مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (2) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (2) 2022

إيجاد المؤثر العكسي لمؤثر تكاملي في فضاء هلبرت نواته معلومة

الدكتور أحمد رستم الوسوف*

(تاريخ الإيداع 9/3/ 2022 – تاريخ النشر 25 /4/ 2022)

□ **ملخّص** □

لقد تم في هذا العمل ايجاد المؤثر العكسي لمؤثر تكاملي نواته معلومة ومحدودة وبنيت بدلالة نواة مؤثر تكاملي أخر متناظرة وقابلة للاشتقاق ومشتقاتها قابلة للمكاملة في فضاء هلبرت للتوابع القابلة للمكاملة تربيعياً على مجال $[0, T]$ باستخدام الشكل المثلثي لمؤثر تكاملي (في الحالة المستمرة) طيفه متجمع في الصفر.

الكلمات المفتاحية:المؤثر التكاملي، المؤثر العكسي، فضاء هلبرت، الشكل المثلثي لمؤثر.

*استاذ مساعد في قسم الاحصاء الرياضي – كلية العلوم – جامعة تشرين - اللاذقية – سوريا.

البريد الالكتروني: ahmad58alwasouf@gmail.com

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (2) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (2) 2022

Finding the inverse operator of integral operator in Hilbert space of a known kernel

Dr. Ahmad Rostom Alwassouf*

(Received 9/3/2022.Accepted 25/4/2022)

□ABSTRACT □

In this research, the inverse operator was found for an integral operator which kernel is known and limited and built based on the kernel of another integral operator and symmetrical and derivable and its derivatives are integrable in Hilbert space of the quadratic integrable functions on range [0, T] using the triangular shape of the integral operator (in continues state) and its spectrum is gathered in Zero].

Key words: Integral operator, inverse operator, Hilbert space, triangular shape of an operator.

* Assistant Professor in Department of Mathematical Statistics, Science Faculty, Tishreen University, Lattakia, Syria.
Email: Dr.ahmadalwasouf@gmail.com

مقدمة :

أن المسألة المباشرة هي تلك المسألة التي تحدد النتائج انطلاقاً من الأسباب ، أما المسألة العكسية (inverse problems) هي المسألة التي تحدد الأسباب انطلاقاً من النتائج ، إذ أن لتلك النظرية تطبيقات في شتى العلوم، فمنها الرياضيات التطبيقية [1,2,7,8]و العلوم الطبيعية والتكنولوجية و الفيزياء والجيوفيزياء وفي المجال الطبي (فمن الصورة والتحاليل الطبية يحدد الطبيب اسباب المرض) ..... ، ووجود ووحدانية الحل هو الهدف الأساسي في تلك المسألة ، فقد لا تكون المسألة قابلة للحل أو لها عدة حلول أو حل وحيد، وهذا معلوم كثيراً في المسائل الأكثر بساطة وهو وجود ووحدانية الحل لأسرة من المعادلات الجبرية Y=AX ، فالحل يتعلق في وجود أو عدم وجود A^{-1} ، وكذلك شرط التباين هو شرط لازم لوجود التابع العكسي للتوابع ، وكذلك الازومترية شِرط أساسي لوجود المؤثر العكسي L^{-1} للمؤثر L .

منهجية البحث:

يعتمد البحث بصورة أساسية على المنهج الوصفي والتحليلي ، وعلى مفهوم المؤثر العكسي لمؤثر تكاملي، والشكل المثلثي لمؤثر تكاملي طيفه متجمع في الصفر، ومفهوم تابع غرين و المعادلات التكاملية وعلى مسح مرجعي لبعض الكتب والأبحاث ذات الصلة.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث من الأهمية التطبيقية للمسألة العكسية (inverse problems) في شتى العلوم، فمنها الرياضيات التطبيقية والعلوم الطبيعية والتكنولوجية و الفيزياء والجيوفيزياء والفلك والتصوير الطبي، وأهمية المسألة العكسية تكمن في اننا نحدد أسباب الظواهر من نتائجها، وكثير من هذه المسائل يمكن أن نعبر عنها بمؤثر ما، ومن هذه المؤثرات صف المؤثرات التكاملية، وأهم تطبيقاتها هما عملية التصفية وعملية التنبؤ، فمن اشارة الخرج يمكن أن نحدد الاشارة المرسلة.

