مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (2) 2022
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (2) 2022

تحديد درجة تقريب الدوال بإستخدام طريقة هاوسدورف

د منير مخلوف*
رنيم فجر**

(تاريخ الإيداع 10/1/ 2022 – تاريخ النشر 20 /4/ 2022)

□ ملخّص □

في هذا البحث، ندرس مسألة تحديد درجة تقريب الدوال بإستخدام طريقة هاوسدورف، ويمكن ذلك من خلال إثبات المبرهنات الآتية:

المبرهنة (1) : لتكن الدالة $f \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ حيث $\alpha > \frac{1}{p}$ و $p > 1$ ، مستمرة تقريباً في كل مكان على المجال $[-m, m]$ ودورية بدورٍ قدره $2l$ ، عندئذٍ درجة تقريب الدالة $\tilde{f}$ بإستخدام طريقة هاوسدورف لمتسلسلة فورييه المرافقة تعطى كالآتي:

$$\left\|\widetilde{H}_{(n+\lambda)}(f,a) - \tilde{f}(a)\right\|_p = O\left((n+\lambda)^{\frac{1}{p}-\alpha}\right)$$

حيث $\lambda \geq 1$ و بشرط أن تكون الدالة $t^{\alpha}\ ;\ 0 < \alpha \leq 1$ موجبة ومضطردة و تحقق ما يلي:

(1) $t^{\alpha-1}$ دالة مضطردة.

$$\left\{\int_0^{\frac{m}{n+\lambda}} \left(|\psi_a(t)|t^{-\alpha}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left((n+\lambda)^{-\frac{1}{p}}\right) \qquad (2)$$

$$\left\{\int_{\varepsilon}^{\frac{m}{n+\lambda}} \left(t^{\alpha-1}\right)^q dt\right\}^{\frac{1}{q}} = O\left((n+\lambda)^{\frac{1}{p}-\alpha} m^{\alpha}\right) \qquad (3)$$

$$\left\{\int_{\frac{m}{n+\lambda}}^{m} \left(t^{-\delta-\alpha}|\psi_a(t)|\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left((n+\lambda)^{\delta}\right) \qquad (4)$$

حيث δ عدد اختياري بحيث $0 < \delta < \frac{1}{p}$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ من أجل $p > 1$ و $\lambda \geq 1$.

المبرهنة (2) : لتكن f دالة دورية بدورٍ قدره $2m$ ومستمرة تقريباً في كل مكان على المجال $[-m, m]$ وتنتمي إلى الصف $Z_{\alpha,p}$ حيث $p \geq 1$ عندئذٍ فإن درجة تقريب الدالة f بإستخدام طريقة هاوسدورف لمتسلسلة فورييه تعطى كالآتي:

$$E_{(n+\lambda)}(f) = \inf_{(n+\lambda)} \left\| H_{(n+\lambda)} - f \right\|_{\alpha,p} = O\left(\frac{1}{(n+\lambda)} \int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} \frac{t^{\alpha-2}}{v(t)} dt \right) \qquad (5)$$

حيث t^{α} و v معاملات زيغموند في الاستمرارية حيث $\frac{t^{\alpha}}{v(t)}$ دالة موجبة و مضطردة .

كلمات مفتاحية:درجة التقريب، صف ليبشتز، صف زيغموند، طريقة هاوسدورف، متسلسلة فورييه، متسلسلة فورييه المرافقة.

*أستاذ مساعد، قسم الرياضيات ،كلية العلوم، جامعة البعث.

**طالبة دكتوراه، قسم الرياضيات ،كلية العلوم، جامعة البعث.

Determining the degree of approximation of functions using Hausdorff method

Dr. Mounir makhlouf*
Ranim fajer**

(Received 10/1/2022.Accepted 20/4/2022)

□ABSTRACT □

In this research ,we study the problem of determining the degree of approximation of functions using by Hausdorff method, and we can do this by proving the following theorems:

Theorem 1. Let $f \in \text{Lip}\,(\alpha, p)$ with $\alpha > \frac{1}{p}$ and $p > 1$ be a continues almost everywhere and 2m -periodic function ,Then the the degree of approximation of $\tilde{f}$ using hausdorff means of conjugate fourier series, is given by:

$$\left\|\widetilde{H}_{(n+\lambda)}(f,a) - \tilde{f}(a)\right\|_p = O\left((n+\lambda)^{\frac{1}{p}-\alpha}\right)$$

