنحسب اولاً $A\ S\ G(t\,,S)$:

$$A\,S\,G(t,u) = A\,[\tfrac{d}{du}\int_0^T K_Z(s\,,u)\ G(t\,,s\,)\ ds\ = i\ \int_0^u \tfrac{d}{dv}\ \int_0^T G(t\,,s)\ K_Z(s\,,v)ds\ \ dv$$

$$= i\int_0^T G\,(t\,,s)K(s\,,0) - i\int_0^T G(t\,,s)K_Z(s\,,u)\ ds$$

ولنحسب المقدار $SA^*\ G(t,u)$:

$$SA^*\ G(t,u) = i\ S\ \int_0^T G\,(t\,,s)ds = -i\ \int_0^T\int_0^T G(t\,,v)\frac{dK_Z(s\,,u)}{du}\ \ ds\,.dv$$

لكن $K_Z(s\,,u) = K_0(s-u) + K_1(s\,,u)$ باشتقاق هذا المجموع نجد أن

$$\frac{\partial K_Z}{\partial s} = \frac{\partial K_0}{\partial s} + \frac{\partial K_1}{\partial s} \text{ و } \frac{\partial K_Z}{\partial u} = \frac{\partial K_0}{\partial u} + \frac{\partial K_1}{\partial u}$$

فمن (٦) نحصل على القيمة

$$\frac{\partial K_Z}{\partial s} + \frac{\partial K_Z}{\partial u} = \frac{\partial K_1}{\partial s} + \frac{\partial K_1}{\partial u}\ \ = \ \varphi(s).\bar{\varphi}(u) \qquad (10)$$

ومنه

$$SA^*\ G(t,u) = -i\int_0^T\int_0^T G(t\,,v)\varphi(s).\bar{\varphi}\,(u)ds\,dv + i\ \int_0^T\int_0^T G(t,v)dv\ \frac{\partial K_Z(s,u)}{\partial s}\ ds$$

وبتبديل $\frac{\partial K_Z(s,u)}{\partial s}$ بقيمته فنحصل على العلاقة **الآتية** :

$$SA^*\ G(t,u) =$$
$$-i\int_0^T\int_0^T G(t\,,v)\varphi(s).\bar{\varphi}\,(u)ds\,dv + i\int_0^T K_Z(v,s).G(t,s)ds - i\ \int_0^T K_Z(0,u).G(t,s)d$$

وبالتالي يكون

$$(A\,S - SA^*)G(t,u) = -i\int_0^T K_Z(0,u).G(t,s)d\,s + i\int_0^T g(s)\ \bar{\varphi}G(t,s)ds\ +$$
$$+i\ \int_0^T K_Z(o\,,u).G(t,s)s$$

حيث $g(s) = \int_0^s \varphi(v)dv$

فيكون

$$(AS - SA^*)G(t,u) = i \int_0^T [-K_Z(s,0) + g(s)\bar{\varphi}(u) + K_Z(0,u)]G(t,s)ds$$

وهو من الشكل (9) حيث

$$M(u,s) = [-K_Z(s,0) + g(s)\bar{\varphi}(u) + K_Z(0,u)]$$
$$= i \int_0^T [M(u) + N(s) + \bar{\varphi}(u).\int_0^s \varphi(v).dv] \; G(t,s)ds$$

وبفرض أن $M(u) = K_0(-u) + \int_0^\infty \varphi(\tau).\bar{\varphi}(u+\tau)\,d\tau$ و $N(u) = K_0(u)$

و أن $G(t,s) = S\, g(t,s)$, $f = Sg$, $S^{-1} = L$ فنجد الآتي:

$$(LA - A^*L)\, S\, g(t,u) = L(AS - SA^*)S^{-1}\, G(t,u)$$

$$L(AS - SA^*)S^{-1}G(t,u) = i\, L \int_0^T (S^{-1}G)_s\, [M(u) + N(s) + \bar{\varphi}(u).\int_0^s \varphi(v)dv]\, ds$$
$$= i \int_0^T G(t,s)\, [\, LM(u)L^* + LN(s)L^* + L\bar{\varphi}(u).L^* \int_0^s \varphi(v)dv]\, ds$$
$$= i\, L \int_0^T G(t,s)\, [N_1(u)\overline{M_1}(s) + N_2(u)\overline{M_2}(s) + N_3(u)\overline{M_3}(s)]ds$$

حيث

$$SN_1 = M \;,\; S^*\overline{M_1} = 1 \;,\; S\,N_2 = 1 \;,\; S^*\overline{M_2} = N \;,\; SN_3 = \bar{\varphi}(u),$$
$$S^*\overline{M_3} = \int_0^s \varphi(v)dv$$

وبالتالي نستطيع أن نكتب $L\,K_z\,(t,u) = G(t,u)$ و

$$G(t,u) = \frac{d}{du}\int_0^T K_X(t,s)\, \frac{\partial}{\partial s}\, \emptyset(u,s)ds$$

حيث

$$\emptyset(u,s) = \frac{1}{2} \int_{u+s}^{2T-|u-s|} Q\left(\frac{v+u-s}{2} \;, \frac{v-u+s}{2}\right) dv \,,$$

$$Q\left(\frac{v+u-s}{2} \;, \frac{v-u+s}{2}\right) = \overline{M_1\left(\frac{v-u+s}{2}\right)} N_1\left(\frac{v+u-s}{2}\right) + \overline{M_2\left(\frac{v-u+s}{2}\right)}.N_2\left(\frac{v+u-s}{2}\right) +$$
$$+ \overline{M_3\left(\frac{v-u+s}{2}\right)}\,.N_3\left(\frac{v+u-s}{2}\right)$$

الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات : تمت دراسة التصفية لعملية عشوائية متخامدة باستخدام المؤثر العكسي الذي يعطي تابع غرين، وهذا التابع هو حل لمعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول، معتمدين على مفهوم التعامد في فضاء هلبرت و استخدام مؤثر تكاملي طيفه متجمع في النقطة الصفر.

التوصيات:

١- نوصي بمتابعة دراسة التصفية لعملية عشوائية متخامدة وغير مستقرة تماماً .

٢- نوصي بدراسة التصفية للعمليات المتخامدة بطريقة وينر .

المراجع

١- الوسوف أ.، *الطوريات العشوائية* (١) ،منشورات جامعة تشرين، ٢٠٠٧-٢٠٠٨.

2- IVSIC M. S., IANCEWICH A. A. *Theory of operator colligation in Hilbert Space* , J. Wiley N.Y, 1979 .

3- 'Нрсесян М., *нахождение обратного операатора для интегральной оператора с использованием треугольного модели интегрального оператора со спектром*, сосредоточенным в нулле, Акад.Азарбежа. СССР;1976.

4- Ахеиезер Г. ,Глзман И.М.,*Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве ;*»Наука» 1982 .

5- Корен Г. ,курен Т. ;*справочник по математике издание пятое москква* «Наука» 1984 .

6- Куралюк Ф. С. ,Буртинко И.И.,Скораход А.Ф.,Турпин А.Ф.;спровочник по теория вероятностей и математичекие статистиа, «наука» Москва,1985.

7- Duncan *T.E. Pasik B. and Maslowski B. , Fractional Brownian Motion and stochastic Equations in Hilbert spaces, stochastic and dynamic* ,Vol.02,No.pp225-250,2002.

8- Choon KI Ahn,Peng Shi*, Michael V. ,Deabeat disspative FIR Filtering, Circuits and systems I* :Regular pepar,IEEE Transactions on ER,2016 .