النتائج والمناقشة:

ليكن S مؤثراً تكاملياً في فضاء هلبرت $H = L^2_{[0,T]}$ معرفاً بالعلاقة

$$Sf(x) = \frac{d}{dx}\int_0^T K(x,t).f(t)dt$$

حيث $K(x,t) = K_0(x-t).K_1(x,t)$ تابع قابل للاشتقاق بالنسبة للمتغيرين x,t ومشتقاته قابلة للمكاملة[2]، والمسألة التي سنبحثها هي ايجاد المؤثر العسكي L^{-1} للمؤثر

$$L = \left[\frac{1}{\varphi(x)}(SA - A^*S)\frac{d}{dx}\ \frac{1}{\overline{\varphi}(x)}\right]$$

حيث A مؤثر معرف في الفضاء $H = L^2_{[0,T]}$ بالعلاقة $Af(x) = i\int_0^x f(t)dt$ ،أي طيفه متجمع في الصفر ،و مرافقه المؤثر $A^*f(x) = -i\int_x^T f(t)dt$ [3] الذي نجده من الجداء العددي

$$\big(Af(x), g(x)\big) = (f(x), A^*g(x))$$

في ذلك الفضاء ،و لنحسب المقدار (SA−A* S)f(x) [1,2] فنجد أن :

$$SAf(x) = i\int_0^x \frac{d}{dt}\int_0^T K(t,u).f(u)du\ dt =$$

$$= i\int_0^T K(x,t)f(t)dt - i\int_0^T K(0,t)f(t)dt$$

و

$$SA^*f(x) = -i\ \frac{d}{dx}\int_0^T K(x,t)\int_x^T f(u)du\, dt =$$

$$= -i\ \frac{d}{dx}\int_0^T K(x,t)\int_0^u f(u)du\, dt + i\int_0^T\int_0^u \frac{\partial}{\partial t} K(x,t)dt\, f(u)d\,u$$

$$= -i\ \int_0^T\int_0^u\ W(x,t)dt\, f(u)du + \ i\int_0^T K(x,u)f(u)du - i\int_0^T K(x,0)f(u)du$$

وبالتالي يكون

$$(SA - A^*S)f(x) == i\ \int_0^T\int_0^u W(x,t)dt\, f(u)du +$$

$$+i\int_0^T K(x,0)f(u)du - i\int_0^T K(0,t)f(t)dt$$

لكن [3]

$$W(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)[K_0(x-t).\int_0^T \varphi(x+\tau).\bar{\varphi}(t+\tau)d\tau]$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)[K_0(x-t).K_1(x,t)]$$

حيث $K_1(x,t) = \int_0^T \varphi(x+\tau).\bar{\varphi}(t+\tau)d\tau$

باشتقاق العلاقة نجد $W(x,t) = \frac{\partial K_0}{\partial x}.K_1 + \frac{\partial K_1}{\partial x}.K_0 + \frac{\partial K_0}{\partial t}.K_1 + \frac{\partial K_1}{\partial t}.K_0$

لكن $\frac{\partial K_0}{\partial x} = -\frac{\partial K_0}{\partial t}$ وبالتالي:

$$W(x,t) = \frac{\partial K_1}{\partial x}.K_0 + \frac{\partial K_1}{\partial t}.K_0 = K_0\left[\frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_1}{\partial t}\right] = K_0.W_1(x,t)$$