Provided a positive and monotonic function t^{α} satisfies the following conditions:
$t^{\alpha-1}$ (1) monotonic function

$$\left\{\int_0^{\frac{m}{n+\lambda}} (|\psi_a(t)|t^{-\alpha})^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left((n+\lambda)^{\frac{-1}{p}}\right) \qquad (2)$$

$$\left\{\int_{\varepsilon}^{\frac{m}{(n+\lambda)}} (t^{\alpha-1})^q dt\right\}^{\frac{1}{q}} = O\left((n+\lambda)^{\frac{1}{p}-\alpha} m^{\alpha}\right) \qquad (3)$$

$$\left\{\int_{\frac{m}{n+\lambda}}^{m} \left(t^{-\delta-\alpha}|\psi_a(t)|\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left((n+\lambda)^{\delta}\right) \qquad (4)$$

Where δ an arbitrary number such that $0 < \delta < \frac{1}{p}$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ for $p > 1$, $\lambda \geq 1$.

Theorem 2: let f be a 2m Periodic function, continues almost everywhere on $[-m, m]$ and belonging to the class $Z_{\alpha,p}$, $p \geq 1$. then the degree of approximation of function f of fourier series using hausdorff means, is given by:

$$E_{(n+\lambda)}(f) = \inf_{(n+\lambda)} \left\| H_{(n+\lambda)} - f \right\|_{\alpha,p} = O\left(\frac{1}{(n+\lambda)} \int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} \frac{t^{\alpha-2}}{v(t)} dt\right) \quad (5)$$

Where t^{α} and v the zygmund moduli of continuity such that $\frac{t^{\alpha}}{v(t)}$ positive and monotonic function.

Key words
Degree of approximation, lipschitz class , Zygmund class, Hausdorff method, a continues almost everywhere, fourier series, conjugate fourier series.

*De Pr, , Department of Mathematics, Faculty Of Science ,Al Baath University.

** PhD Student, , Department of Mathematics, Faculty Of Science ,Al Baath University.

مقدمة:

تحديد درجة تقريب الدوال يتم من خلال تمثيلها بمتسلسلات متعامدة مثلاً الجملة المثلثية –كثيرات حدود ليجندر – كثيرات حدود جاكوبي وغيرها.

و تكون درجات تقريب الدوال تبعاً لانتمائها إلى أحد الصفوف مثلاً تحديد درجة تقريب دوال صف زيغموند تختلف بشكل عام عن تحديد درجة تقريب دوال صف ليبشتز، كما أنّ درجات التقريب تختلف تبعاً لطبيعة الطريقة المدروسة.

حيث أنه في عام ١٩٨٢ قام كيورش Qureshi بتحديد تقريب الدوال المنتمية لصف $Lip\ \alpha$ و $Lip\ (\alpha,p)$ لمتسلسلات فورييه والمتسلسلة المرافقة لها ، وايضاً في عام ٢٠٠٣ درس رودس Rhoades درجة تقريب الدوال المنتمية لصف ليبشتز المعمم بإستخدام طريقة هاوسدورف، أما ميريتش Mricz فدرس مسألة توسيع كل من صفي زيغموند و ليبشتز للدوال ولتحويلات فورييه وكان ذلك عام ٢٠١٠ ، وفي عام ٢٠١٣ درس لال Lal أفضل تقريب للدوال المنتمية لصف زيغموند المعمم ، ودرس رودس Rhoades درجة التقريب للدوال والدوال المرافقة المنتمية لصف ليبشتز المعمم بإستخدام طريقة مصفوفة هاوسدورف لمتسلسلة فورييه والمتسلسلة المرافقة لها وكان ذلك عام ٢٠١٤.

هدف البحث:

يهدف هذا العمل تحديد درجة تقريب الدالة f والدالة المرافقة لها التي تنتمي إلى بعض الصفوف المعممة مثل ليبشتز وزيغموند وغيرها وذلك بإستخدام طريقة هاوسدورف .

مواد وطرائق البحث :

نذكر بعض التعاريف والرموز والمصطلحات المستخدمة .

تعريف 1: [1, 6] طريقة هاوسدورف (Hausdorff method)

ونرمز لها بـ (H, P_n)

تعرف بالشكل المصفوفي الآتي :

$$t_n^{(H,P_n)} = \sum_{k=0}^{n} h_{n,k} S_k$$

$$h_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k} \Delta^{n-k}\, \mu_k, & 0 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

حيث أن المؤثر Δ يعرف بالشكل: $\Delta\mu_n = \mu_n - \mu_{n+1}$ و $\Delta^{k+1}\, \mu_n = \Delta^k\, (\Delta\mu_n)$ و تعرف الدالة μ_n كالآتي:

$$\mu_n = \int_0^1 u^n d\,\gamma(u) \ .$$

❖ إن طريقة هاوسدورف تكون نظامية إذا تحقق الشرط:

$$\int_0^1 d\gamma(u) = 1$$

حيث إن: $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ و γ_1،γ_2 دالتان متزايدتان تماماً على المجال [0,1].

حيث أن $\gamma(u)$ دالة كتلية(دالة الثقل) مستمرة عندما $u = 0$ وتنتمي إلى $BV[0,1]$ فضاء كل الدوال محدودة التغير على المجال$[0,1]$ و $\gamma(0) = 0$ و$\gamma(1) = 1$ ومن أجل $0 < u < 1$ و $\gamma(u) = \frac{[\gamma(u+0)+\gamma(u-0)]}{2}$.

تعريف 2: $[2]$ **الفضاء L_p** : مجموعة كل الدوال f الدورية بدورٍ قدره $2m$ والمستمرة تقريباً في كل مكان على المجال $[-m, m]$ عندئذٍ فضاء كل الدوال القابلة للمكاملة على المجال $2m$ يُعرف كالآتي:

$$L_p = L_p[-m, +m] = \left\{f: [-m, +m] \to R; \int_{-m}^{m} |f(a)|^p da < \infty\right\}, p \geq 1$$

ويُعطى النظيم $\|f\|_p$ على الفضاء L_p ، كالآتي:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2m}\int_{-m}^{m} |f(a)|^p da\right)^{\frac{1}{p}} & , 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess}\sup_{-m \leq a \leq m} |f(a)| & p = \infty \end{cases}$$

تعريف٣ : $[3,7]$ **صف ليبشتز $Lip(\alpha, p)$** : لتكن f دالة دورية بدورٍ قدره $2m$ عندئذٍ نقول عن الدالة f أنها تنتمي إلى الصف $Lip(\alpha, p)$ إذا تحقق ما يلي:

$$\left(\int_{-m}^{m} |f(a+t) - f(a)|^p da\right)^{\frac{1}{p}} = O(t^\alpha)$$

حيث $0 < \alpha \leq 1$ و $p \geq 1$.

تعريف ٤: $[2,8]$ **صف زيغموند $Z_{\alpha,p}$**: لتكن f دالة دورية بدورٍ قدره $2m$ وليكن $1 \leq p < \infty$ ،عندئذٍ نقول عن الدالة f أنها تنتمي إلى الصف $Z_{\alpha,p}$ إذا تحقق ما يلي :

$$Z_{\alpha,p} = \left\{f \in L_p, \sup_{t\in[-m,+m]\setminus\{0\}} \frac{\|f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)\|_p}{t^\alpha} < \infty\right\}$$

و نعرف النظيم $\| \ \|_{\alpha,p}$ كالآتي:

$$\|f\|_{\alpha,p} = \|f\|_p + \sup_{t\in[-m,+m]\setminus\{0\}} \frac{\|f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)\|_p}{t^\alpha} \quad , p \geq 1$$

المناقشة والنتائج:

لتكن f دالة مستمرة تقريباً في كل مكان على المجال $[-m, m]$ و دورية بدورٍ قدره $2m$. متسلسلة فورييه للدالة f تعطى بالشكل $[4,5,12]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{m} + b_n \sin\frac{n\pi x}{m}\right)$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{m}\int_{-m}^{m} f(x)\cos\frac{n\pi x}{m}\,dx \quad ; n = 0,1,2, \dots.$$

و

$$b_n = \frac{1}{m}\int_{-m}^{m} f(x)\sin\frac{n\pi x}{m}\,dx \qquad ; n = 1,2,\dots.$$

و المتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه تعطى كالآتي:[13,14]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sin\frac{n\pi x}{m} - b_n\cos\frac{n\pi x}{m}\right)$$

وتعطى الدالة المرافقة المقابلة للعلاقة السابقة كالآتي:

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2m}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{m}\psi_x(t)\cot\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

حيث

$$\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t)$$

وتعطى متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فورييه من الرتبة n كالآتي:

$$s_n(f) = s_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{m} + b_k\sin\frac{k\pi x}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n} u_k(f;x)$$