أي أن

$$(SA - A^*S)f(x) = \ i\int_0^T K(x,0)f(u)du - i\int_0^T K(0,t)f(t)dt +$$

$$+\ i\ \int_0^T\int_0^u K_0(x-t).W_1(x,t)dt.f(u)du$$

$$=\ i\int_0^T K(x,0)f(u)du - i\int_0^T K(0,t)f(t)dt +$$

$$+\ \boldsymbol{i}\ \int_0^T\int_0^t \boldsymbol{K_0(x-u).W_1(x,u)du.f(t)dt}$$

نعوض $W_1(x,t)$ بقيمته $\varphi(x).\bar{\varphi}(t)$ فيكون

$$(SA - A^*S)f(x) = \ i\int_0^T K(x,0)f(u)du - i\int_0^T K(0,t)f(t)dt +$$

$$+\ \boldsymbol{i\,\varphi(x)}\ \int_0^T\int_0^t \boldsymbol{K_0(x-u).\overline{\varphi(u)}du.f(t)dt} \quad .$$

فنجد أن

$$\boldsymbol{i}\ \int_0^T\int_0^t \boldsymbol{K_0(x-u).\overline{\varphi(u)}du.f(t)dt} = \int_0^T \boldsymbol{K_0(x-u).\overline{\varphi(u)}du}.\int_u^T \boldsymbol{f(t)dt} =$$

$$= \int_0^T \boldsymbol{K_0(x-u).h(u)du}\,, \qquad \boldsymbol{h(u)} = \ \overline{\boldsymbol{\varphi(u)}}\int_u^T \boldsymbol{f(t)dt}$$

و **بالتالي حصلنا على المقدار**

$$(SA - A^*S)f(x) = \ i\int_0^T K(x,0)f(u)du - i\int_0^T K(0,t)f(t)dt +$$

$$+\boldsymbol{i\varphi(x)}\int_o^T \boldsymbol{K_0(x-u).h(u)du}$$

وبفرض أن $L = \frac{1}{\varphi(x)}(SA - A^*S)f(x)\frac{d}{dx}\frac{1}{\bar{\varphi}(x)}$ نجد

$$L\,h(x)=\int_0^T \frac{K(0,t)}{\varphi(x)}.\left(\frac{h(t)}{\overline{\varphi}(t)}\right)'\ \ dt-i\int_0^T \frac{K(x,0)}{\varphi(x)}.\left(\frac{h(t)}{\overline{\varphi}(t)}\right)'\ \ dt+$$
$$+\boldsymbol{i}\int_{\boldsymbol{o}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{K_0(x-u).h(u)du}$$

ومن العلاقتين

$$\int_0^T \frac{K(0,t)}{\varphi(x)}.\left(\frac{h(t)}{\overline{\varphi}(t)}\right)'\ \ dt=\int_0^T \frac{K'(0,t)}{\varphi(x).\overline{\varphi}(t)}\ \ h(t)dt$$
$$\int_0^T \frac{K(x,0)}{\varphi(x)}.\left(\frac{h(t)}{\overline{\varphi}(t)}\right)'\ \ dt=-i\frac{h(0)}{\overline{\varphi}(0)}\ .\frac{K(x,0)}{\varphi(x)},\quad h(T)=0$$

يكون

$$L\,h(x)=i\int_0^T \frac{K'(0,t)}{\varphi(x).\overline{\varphi}(t)}\ \ h(t)dt+\frac{h(0)}{\overline{\varphi}(0)}\ .\frac{K(x,0)}{\varphi(x)}+i\int_{\boldsymbol{o}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{K_0(x-u).h(u)du},$$

حيث $h(0)=\int_0^T \delta(t).h(t)dt$

عندئذ نجد أن

$$L\,h(x)=\ i\int_0^T \frac{K'(0,t)}{\varphi(x).\overline{\varphi}(t)}\ \ h(t)dt+i\int_0^T \frac{K(x,0)}{\varphi(x)}\ \delta(t).h(t)dt+$$
$$i\int_{\boldsymbol{o}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{K_0(x-\ \ u).h(u)du},$$
$$L\,h(x)=i\int_0^T \left[\frac{K'(0,t)}{\varphi(x).\overline{\varphi}(t)}\ \ +\frac{K(x,0)}{\varphi(x)}\ \delta(t)+\boldsymbol{K_0(x-t)}\right]h(t)dt$$