وتعطى متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه من الرتبة n كالآتي:

$$\tilde{s}_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n}\left(b_k\cos\frac{k\pi x}{m} - a_k\sin\frac{k\pi x}{m}\right) = -\frac{1}{m\pi\text{كل على للمكاملة بلة على نكاملة}}\int_0^m \psi_x(t)\left\{\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right\}dt$$

وسنرمز إلى طريقة هاوسدورف لمتسلسلة فورييه المثلثية للدالة f بـ:

$$H_n(x) = H_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} h_{n,k}s_k(f,x) \qquad , n = 0,1,2,\dots\dots,$$

ونرمز إلى طريقة هاوسدورف لمتسلسلة فورييه المرافقة للدالة f بـ :

$$\tilde{H}_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} h_{n,k}\tilde{s}_k(f,x) \qquad , n = 0,1,2,\dots\dots,.$$

التمهيدية (1) : **[9]** لتكن $\tilde{g}(u,t) = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n+\lambda}\binom{n+\lambda}{k}u^k(1-u)^{n+\lambda-k}e^{i\left(\frac{k+1}{2}\right)t}\right]$ من أجل $0 < u < 1$ و $0 \le t \le l$ ، $\lambda \ge 1$عندئذٍ:

$$\left|\int_0^1 \tilde{g}(u,t)d\gamma(u)\right| = \begin{cases} O(1) & ; \quad 0 < t \le \dfrac{m}{(n+\lambda)} \\ O\left(\dfrac{1}{t(n+\lambda)}\right) & ; \quad \dfrac{m}{(n+\lambda)} \le t \le m \end{cases}$$

التمهيدية٢: **[10]** ليكن $g(u,t) = \mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n+\lambda}\binom{n+\lambda}{k}u^k(1-u)^{n+\lambda-k}e^{i\left(k+\left(\frac{1}{2}\right)\right)t}\right]$ من أجل $0 \le u \le 1$ و$0 \le t \le m$ ، $\lambda \ge 1$ عندئذٍ:

$$\left|\int_0^1 g(u,t)d\gamma(u)\right| = \begin{cases} O\big((n+\lambda)t\big) & 0 \le t \le \dfrac{1}{(n+\lambda)} \\ O\left(\dfrac{1}{t(n+\lambda)}\right) & \dfrac{1}{(n+\lambda)} \le t \le m \end{cases}$$

التمهيدية٣: [**10**] ليكن $K^H_{n+\lambda} = \frac{1}{2m\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\int_0^1 g(u,t)d\gamma(u)$

عندئذٍ:

$$\left|K^H_{n+\lambda}(t)\right| = \begin{cases} O(n+\lambda) & 0 \le t \le \dfrac{1}{n+\lambda} \\ O\left(\dfrac{1}{t^2(n+\lambda)}\right) & \dfrac{1}{n+\lambda} \le t \le m \end{cases}$$

التمهيدية ٤: [**2**]: لتكن $f \in Z_{\alpha,p}$ عندئذٍ من أجل $0 < t \le m$ يكون لدينا:

$$\|\emptyset(a,t)\|_p = O(t^\alpha) \quad \text{(i)}$$

$$\|\emptyset(a+y,t) + \emptyset(a-y,t) - 2\emptyset(a,t)\|_p = \begin{cases} O(t^\alpha) \\ O(y^\alpha) \end{cases} \quad \text{(ii)}$$

$$\|\emptyset(a+y,t) + \emptyset(a-y,t) - 2\emptyset(a,t)\|_p = O\left(v(y)\frac{t^\alpha}{v(t)}\right) \quad \text{(iii)}$$

حيث

$$\emptyset(a,t) = f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)$$

إثبات المبرهنة ١:

لدينا :

$$\widetilde{H}_{n+\lambda}(f,a) - \tilde{f}(a) = \sum_{k=0}^{n+\lambda} h_{n+\lambda,k}\{\tilde{s}_{n+\lambda}(f,a) - \tilde{f}(a)\}$$

$$= \frac{1}{2m}\int_0^m \left(\frac{\psi_a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n+\lambda} h_{n+\lambda,k}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2m}\int_0^m \left(\frac{\psi_a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n+\lambda}\binom{n+\lambda}{k}\Delta^{n+\lambda-k}\mu_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2m}\int_0^m \left(\frac{\psi_a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n+\lambda}\binom{n+\lambda}{k}\int_0^1 u^k(1 - u)^{n+\lambda-k}d\gamma(u)\,\mathrm{Re}\left\{e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right\}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2m}\int_0^m \left(\frac{\psi_a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\int_0^1 \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n+\lambda}\binom{n+\lambda}{k} u^k(1 - u)^{n+\lambda-k}e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right]d\gamma(u)\right)dt = \frac{1}{2m}\int_0^m \left(\frac{\psi_a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\int_0^1 \tilde{g}(u,t)\,d\gamma(u)\right)dt$$

حيث:

$$\tilde{s}_{n+\lambda}(f,a)-\tilde{f}(a)=\frac{1}{2m}\int_0^m \psi_a(t)\frac{\cos\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{H}_{n+\lambda}(f,a)-\tilde{f}(a)\right| &\le \int_0^m \frac{|\psi_a(t)|}{t}\left|\int_0^1 \tilde{g}(u,t)\,d\gamma(u)\right|dt\\ &=\left(\int_0^{\frac{m}{n+\lambda}} + \int_{\frac{m}{n+\lambda}}^m\right)\frac{|\psi_a(t)|}{t}\left|\int_0^1 \tilde{g}(u,t)\,d\gamma(u)\right|dt\\ &= I_1+I_2 \qquad (10)\end{aligned}$$

وذلك حسب العلاقة $\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \le \frac{m}{t}$ من أجل $0 < t \le m$.

الآن، وبحسب التمهيدية ١ و متراجحة هولدر، يكون لدينا:

$$I_1 = O(1)\left\{\int_0^{\frac{m}{n+\lambda}} \frac{\psi_a(t)}{t^\alpha}t^{\alpha-1}dt\right\}$$

$$= O(1)\left\{\int_0^{\frac{m}{n+\lambda}}\left(|\psi_a(t)|\frac{1}{t^\alpha}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{m}{n+\lambda}} (t^{\alpha-1})^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= O\left[\frac{1}{(n+\lambda)^{\frac{1}{p}}}(n+\lambda)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{m}{n+\lambda}\right)^\alpha\right] = O\left[\left(\frac{m}{n+\lambda}\right)^\alpha\right] \qquad (11)$$

وذلك بإستخدام العلاقات (2) و (3) و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

ولما كان:

$$I_2 = O\left(\int_{\frac{m}{n+\lambda}}^{m} \frac{t^{-\delta-\alpha}|\psi_a(t)|}{n+\lambda}\frac{t^{\alpha-1}}{t^{-\delta+1}}dt\right)$$

$$= O\left\{\frac{1}{n+\lambda}\int_{\frac{m}{n+\lambda}}^{m}\left(t^{-\delta-\alpha}|\psi_a(t)|\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{\int_{\frac{m}{n+\lambda}}^{m}\left(t^{\alpha+\delta-2}\right)^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= O\left[(n+\lambda)^{\delta-1}\left(\frac{m}{n+\lambda}\right)^{\alpha}\left(\frac{n+\lambda}{m}\right)\left\{\int_{\frac{m}{n+\lambda}}^{m} t^{-(1-\delta)q}dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$= O\left[(n+\lambda)^{\delta}\left(\frac{m}{n+\lambda}\right)^{\alpha}(n+\lambda)^{1-\delta-\frac{1}{q}}\right]$$

$$= O\left[(n+\lambda)^{1-\alpha-\frac{1}{q}}l^{\alpha}\right] \qquad (12)$$

وذلك بإستخدام التمهيدية ١ ومتراجحة هولدر والعلاقة $\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \le \frac{m}{t}$ من أجل $0 < t \le m$.

من العلاقات (1) و (4) و مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل ، و $0 < \delta < \frac{1}{p}$ وبجمع العلاقات من (10) و (11) و(12) نحصل على :

$$\left|\widetilde{H}_{n+\lambda}(f,a) - \tilde{f}(a)\right| = O\left[(n+\lambda)^{\frac{1}{p}-\alpha}m^{\alpha}\right]$$

اخيراً، من العلاقة السابقة والعلاقة $\left(\frac{m}{n+\lambda}\right)^{\alpha-1} \le \left(\frac{1}{n+\lambda}\right)^{\alpha-1}$ نجد أنّ:

$$\left\|\widetilde{H}_{n+\lambda}(f,a) - \tilde{f}(a)\right\|_p = O\left[(n+\lambda)^{\frac{1}{p}-\alpha}\right]$$

إثبات المبرهنة 2:

ليكن:

$$s_k(f,a) - f(a) = \frac{1}{2m}\int_0^m \emptyset(a,t)\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