وهو مؤثر تكاملي نواته هي $\frac{K'(0,t)}{\varphi(x).\overline{\varphi}(t)}+\frac{K(x,0)}{\varphi(x)}\ \delta(t)+\boldsymbol{K_0(x-t)}$

بفرض أن $L=p+S_1$ ولنوجد $(AL-LA^*)h(x)$ فيكون

$$(AL-LA^*)h(x)=(A(p+S_1)-(p+S_1)A^*)h(x)=$$
$$=(Ap-pA^*)h(x)+(AS_1-S_1A^*)h(x),$$

حيث يعرف المؤثر p بالعلاقة

$$ph(x)=i\int_0^T \frac{K'(0,t)}{\varphi(x).\overline{\varphi}(t)}\ \ h(t)dt+i\frac{K(x,0)}{\varphi(x)}.\frac{h(0)}{\overline{\varphi}(0)}$$

عندئذ نجد أن

$$Aph(x)=\ i\int_0^T \frac{K'(0,t)}{\overline{\varphi}(t)}\ \ g(x)\ h(t)dt-\int_0^x \frac{K(t,0)}{\overline{\varphi}(t)}.\frac{h(0)}{\overline{\varphi}(0)}\ dt,\ \ g(x)=\int_0^x \frac{du}{\varphi(u)}$$

و

$$(pA^*)h(x)=-ip\left(\int_x^T h(t)dt\right)=\int_0^T\int_t^T \frac{K'(0,t)}{\varphi(x).\overline{\varphi}(t)}h(u)du-\int_0^T \frac{K(x,0)}{\varphi(x)}\ h(t)dt=$$
$$\int_0^T \frac{K(0,t)}{\overline{\varphi}(t)}\ h(t)dt-\int_0^T \frac{K(x,0)}{\varphi(x)}\ h(t)dt+\int_0^T\int_0^t \frac{K(0,u)}{\varphi(x)\left(\varphi(u)\right)^2}\ \ \overline{\varphi}(u)'\ h(t)dt$$

وبالتالي يكون

$$(Ap-pA^*)h(x)=\int_0^T \left[-\frac{K'(0,t)}{\overline{\varphi}(t)}\ \ g(x)+i\int_0^x \frac{K(u,0)}{\varphi(u)}\ \delta(t).dt+\frac{K(x,0)}{\varphi(x)}.\frac{1}{\overline{\varphi}(0)}-\right.$$
$$\left.-\frac{K(t,0)}{\overline{\varphi}(t)}\right]h(t)\ dt$$

و

$$(AS_1-S_1A^*)h(x)=\int_0^T [G(-t)-G(x)]h(t)dt$$

حيث G تابع غرين[4] ، و $K_0(x-t)=\frac{d}{dx}G(x-t)$ [5,6] ، فنجد

$$(AL-LA^*)h(x)=\ \int_0^T \left[-\frac{K'(0,t)}{\overline{\varphi}(t)}\ \ g(x)+\int_0^x \frac{K(u,0)}{\varphi(u)}\ \delta(t).du+\frac{K(x,0)}{\varphi(x)}.\frac{1}{\overline{\varphi}(0)}-\right.$$
$$\left.-\frac{K(t,0)}{\overline{\varphi}(t)}+G(-t)-G(x)\right]h(t)dt$$

وبالتالي

$$(AL-LA^*)h(x)=\int_0^T[Q_1(t).F_1(x)+Q_2(t)F_2(x)+Q_3(t)F_3(x)+Q_4(t)F_4(x)+$$
$$+Q_5(t)F_5(x)+Q_6(t)F_6(x)].h(t)dt$$