بما أن $\sum_{k=0}^{n+\lambda} h_{n+\lambda,k} = 1$ لكل $n+\lambda$ في أي مصفوفة هاوسدورف النظامية H ، فإنّ :

$$H_{n+\lambda}(a)-f(a)$$

$$=\frac{1}{2m}\int_{0}^{m}\emptyset(a,t)\sum_{k=0}^{n+\lambda}h_{n+\lambda,k}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

$$=\frac{1}{2m}\int_{0}^{m}\frac{\emptyset(a,t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n+\lambda}\int_{0}^{1}\binom{n+\lambda}{k}u^{k}(1-u)^{n+\lambda-k}d\gamma(u)\mathrm{Im}\left(e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2m}\int_{0}^{m}\frac{\emptyset(a,t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\int_{0}^{1}\mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\lambda}{k}u^{k}(1-u)^{n+\lambda-k}e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right]d\gamma(u)dt$$

$$=\frac{1}{2m}\int_{0}^{m}\frac{\emptyset(a,t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\int_{0}^{1}g(u,t)\;d\gamma(u)dt$$

لنفرض أن:

$$q_{n+\lambda}(a)=H_{n+\lambda}(a)-f(a)=\int_{0}^{m}\emptyset(a,t)K_{n+\lambda}^{H}(t)dt$$

عندئذٍ:

$$q_{n+\lambda}(a+y)+q_{n+\lambda}(a-y)-2q_{n+\lambda}(a)$$

$$=\int_{0}^{m}[\emptyset(a+y,t)+\emptyset(a-y,t)-2\emptyset(a,t)]\,K_{n+\lambda}^{H}(t)dt$$

بإستخدام متراجحة مينكوفسكي Minkowski [11] المعممة، نحصل على:

$$\|q_{n+\lambda}(a+y)+q_{n+\lambda}(a-y)-2q_{n+\lambda}(a)\|_{p}$$

$$=\left\{\frac{1}{2m}\int_{-m}^{+m}|q_{n+\lambda}(a+y)+q_{n+\lambda}(a-y)-2q_{n+\lambda}(a)|^{p}da\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left\{\frac{1}{2m}\int_{-m}^{+m}\left|\int_{0}^{m}[\emptyset(a+y,t)+\emptyset(a-y,t)-2\emptyset(a,t)]\,K_{n+\lambda}^{H}(t)dt\right|^{p}da\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int_0^m \left\{\frac{1}{2m}\int_{-m}^{+m} \left|[\emptyset(a+y,t)+\emptyset(a-y,t)-2\emptyset(a,t)]K_{n+\lambda}^H(t)\right|^p da\right\}^{\frac{1}{p}} dt$$

$$= \int_0^m \left(\left|K_{n+\lambda}^H(t)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left\{\frac{1}{2m}\int_{-m}^{+m} |\emptyset(a+y,t)+\emptyset(a-y,t)$$

$$-2\emptyset(a,t)|^p da\right\}^{\frac{1}{p}} dt$$

$$= \int_0^m \|\emptyset(a+y,t)+\emptyset(a-y,t)-2\emptyset(a,t)\|_p \left|K_{n+\lambda}^H(t)\right| dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n+\lambda}} \|\emptyset(a+y,t)+\emptyset(a-y,t)-2\emptyset(a,t)\|_p \left|K_{n+\lambda}^H(t)\right| dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{n+\lambda}}^m \|\emptyset(a+y,t)+\emptyset(a-y,t)-2\emptyset(a,t)\|_p \left|K_{n+\lambda}^H(t)\right| dt$$

$$= I_1 + I_2 \qquad (13)$$

ومن ثم حسب التمهيدية ٣ والتمهيدية ٤ (iii) ومن اضطراد الدالة $\frac{t^\alpha}{v(t)}$. ينتج أنّ:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{n+\lambda}} \|\emptyset(a+y,t)+\emptyset(a-y,t)-2\emptyset(a,t)\|_p \left|K_{n+\lambda}^H(t)\right| dt$$

$$= O\left(\int_0^{\frac{1}{n+\lambda}} v(y)\frac{t^\alpha}{v(t)}(n+\lambda)dt\right) = O\left((n+\lambda)v(y)\int_0^{\frac{1}{n+\lambda}} \frac{t^\alpha}{v(t)} dt\right)$$

$$= O\left((n+\lambda)v(y)\frac{\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)^\alpha}{v\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}\int_0^{\frac{1}{n+\lambda}} dt\right)$$

$$= O\left(v(y)\frac{\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)^\alpha}{v\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}\right) \qquad (14)$$

أيضاً حسب التمهيدية 3 والتمهيدية ٤ (iii) لدينا:

$$I_2 = \int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} \|\emptyset(a+y,t)+\emptyset(a-y,t)-2\emptyset(a,t)\|_p \left|K_{n+\lambda}^{H}(t)\right| dt$$

$$= O\left(\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} v(y)\frac{t^{\alpha}}{v(t)}\frac{1}{t^2(n+\lambda)}\, dt\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n+\lambda} v(y) \int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} v(y)\frac{t^{\alpha-2}}{v(t)}\, dt\right) \qquad (15)$$

وهكذا من (13) و(14) و(15) يكون لدينا:

$$\|q_{n+\lambda}(a+y)+q_{n+\lambda}(a-y)-2q_{n+\lambda}(a)\|_p$$

$$= O\left(v(y)\frac{\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)^{\alpha}}{v\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}\right)$$

$$+ O\left(\frac{1}{n+\lambda} v(y) \int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} \frac{t^{\alpha-2}}{v(t)}\, dt\right) \sup_{y\neq 0}\frac{\|q_{n+\lambda}(a+y)+q_{n+\lambda}(a-y)-2q_{n+\lambda}(a)\|_p}{v(y)}$$

$$= O\left(\frac{\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)^{\alpha}}{v\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}\right) + O\left(\frac{1}{n+\lambda}\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m}\frac{t^{\alpha-2}}{v(t)}\, dt\right) \qquad (16)$$

وحسب التمهيديات ٣ و ٤ مرةً أخرى . نحصل على:

$$\|q_{n+\lambda}(a)\|_p \le \left(\int_{0}^{\frac{1}{n+\lambda}} + \int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m}\right) \|\emptyset(a,t)\|_p \left|K_{n+\lambda}^{H}(t)\right| dt$$

$$= O\left((n+\lambda)\int_{0}^{\frac{1}{n+\lambda}} t^{\alpha} dt\right) + O\left(\frac{1}{n+\lambda}\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} t^{\alpha-2} dt\right)$$

$$= O\left(\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)^{-\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{n+\lambda}\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} t^{\alpha-2} dt\right) \qquad (17)$$

الآن، ومنه بحسب العلاقات (16)و(17) نحصل على:

$$\|q_{n+\lambda}(a)\|_{\alpha,P} = \|q_{n+\lambda}(a)\|_p + \sup_{y\neq 0}\frac{\|q_{n+\lambda}(a+y)+q_{n+\lambda}(a-y)-2q_{n+\lambda}(a)\|_p}{v(y)} = O\left(\frac{1}{(n+\lambda)^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{n+\lambda}\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} t^{\alpha-2}dt\right) = O\left(\frac{\frac{1}{(n+\lambda)^\alpha}}{v\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}\right) + O\left(\frac{1}{n+\lambda}\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m}\frac{t^{\alpha-2}}{v(t)}dt\right) = \sum_{i=1}^{4} O(J_i) \qquad (18)$$

الآن، نكتب J_1 في حدود الـJ_3 وأيضاً J_2 و J_3 في حدود الـ J_4 ومن اضطراد الدالة الـ $v(t)$ نجد:

$$t^\alpha = \frac{t^\alpha}{v(t)}v(t) \le v(m)\frac{t^\alpha}{v(t)} = O\left(\frac{t^\alpha}{v(t)}\right)$$

وذلك من أجل $0 < t \le m$.

إذاً، من أجل $t = \frac{1}{n+\lambda}$ يكون لدينا :

$$J_1 = O(J_3) \qquad (19)$$

ومن اضطراد الدالة $v(t)$ نجد:

$$J_2 = \frac{1}{n+\lambda}\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m}\frac{t^{\alpha-2}}{v(t)}dt \le \frac{1}{n+\lambda}v(m)\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m}\frac{t^{\alpha-2}}{v(t)}dt = O(J_4) \qquad (20)$$

باعتبار أن الدالة $\frac{t^\alpha}{v(t)}$ موجبة ومضطردة يكون لدينا:

$$J_4 = \frac{1}{n+\lambda}\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m}\frac{t^{\alpha-2}}{v(t)}dt \ge \frac{\frac{1}{(n+\lambda)^\alpha}}{v\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}\frac{1}{n+\lambda}\int_{\frac{1}{n+\lambda}}^{m} t^{-2}dt = \frac{\frac{1}{(n+\lambda)^\alpha}}{v\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}\frac{1}{n+\lambda}\left(n+\lambda-\frac{1}{m}\right) \ge \frac{\frac{1}{(n+\lambda)^\alpha}}{2v\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}$$