حيث $Q_1(t)=-\frac{K'(0,t)}{\overline{\varphi}(t)}, F_1(x)=g(x), Q_2(t)=\delta(t)\ , F_2(x)=\int_0^x\frac{K(u,0)}{\varphi(u)}\ .du,$

$$Q_3(t)=1, F_3(x)=\frac{K(x,0)}{\varphi(x)}.\frac{1}{\overline{\varphi}(0)}, Q_4(t)=-\frac{K(t,0)}{\overline{\varphi}(t)}, F_4(x)=1$$
$$Q_5(t)=G(-t), F_5(x)=1, Q_6(t)=1, F_6(x)=-G(x)$$

وهكذا برهنا وجود مؤثر عكسي للمؤثر L الذي نرمز له بالرمز **R** و الذي يمكن ايجاده على النحو التالي:

بفرض أن $g(x)=Rh(x)$ **ولنحسب التابع** $(\mathrm{RA}-A^*R)g(x)$:

$$(\mathrm{RA}-A^*R)g(x)=R(A-LA^*R)g(x)=R(AL-LA^*)Rg(x)=$$
$$R[\int_0^T(Rg)(t)\,[\frac{K'(0,t)}{\overline{\varphi}(t)}\ \ g(x)+\int_0^x\frac{K(u,0)}{\varphi(u)}\ \delta(t).du+\frac{K(x,0)}{\varphi(x)}.\frac{1}{\overline{\varphi}(0)}-$$
$$-\frac{K(t,0)}{\overline{\varphi}(t)}+G(-t)-G(x)]dt=\mathrm{R}\int_0^T[(Rg)(t)[Q_1(t).F_1(x)+Q_2(t)F_2(x)+$$
$$Q_3(t)F_3(x)+Q_4(t)F_4(x)+Q_5(t)F_5(x)+Q_6(t)F_6(x)].dt=$$
$$=\int_0^T(Rg)(t)[Q_1(t).RF_1(x)+Q_2(t).RF_2(x)+Q_3(t).RF_3(x)+$$
$$Q_4(t).RF_4(x)++Q_5(t).RF_5(x)+Q_6(t).RF_6(x)].dt=$$

$$=\int_0^T g(t)[R^*Q_1(t).RF_1(x)+R^*Q_2(t).RF_2(x)+R^*Q_3(t).RF_3(x)+R^*Q_4(t).RF_4(x)$$
$$+R^*Q_5(t).RF_5(x)+\ R^*Q_6(t).RF_6(x)].dt$$
$$=\int_0^T g(t)\big[\overline{Q^1}(t).F^1(x)+\overline{Q^2(t)}F^2(x)+\overline{Q^3(t)}F^3(x)+\overline{Q^4(t)}F^4(x)+\overline{Q^5}(t)F^5(x)+$$
$$+\overline{Q^6}t)F^6(x)\big]dt$$

حيث $F^{(i)}(x)=RF_i(x), \overline{Q^{(i)}}(t)=\ \ R^*Q_i(t)$

و i=1,2,….6 ، وهكذا نجد أن:

$$[RA-A^*R]h(x)=\int_0^T h(t), Q(x,t)dt$$

حيث $Q(x,t)=\sum_{i=1}^{6}\overline{Q^{(i)}}(t)F^{(i)}(x)$

وبالتالي يكون $\boldsymbol{R\ h(x)=\frac{d}{dx}\int_0^T h(t)\frac{\partial}{\partial t}\emptyset(x,t)dt}$

حيث

$$\emptyset(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x+t}^{2T-(x-t)}Q(\frac{u+x-t}{2},\frac{u-x+t}{2})\ du$$

مما سبق يمكن أن نصيغ المبرهنة الآتية:

مبرهنة: ليكن S مؤثراً تكاملياً في فضاء هلبرت $H = L^2_{[0,T]}$ معرفاً بالعلاقة

$$Sf(x) = \frac{d}{dx}\int_0^T K(x,t).f(tt)d$$

حيث $K(x,t) = K_0(x-t).\int_0^T \varphi(x+\tau).\bar{\varphi}(t+\tau)d\tau] = K_0(x-t).K_1(x,t)$ تابع قابل للاشتقاق بالنسبة للمتغيرين x,t ومشتقاته قابلة للمكاملة ، وليكن A مؤثر معرف في الفضاء $H = L^2_{[0,T]}$ بالعلاقة $Af(x) = i\int_0^x f(t)dt$ طيفه متجمع في الصفر ،والذي مرافقه $A^*f(x) = -i\int_x^T f(t)dt$ ، ولنعرف المؤثر $L = \frac{1}{\varphi(x)}(SA - A^*S)f(x)\frac{d}{dx}\frac{1}{\bar{\varphi}(x)}$ على الفضاء $L^2_{[0,T]}$ وليكن $R = L^{-1}$ المؤثر العكسي للمؤثر L، فإذا حقق المؤثر R العلاقة : $(RA - A^*R) = Q$ حيث Q مؤثر محدود معرف على الفضاء H بالعلاقة $Qf(x) = \frac{d}{dx}\int_0^T Q(x,t).f(t)dt$ حيث $Q(x,t) = \sum_{i=1}^{6}\overline{Q^{(i)}}(t)F^{(i)}(x)$

و

$F^{(i)}(x) = RF_i(x), \overline{Q^{(i)}}(t) = R^*Q_i(t)$ ، i=1,2,….6 ،

فنجد أن:

$$Rh(x) = \frac{d}{dx}\int_0^T h(t)\frac{\partial}{\partial t}\emptyset(x,t)dt$$

حيث $\emptyset(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x+t}^{2T-(x-t)} Q\left(\frac{u+x-t}{2},\frac{u-x+t}{2}\right)du$

النتائج:

١.نستنتج أهمية استخدام طريقة نرسسيان بمعالجة المسألة العكسية لكثير من المؤثرات التكاملية في فضاء هلبرت .

٢.نستنتج أهمية شكل النواة وخواصها للمؤثر التكاملي في الحصول على المؤثر العكسي لذلك المؤثر.

٣.يمكن بناء مؤثرات جديدة من المؤثر التكاملي لوصف ظاهرة ما ،وتكون المسألة العكسية لها ذات أهمية كبيرة في التطبيقات العملية .

التوصيات

١. نوصي باستخدام المنظومات المفتوحة بإيجاد المؤثر العكسي .

٢. نوصي باجراء ابحاث من أجل أشكال أخرى للنواة K(x,t) .

المراجع

1-Нрсесян М., *нахождение обратного операатора для интегральной оператора с использованием треугольного модели интегрального оператора со спектром*, сосредоточенным в нулле, Акад.Азарбежа. СССР;1976.

2- Zolotariov V. *LA factorisation des functions operaterurs de transmission et LA method de la construction d' operateuts nversibles* .

3- Dans $L^2_{(0,l)}$,Un,iversite' *Pierre et Marie Curie D' ANALYSES (L.A.189) our 55-65 -5e'me etage* 4,place Jussieu 75230 Paris center national de Cedex 05 ,1982.

4- LIVSIC M. S. , IANCEWICH A. A. *Theory of operator colligation in Hilbert Space* , J. Wiley N.Y, 1979 .

5- WIJEWARDENA, K ;GAMALATH, L. *Introduction to green functions in physics* , Alpha Science ,2019.

6- Ахеиезер Г. ,Глзман И.М.,*Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве* ;»Наука» 1982 .

7- Корен Г. ,курен Т. ;*справочник по математике издание пятое москква «Наука*» 1984 .

8- Alessandro Mishelangeli,Noe Anjelo Carloso ;*Linear operator,the possibility to solve the inverse problem by Krylov solvability*;arXiv,2021.

9- Boichuk A.A.,Samoilenko A.M*.;"2.Generalized inverse operator in Banach spaces"Generalized inverse operators and Fredholme Boundary-value;*Berlin Boston :De Gruyter,2012,pp.29-46 .