حيث

$$\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)\left(n+\lambda-\frac{1}{m}\right) > \left(\frac{1}{n+\lambda}\right)(n+\lambda) \ge \frac{1}{2}$$

لذلك :

$$J_3 = O(J_4) \qquad (21)$$

بجمع العلاقات (18) و (21) نحصل على:

$$\|q_{n+\lambda}(a)\|_{\alpha,P} = O(J_4) = O\left(\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)\int_{\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}^{m}\frac{t^{\alpha-2}}{v(t)}dt\right)$$

إذاً:

$$E_{(n+\lambda)}(f) = \inf_{(n+\lambda)} \left\| q_{(n+\lambda)}(a) \right\|_{\alpha,P} = O\left(\left(\frac{1}{n+\lambda}\right) \int_{\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)}^{m} \frac{t^{\alpha-2}}{v(t)} dt \right)$$

اقتراحات و توصيات:

١- إمكانية دراسة تقريب الدوال ومرافقاتها في صف ليبشتز بإستخدام طريقة هاوسدورف_هولدر.

٢_ إمكانية دراسة تقريب الدوال و الدوال المشتقة المرافقة لها في صف زيغموند المعمم وذلك بإستخدام طريقة سيزارو_ ريس.

٣- إمكانية دراسة تقريب الدوال ومرافقاتها في صف معمم يشتمل على صفي زيغموند و ليبشتز معاً بإستخدام طريقة هاوسدورف_ سيزارو.

المراجع

[1]. Rhoades, BE. 2014, *The degree of approximation of functions, and their conjugates, belonging to several general Lipschitz classes by Hausdorff matrix means of the Fourier series and conjugate series of a Fourier series*. Tamkang J. Math. 45(4), 389-395 .

[2]. Lal, S: Shireen. 2013, *Best approximation of functions of generalized Zygmund class by Matrix-Euler summability mean of Fourier series*. Bull. Math. Anal. Appl. 5(4), 1-13 .

[3] .U. Singh, S. Sonkar. 2013, *Trigonometric approximation of signals (function) belonging to weighted (Lip, ξ (t))-class by Hausdorff means*, J. Appl. Funct. Anal. 8 (1) 37–44.

[4] H.K. Nigam, A. Sharma. 2012,*On approximation of conjugate of functions belonging to different classes by product means*, Int. J. Pure Appl. Math. 76 (2) 303–316.

[5] V.N. Mishra, K. Khatri, L.N. Mishr2012, *Product summability transform of conjugate series of Fourier series*, Int. J. Math. Math. Sci. 2012 1–13.

[6].Rhoades, BE, Ozkoklu,K, Albayrak ,I.2011,*On the degree of approximation of functions belonging to a Lipschitz class by Hausdorff means of its Fourier series*. Appl. Math. Comput. 217(16), 6868-6871

[7]H.K. Nigam, A. Sharma.2010, *On approximation of conjugate of a function belonging to Lip(ξ (t), r) class by product summability means of conjugate series of Fourier series*, Int. J. Contemp. Math. Sci. 5 (54) 2673–2683.

[8]. Mricz, F.2010, *Enlarged Lipschitz and Zygmund classes of functions and Fourier transforms*. East J. Approx. 16(3), 259-271.

[9]. Rhoades, BE.2003, *On the degree of approximation of functions belonging to a Lipschitz class by Hausdorff means of its Fourier series*. Tamkang J. Math. 34(3), 245-247

[**10**]. Das, G, Nath, A, Ray, BK.2002, *An estimate of the rate of convergence of Fourier series in the generalized Holder metric*. In: Anal. Appl., pp. 43-60.
[**11**] A. Zygmun.2002, *Trigonometric Series*, third ed., Cambridge University Press, London.
[**12**] G. Bachman, L. Narici, E. Beckenstien.2000, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer Verlag, New York.
[**13**]K. Qureshi. 1982 , *On the degree of approximation of functions belonging to the Lip(α, p) by means of a conjugate series*, Indian J. Pure Appl. Math. 13 (5) 560–563.
[**14**]. Qureshi, K. 1982,*On the degree of approximation of functions belonging to the class of Lipα*. Indian J. Pure Appl. Math. 13(8), 898-903 .